高职高专高等数学系列教材（少学时）

新编经济数学基础

（经济类、管理类）

主摇编摇冯翠莲
编著者摇冯翠莲摇李文辉摇陆小华

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇新编经济数学基础（经济类、管理类）辕冯翠莲主编援—北京：北京大学出版社，圆园园缘援愿
摇（高职高专高等数学系列教材）（少学时）
摇陨杂月晕苑鄄猿园员鄄园怨猿缘源鄄园

摇Ⅰ援新…摇Ⅱ援冯…摇Ⅲ援经济数学 原高等学校 技术学校 原教材摇Ⅳ援云圆圆源

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园缘）第 园苑远猿缘愿号

摇书　　　名：新编经济数学基础（经济类、管理类）
摇著作责任者：冯翠莲摇李文辉摇陆小华摇编著
摇责 任 编 辑：曾琬婷摇聂一民
摇标 准 书 号：陨杂月晕苑鄄猿园员鄄园怨猿缘源鄄园辕韵·园远园
摇出 版 发 行：北京大学出版社
摇地　　　址：北京市海淀区成府路 圆园缘号摇员园园愿苑员
摇网　　　址：澡贼贼责：辕辕憎憎憎援责怎责援糟灶摇电子信箱：扎责躁岳责怎责援责噪怎援糟灶
摇电　　　话：邮购部 远圆苑缘圆园员缘 发行部 远圆苑缘园远苑圆 理科编辑部 远圆苑缘圆园圆员
摇印　刷　者：北京大学印刷厂
摇经　销　者：新华书店
苑愿苑皂皂×怨远园皂皂摇员远开本摇员远援缘印张摇猿愿园千字
圆园园缘年 愿月第 员版摇摇摇圆园园缘年 愿月第 员次印刷
摇印　　　数：园园园员—缘园园园册
摇定　　　价：圆源援园园元

内 容 简 介

本书是高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业少学时的经济数学基础教材援内容包括：导数，导数的应用，积分及其应用，偏导数及其应用，矩阵与线性方程组，概率初步和统计学初步援本书本着重基本知识、重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点而编写援本书每节有“本节学习目标”，每节后配有与教材内容密切相关的 粤组习题和 月组习题，每章后配有总习题援书后附有全书习题的答案与解法提示援

本书在内容的叙述上由浅入深、通俗易懂，概念清晰，例题丰富而又贴近实际援注意归纳数学的辩证思维、解题方法与解题程序，便于自学援

本书也可作为参加经济类、管理类专升本考试学生的教材或教学参考用书援

前摇摇言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分，近几年呈现出前所未有的发展势头援为适应高职高专教育改革的要求，坚持以就业为导向，以能力为本位，面向市场、面向社会，为经济结构调整和科技进步服务的办学宗旨，我们本着重基本知识、重素质、重能力、重应用、开拓思维求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点，编写了高职高专高等数学系列教材（少学时）——《新编经济数学基础》和《新编工科数学基础》援前者供高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业学生使用，后者供工科类各专业学生使用援

本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容，注意与后续课程相衔接、与生产、服务、管理第一线的实际需求相适应，力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一援

本教材的主要特点：

员援突出高职高专少学时的特色援根据高职高专经济类、管理类各专业对数学的基本要求，根据数学的认知规律，将微积分、线性代数及概率统计的基本内容有机地结合在一起，组织和编排全书内容援在不失数学内容学科特点的情况下，采取模块化的思路，便于教师根据教学时数和专业需求选择教学内容援

圆援贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则援以现实、生动的例题引入基本概念，以简明的语言、并尽量配合几何图形、数表阐述基本知识、基本理论，注重基本方法和基本技能的训练，并给出求解问题的解题程序援同时注重数学概念、数学方法的实用价值，注意培养学生用定量与定性相结合的方法，综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力和创新能力援

猿援内容精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学援

源援每节有“本节学习目标”，每节配有 粤组和 月组习题，每章配有总习题援书后附有全书习题答案与解法提示援

参加本书编写的有北京经济管理干部学院冯翠莲、北京工业大学李文辉和北京农业职业学院陆小华，最后由冯翠莲统一修改定稿援参加本书编写工作的还有唐声安、葛振三援

本系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社相关领导的大力支持和帮助援在本书的编写过程中，同行专家参加了讨论并提出宝贵意见，在此一并表示感谢援

限于编者水平，不足之处恳请读者批评指正援

编摇者

圆园园缘年 远月

目　录

第 一 章

摇导数摇

> 摇
> 摇摇本章先介绍函数的极限概念和连续性概念,然后讲述导数概念和求导数的方法援
> 摇

异员援摇数列的极限

【本节学习目标】摇知道数列极限的概念,会用连续复利公式援

一、数列极限的概念

先看一个有关数列极限的实际例子援

我国战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭援”这就是说一根长为一尺的棒头,每天截去一半,这样的过程可以无限地进行下去援

把每天截后剩下的棒的长度写出来(单位:尺):

第 员天剩下$\frac{员}{圆}$,第 圆天剩下$\frac{员}{圆^{圆}}$,第 猿天剩下$\frac{员}{圆^{猿}}$,…,第 灶天剩下$\frac{员}{圆^{灶}}$,…援

这样就得到一列数

$$\frac{员}{圆},\frac{员}{圆^{圆}},\frac{员}{圆^{猿}},\cdots,\frac{员}{圆^{灶}},\cdots援$$

这一列数就称为数列援

随着天数的推移,剩下的棒的长度越来越短,显然,当天数 灶无限增大时,剩下的棒的长度将无限缩短,即剩下的棒的长度$\frac{员}{圆^{灶}}$将无限接近于数 园援这时我们就称由剩下的棒的长度构成的上述数列以常数 园为极限援并记作

$$\underset{灶\to肆}{造藻皂}\frac{员}{圆^{灶}}越园援$$

摇摇一般,按正整数顺序排列的无穷多个数,称为数列援数列通常记作

$$赠_{员},赠_{圆},赠_{猿},\cdots,赠_{灶},\cdots,$$

或简记作 $\{a_n\}$. 数列的每个数,称为数列的项,依次称为第一项,第二项,…. 第 n 项 a_n 称为数列的通项或一般项.

例如,我们已经知道的等差数列是

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(n-1)d,\ \cdots,$$

其首项是 a_1,公差是 d,通项 $a_n=a_1+(n-1)d$.

等比数列是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

其首项是 a_1,公比是 q,通项 $a_n=a_1q^{n-1}$.

讨论数列 $\{a_n\}$ 的极限,就是讨论:当 n 无限增大时,数列的通项 a_n 的变化趋势,特别是,是否有趋向于某个常数的变化趋势. 为此,我们有如下数列极限概念.

设数列 $\{a_n\}$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

若当 n 无限增大时,a_n 趋向于常数 A,则称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A \quad 或 \quad a_n\to A\ (n\to\infty).$$

上式前一式子,读作"当 n 趋于无穷大时,a_n 的极限等于 A";后一式子,读作"当 n 趋于无穷大时,a_n 趋于 A".

有极限的数列称为收敛数列;没有极限的数列称为发散数列.

例 1 数列 $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$:

$$0,\ 1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{5},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^n}{n},\ \cdots.$$

当 n 无限增大时,由于 $\frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于常数 0,所以其通项 $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$ 就无限接近于常数 1,即该数列以 1 为极限,可记作

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1.$$

例 2 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots.$$

当 n 无限增大时,数列在数值 1 和 -1 上跳来跳去,不趋于一个常数,该数列没有极限.

例 3 数列 $\{n^2\}$:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots.$$

当 n 无限增大时,其通项 $a_n=n^2$ 也无限增大,它不趋于任何常数,该数列没有极限.

注意到 $a_n=n^2$ 随着 n 无限增大,它有确定的变化趋势,即取正值且无限增大. 对这种情况,我们借用极限的记法表示它的变化趋势,记作

$$\lim_{n\to\infty} n^2=+\infty \quad 或 \quad n^2\to+\infty\ (n\to\infty),$$

并称该数列的极限是正无穷大援

同样，对数列｛原$\sqrt{灶}$｝，｛(原员)^{灶}｝，则可分别记作

$$\lim_{灶\to\infty}(原\sqrt{灶})越原肄,摇\lim_{灶\to\infty}(原员)^{灶}越肄,$$

前者称数列的极限是原肄，后者称数列的极限是无穷大援

例源摇考查极限 $\lim_{灶\to\infty}\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}$ 是否存在援

解摇将数列 $\left\{\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}\right\}$ 取值计算，取小数点后的有效位数为缘位，考查数列取值的趋势，见表员鄄猿援

表摇员鄄猿

灶	员	员园园	缘园园	员园园园	员园园园园	员园园园园园	园园园园园园
$\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}$	圆	圆援苑园源愿员	圆援苑员缘缘苑	圆援苑员远怨圆	圆援苑员愿园远	圆援苑员愿圆愿	圆援苑员愿圆愿

摇摇由表员鄄猿看出，该数列是单调增加的 若再仔细分析表中的数值会发现，随着灶增大，数列后项与前项的差值在减少，而且减少得相当快 最后两项，项数相隔员园园园万项，而缘位有效位数相同援这表明，数列的通项 $赠_灶越\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}$ 当灶无限增大时，它将趋于一个常数援可以推出，该数列 $\left\{\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}\right\}$ 有极限，且其极限为藻即

$$\lim_{灶\to\infty}\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}越藻援$$

其中藻越圆援苑员愿圆愿员愿圆愿源缘怨……，是一个无理数援

由上述极限还可推出下述极限

$$\lim_{灶\to\infty}\left(员垣\frac{葬}{灶}\right)^{\frac{灶}{葬}}越藻援$$

摇摇例缘摇求极限 $\lim_{灶\to\infty}\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{源灶}$ 援

解摇由幂的运算性质

$$\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{源灶}越\left[\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}\right]^{源},$$

于是

$$\lim_{灶\to\infty}\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{源灶}越\lim_{灶\to\infty}\left[\left(员垣\frac{员}{灶}\right)^{灶}\right]^{源}越藻源援$$

二、连续复利公式

从经济学角度看，货币有时间价值援比如，现在的一万元钱比若干年后的一万元钱要值钱，或者说若干年后一万元钱的现在价值没有现在一万元钱的价值高援前后两个时间点货币价值之所以不同，其中就是因为有一个利息问题援利息就是在一个时间间隔内因使用货币而付出的钱的代价援

作为数列极限概念的应用，这里介绍连续复利问题援

设 $粤_{园}$是本金，又称现在值，则是年利率，贼是时期（单位：年），$粤_{贼}$是 贼年末的本利和，又称未来值援

复利就是利息加入本金再获取利息援即将投资于每期末所得利息加入该期的本金，并以此作为下一期的本金，继续投资援

若以一年为 员期计算利息，按复利计算 贼年末本利和的公式是

$$粤_{贼}越粤_{园}(员垣则)^{贼}援$$

摇摇若一年计息 灶期，并以$\frac{则}{灶}$为每期的利息，按复利计息，则 贼年末的本利和是

$$粤_{贼}越粤_{园}\left(员垣\frac{则}{灶}\right)^{灶贼}援$$

摇摇上述计息的“期”是确定的时间间隔，因而一年计息次数有限援

若计息的“期”的时间间隔无限缩短，从而计息次数 灶→肄，这种情况称为连续复利援这时，由于

$$\underset{灶→肄}{造蚤皂}粤_{园}\left(员垣\frac{则}{灶}\right)^{灶贼}越粤_{园}\underset{灶→肄}{造蚤皂}\left[\left(员垣\frac{则}{灶}\right)^{\frac{灶}{则}}\right]^{则贼}越粤_{园}藻^{则贼}援$$

故若以连续复利计算 贼年末本利和的公式是

$$粤_{贼}越粤_{园}藻^{则贼}援$$

摇摇例 远摇贷款 员园园万元购买一栋别墅，贷款期限 员园年，年利率 缘象，按下述各种情况计算员园年末的还款数：

（员） 按复利计算，每年计息 圆次；

（圆） 按连续复利计算援

解摇依题设 $粤_{园}$越员园园万元，则越缘象，贼越员园年，求未来值 $粤_{员园}$援

（员） 每年计息 圆期，即 灶越圆，则 员园年末的本利和

$$粤_{员园}越员园园伊\left(员垣\frac{园援园缘}{圆}\right)^{圆伊员园}万元越员园园伊员援远猿愿远万元越员远猿援愿远万元援$$

摇摇（圆） 按连续复利计算，员园年末的本利和

$$粤_{员园}越员园园藻^{园援园缘伊员园}万元越员园园伊员援远源愿苑万元越员远源援愿苑万元援$$

摇摇已知现在值 $粤_园$ 确定未来值 $粤_贼$,这是利息问题援若已知未来值 $粤_贼$ 求现在值 $粤_园$ 则是贴现问题,这时,利率 则称为贴现率援

由连续复利公式得连续贴现公式：

$$粤_园 越 粤_贼 藻^{原则贼} 援$$

摇摇例 苑摇设年贴现率为 远豫,按连续复利贴现,现投资多少万元,园园年末可得 员圆园园万元？

解摇已知 $粤_园$ 越员圆园园万元,则越远豫,贼越圆园,求现在值 $粤_园$ 援

$$粤_园 越 粤_园 藻^{原园援园远伊圆园} 越员圆园园伊园援猿园员怨万元 越猿远员援圆猿万元援$$

习摇题摇员援员

粤摇摇组

员援已知数列的通项,试写出数列,并观察判定数列是否有极限,若有极限,请写出其极限：

(员) $赠_灶 越 \frac{灶}{猿灶垣员}$ 摇摇 (圆) $赠_灶 越 (原员)^{灶垣员} \frac{员}{灶垣员}$ 援

圆援某公司发行股票,年利率 缘豫,每股 员园元,员园年后每股价值多少元？(按下面给出的两种情况计算)

(员) 按离散情况计算,每年计息 源次; 摇摇 (圆) 按连续复利计算援

猿援某保险公司发行养老保险基金,年利率 猿豫,按连续复利计算,圆园年后可得 缘园万元,问现在应存入多少万元？

月摇摇组

员援已知数列,试写出数列的通项,并观察判定数列是否有极限,若有极限,试写出其极限：

(员) $\frac{员}{猿}, \frac{员}{怨}, \frac{员}{圆苑}, \frac{员}{愿员}, \cdots$ 摇摇摇 (圆) 园员, $\frac{员}{圆}$, 园, $\frac{员}{猿}$, $\cdots$ 援

圆援某机械设备折旧率为每年 缘豫,问：连续折旧多少年,其价值是原价值的一半？

异灵援摇函数的极限

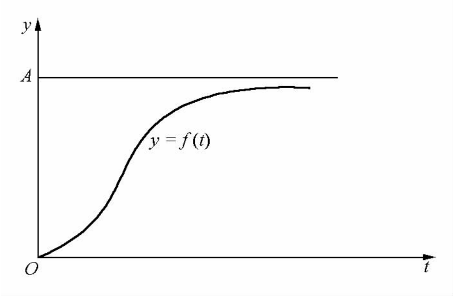
【本节学习目标】摇知道当 $曾\to肄$ 时,$曾\to曾_园$ 时,函数 枣(曾) 极限的概念;知道函数 枣(曾) 连续的概念援

一、函数的极限

对以 曾为自变量,赠为因变量的函数 赠越枣(曾),设其定义域为 阅(阅一般是数轴上的一个区间)援当自变量 曾在 阅内变化时,相应的因变量 赠或者说相应的函数 枣(曾) 也将随着变化援所谓函数 枣(曾) 的极限,就是讨论当自变量 曾在某一过程中变化时,相应的函数值 枣(曾) 的变化趋势援曾的变化过程是指 $曾\to肄$ (无穷大) 和 $曾\to曾_园$ (定数) 援我们先讨论前一种情形援

员援当 $曾\to肄$ 时,函数 枣(曾) 的极限

先看一个人们熟知的事实援



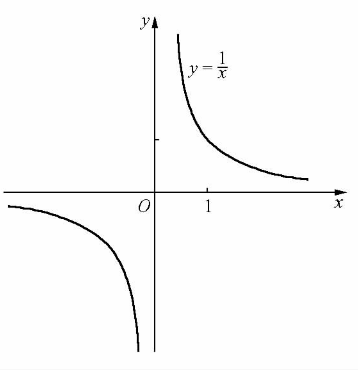
图摇员援

在某一地区,一种新的、适用的耐用产品上市后,使用的用户数 赠(假设这种产品每户用一台) 随着时间 贼的推移将越来越多援时间 贼可以无限延续,但由于该地区的用户数 晕是有限的,所以使用的用户数不可能无限增加,它只能越来越接近某一常数 粤(≤晕),即使用的用户数将逐渐趋于饱和状态援若将 赠看做是 贼的函数 赠越枣(贼),这就是当自变量 贼趋于无穷大时,函数 枣(贼)的极限问题援图 员援员描述了 赠随 贼变化的情况援

曾作为函数 枣(曾)的自变量,若 曾取正值且无限增大,记作 曾→ 垣肆;若 曾取负值且其绝对值 渣曾渣无限增大,记作 曾→ 原肆;若 曾既取正值又取负值,且 渣曾渣无限增大,记作 曾→肆援当 曾→肆时,函数 枣(曾)的极限”,就是讨论当自变量 曾的绝对值 渣曾渣无限增大时,相应的函数值 枣(曾)的变化趋势援

若当 曾→肆时,函数 枣(曾)趋于常数 粤,则称函数 枣(曾)当 曾趋于无穷大时以 粤为极限,记作

$$\underset{曾\to肆}{\text{遭蚤皂}}\,枣(曾)越粤摇或摇枣(曾)\to粤(曾\to肆)援$$



图摇员援圆

摇摇例如,当 曾→肆时,因$\frac{员}{曾}$将无限接近常数 园,这时,称函数 赠越$\frac{员}{曾}$当 曾趋于无穷大时以 园为极限,记作

$$\underset{曾\to肆}{\text{遭蚤皂}}\frac{员}{曾}越园援$$

观察图 员援圆的曲线(等轴双曲线) 赠越$\frac{员}{曾}$有两个分支援它的右侧分支沿着 曾轴的正方向无限延伸时,它的左侧分支沿着 曾轴的负方向无限延伸时,都与直线 赠越园越来越接近,此时我们称曲线 赠越$\frac{员}{曾}$以直线 赠越园为水平渐近线援

有时,我们仅讨论 曾→ 原肆时或 曾→ 垣肆时,函数 枣(曾)的变化趋势援

若 曾→ 原肆时,函数 枣(曾)趋于常数 粤,则称函数 枣(曾)当 曾趋于负无穷大时以 粤为极限,记作

$$\underset{曾\to原肆}{\text{遭蚤皂}}\,枣(曾)越粤摇或摇枣(曾)\to粤(曾\to原肆)援$$

摇摇若 曾→ 垣肆时,函数 枣(曾)趋于常数 粤,则称函数 枣(曾)当 曾趋于正无穷大时以 粤为极限,记作

$$\underset{曾\to垣肆}{\text{遭蚤皂}}\,枣(曾)越粤摇或摇枣(曾)\to粤(曾\to垣肆)援$$

摇摇由 曾→ 原肆,曾→ 垣肆及 曾→肆的含义,有如下结论:

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且等于 A，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=A=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

例 1 根据函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的图形（图 1.5），考查极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$ 是否存在。

解 当 $x\to\infty$ 时，显然有 $(1+x^2)\to\infty$，从而 $\dfrac{1}{1+x^2}\to0$，即所考查的极限存在，且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

从图 1.5 看，曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 沿着 x 轴的负方向无限延伸、沿着 x 轴的正方向无限延伸时，均以直线 $y=0$（x 轴）为水平渐近线。

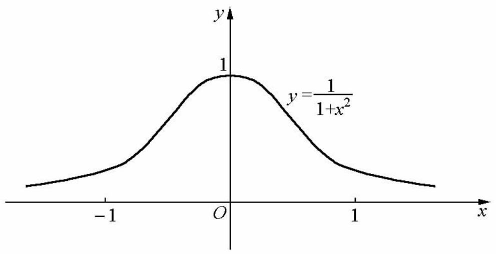


图 1.5

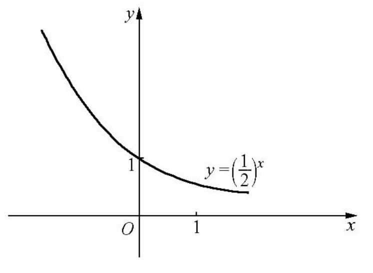


图 1.6

例 2 画出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图形，讨论极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是否存在。

解 函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图形如图 1.6 所示。由该图可看出

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0.$$

由极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 不存在。

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

这里，x_0 是一个定数。若 $x<x_0$ 且 x 趋于 x_0，记作 $x\to x_0^-$；若 $x>x_0$ 且 x 趋于 x_0，记作 $x\to x_0^+$。若 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$ 同时发生，则记作 $x\to x_0$。

“当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限”，就是在点 x_0 的左右邻近讨论当自变量 x 无限接近定