第一章　行列式

本章介绍线性代数的一个重要内容——行列式。在提出行列式的概念之后，讨论了它的性质，研究了计算行列式的方法，最后介绍了应用行列式求解线性方程组的克莱姆法则。

§1—1　行列式的定义

一，行列式的定义

先给出二阶和三阶行列式的定义。

我们用$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$符号表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并称它为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中的每一个数a_{ij}（$i,j=1,2$）称为该行列式的元素。二阶行列式共有$2^2=4$个元素。行列式中的每一横排叫行，纵排叫列。例如$a_{11}\quad a_{12}$叫做行列式的第一行，$a_{21}\quad a_{22}$叫做行列式的第二行；$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}$和$\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}$分别叫做行列式的第一列和第二列。

与二阶行列式类似，定义三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三阶行列式有三行、三列共$3^2=9$个元素。

四阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

四阶行列式有四行、四列共4^2个元素。

余此类推，有n阶行列式的如下定义。

定 义　n阶行列式定义为：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \quad (1\text{—}1)
$$

n阶行列式有n行，n列共n^2个元素。其中，a_{11}，a_{22}， ，a_{nn}称为主对角线上的元素。

例1〕 计算三角形行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots
$$

$$
= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}。
$$

例2〕 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=2\cdot 4\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=-4$$

二、有关行列式的几个概念

1．转置行列式　将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换所得的行列式

$$D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为原行列式D的转置行列式。易见此时，D亦为D^{T}的转置行列式。

2．k阶子式及代数余子式　在一个n阶行列式D中，任取k行k列（$1\leqslant k\leqslant n$），位于这些行与列相交处的$k\times k$个元素按原来顺序组成的的一个k阶行列式M，叫做D的一个k阶子式。例如在五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中取一，三行和四，五列得到二阶子式

$$M=\begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}$$

特别当 $k=1$ 时，即行列式的一阶子式就是行列式的一个元素。

在n阶行列式中，划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列，所剩下的元素按原来顺序组成的$n-1$阶行列式,称为元素a_{ij}的余子式记为M_{ij}，例如，在上面的五阶行列式中，a_{42}及a_{14}的余子式分别为：

$$M_{42}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}; \quad M_{14}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

定 义 若M_{ij}为元素a_{ij}的余子式，则称$(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，记为 A_{ij}即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M$$

例如在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，a_{32}及a_{13}的代数余子式分别为：

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

利用代数余子式的概念，则n阶行列式的定义可简化为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+$$

$$\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

即：n阶行列式D等于它的第一行的所有元素与其对应的代

数余子式乘积之和，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \qquad (1\text{—}2)$$

此式亦称为n阶行列式D按第一行的展开式。

§1—2 行列式的性质

一、行列式的基本性质

下述行列式的六条基本性质对n阶行列式都是成立的，在对它们证明时，首先对二阶和三阶行列式进行验证，进而用数学归纳法将它们推广到n阶行列式。

性质1 一个行列式D与它的转置行列式D^T 相等。即

$D=D^T$

证明：二阶行列式显然具有这一性质。下面验证三阶行列式也具有这一性质。

$$\because \quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$\therefore \quad D=D^{\mathrm{T}}$$

在上述 D^{T} 按第一行的展开式中，若将所有二阶行列式取转置，则有

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}$$

$$+a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

故 $$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \qquad (1—3)$$

即三阶行列式 D 等于它的第一列的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和。此式称为行列式 D 按第一列的展开式。

性质1表明了在行列式中，行和列的地位是对称的，因而凡是有关行列式的行的每一个性质，对于列也必然成立，反之亦然。

性质2 交换行列式的任意两行(列),行列式的值变号。

例如交换三阶行列式的二、三行，性质2表明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质2的证明与性质1类似，这里省去了这个过程。

由性质2不难得到如下推论：

推论1 若行列式有一行（列）的元素全为零，则这个行列式之值为零。

事实上，若行列式D的第i行元素全为零，我们将第一行元素与第i行元素交换后所得到的行列式的值与原行列式的值反号，而将D的第一行和第i行交换所得到的行列式，其第一行的元素全为零，故按定义计算其值显然为零，从而行列式D之值为零。

推论2 若行列式有两行（列）的元素完全相同，则行列式之值为零。

这是因为若行列式D的第i行与第j行元素完全相同，则交换这两行元素后得到的行列式仍是D自身，依性质2有

$$D=-D$$

即 $$2D=0$$

于是 $$D=0$$

即有两行元素完全相同的行列式等于零。

性质3 用数k乘行列式任一行（列）的所有元素，等于用数k乘这个行列式。

这里不作详细证明，只扼要叙述其证明要点：

(1) 若用数k乘行列式D的第一行，则用行列式定义按第一行展开，并提出各项的公因子k，即得kD。

(2) 若用数k乘行列式D的第i行，则将所得行列式的第1行与第i行互换后，利用（1）将公因子k提到行列式外，然后再交换行列式的第1行与第i行，即得kD。

性质4 若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则行

列式之值为零。

这是因为，如果行列式有两行的元素对应成比例，不妨设第i行与第j行的元素对应成比例，并假定其比例系数为k，则按性质3可将因子k提到行列式外，于是所得行列式的第i行和第j行的元素对应相同，由性质2的推论2知行列式之值为零，故原行列式亦为零。

性质5 若行列式中某一行（列）的每一个元素都是两数之和，则行列式可写成两个行列式之和，这两个行列式分别以这两数中之一为对应位置的元素，其余位置元素与原行列式相同。

例如三阶行列式的第二行每一个元素为两个数之和，则按性质5有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质5的证明与性质3的证明类似，我们也省略了这个过程。

性质6 将行列式中某一行(列)的k倍加到另一行（列）上，则行列式之值不变。

例如将三阶行列式中的第一行的k倍加到第二行上，按性质6有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

该性质可由性质5和性质 4得到，今以三阶行列式为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质5}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质4}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

以上证明了二、三阶行列式具有上述六条性质，其中我们用行列式的定义验证了性质 1和性质2，当然性质3～性质6也容易用行列式的定义加以验证。

下面证明行列式的上述六条性质对n阶行列式也是成立的。首先需要指出的是，在上面所述性质3～性质 6的证明方

法，原则上也适用于n阶行列式。因此下面只需证明性质1和性质2对n阶行列式也是成立的就行了。

*性质1的证明：用数学归纳法。

(1) 当$n=2$及3时，性质1显然成立。

(2) 假定$n=k-1$及$k-2$时性质1成立，即假定$k-1$及$k-2$阶行列式具有性质1。需要证明当$n=k$时，性质1也成立，即需要证明k阶行列式也具有性质1。证明要点是：先将k阶行列式D_k逐次展开为$k-2$阶行列式，然后经适当的组合，再还原成k阶行列式即得D_k^T。

$$D_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k3} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}-$$

* 内容供选读

$$-\cdots+(-1)^{k+1}a_{1k}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{k,k-1} \end{vmatrix}$$

将上式中除第一个$k-1$阶行列式外的其余的$k-1$阶行列式、按第一列展开为$k-2$阶行列式〔注〕，则上式为：

$$D_k=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\left\{a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k3} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}-a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2k} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k3} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^k a_{k1}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2k} \\ a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,3} & a_{k-1,4} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}\right\}$$

$$+a_{13}\left\{a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}-a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2k} \\ a_{42} & a_{44} & \cdots & a_{4k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k4} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\right.$$

〔注〕因为k-1阶行列式具有性质1，故与二、三阶行列式类似，k-1 阶行列式可以按第一列展开。

$$
+\cdots+(-1)^{k}\alpha_{k1}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2k}\\ \alpha_{32} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k-1,2} & \alpha_{k-1,4} & \cdots & \alpha_{k-1,k}\end{vmatrix}\Bigg)+\cdots\cdots
$$

$$
+(-1)^{k+1}\alpha_{1k}\Bigg(\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3,k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{k,k-1}\end{vmatrix}
$$

$$
-\alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,k-1}\\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \cdots & \alpha_{4,k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{k,k-1}\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+(-1)^{k}\alpha_{k1}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,k-1}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3,k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k-1,2} & \alpha_{k-1,3} & \cdots & \alpha_{k-1,k-1}\end{vmatrix}\Bigg)
$$

$$
=\alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2k}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{kk}\end{vmatrix}-\alpha_{21}\Bigg(\alpha_{12}\begin{vmatrix}\alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k3} & \alpha_{k4} & \cdots & \alpha_{kk}\end{vmatrix}
$$

$$
-\alpha_{13}\begin{vmatrix}\alpha_{32} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k2} & \alpha_{k4} & \cdots & \alpha_{kk}\end{vmatrix}+\cdots+
$$

$$+(-1)^{k}\alpha_{1k}\begin{vmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{k,k-1} \end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$+\alpha_{31}\Bigg\{\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{43} & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{4k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k3} & \alpha_{k4} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}-\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{42} & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{4k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k2} & \alpha_{k4} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{k}\alpha_{1k}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,k-1} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \cdots & \alpha_{4,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{k,k-1} \end{vmatrix}\Bigg\}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k+1}\alpha_{k1}\Bigg\{\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,3} & \alpha_{k-1,4} & \cdots & \alpha_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

$$-\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{32} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,2} & \alpha_{k-1,4} & \cdots & \alpha_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{k}\alpha_{1k}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,k-1} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,2} & \alpha_{k-1,3} & \cdots & \alpha_{k-1,k-1} \end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

将此式k项中每个$k-1$阶行列式取转置后，再将这k项相加，即得D_k^T。故

$$D_k=D_k^T$$

此即当$n=k$时，性质1也成立。从而由数学归纳法可知，当n为任何自然数时性质1成立。

性质2的证明：为简便计，我们仅证明交换行列式的第1、第2行后行列式反号。（至于一般的情形，其证明方法类似。）仍然用数学归纳法。

(1) 当$n=2$时，显然性质2成立。

(2) 假定$n=k-1$时性质2成立。

设交换k阶行列式D_k的第1、第2行后所得的行列式为D_k，将其按第一列展开：

$$\overline{D}_k=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}M_{21}-a_{11}M_{11}+a_{31}(-M_{31})$$

$$+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})$$

$$=-[a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}$$

$$-\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}]$$

$$=-D_k$$