

奥赛·高考全程对接

高三数学

编委会主任 黄儒兰

编委	于海飞	马蕊	王玉梅	王旭增	王凤丽
	王凤霞	王宏燕	王京	王国德	王春燕
	王瑞琪	介金	左丽华	刘建玉	刘跃先
	刘惠斌	孙敏	李双平	余平平	李伟
	李晓东	李晋渊	李菊红	纽方文	陈龙清
	陈虹	郑芝萍	张国平	郁秀萍	范科可
	金梅	郭志刚	俞佳新	贾红军	黄凤圣
	康瑞玉	靳强	景宝琴	董培基	董雪清
	廖康强	熊辉	游海娥	蔡晔	

丛书总策划 蔡晔

本书主编 黄凤圣 于海飞



机械工业出版社

本书以高中三年级教学大纲中的重点、难点和高中竞赛大纲中被加深、拓展的知识点为知识基础。结合涉及到的本年级各类典型竞赛例题,剖析知识的内涵,发掘思维的本质,介绍解决难题的常规方法,归纳发散,培养和训练开放型创新思维,对接历年高考中有关本知识段的“难题”,用奥赛解题思维巧解高考难题,并通过举一反三训练及时巩固,引导创新。

图书在版编目(CIP)数据

奥赛·高考全程对接 高三数学 贛凤圣,于海飞主编 鄧
—北京:机械工业出版社,2003.12
陈景润原书原图原图原图原图

I 鄧 鄧 II 鄧 黄 鄧 鄧 于 鄧 III 鄧 数学课 原高中
原升学参考资料 IV 鄧 鄧

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 000000 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑 鄧 鸥

责任编辑 王春雨

版式设计 郑文斌

封面设计 鞠 杨

责任印制:

印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 12 月第 1 版·第 1 次印刷

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.5 千字

定价:18.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话:(010)68995199

封面无防伪标均为盗版

目 录

前 言

第 一 章	函数综合应用	(页码)
第 二 章	数列综合应用	(页码)
第 三 章	三角综合应用	(页码)
第 四 章	不等式综合应用	(页码)
第 五 章	平面解析几何综合应用	(页码)
第 六 章	立体几何综合应用	(页码)
第 七 章	排列组合、二项式定理综合应用	(页码)
第 八 章	求参数的取值范围	(页码)
第 九 章	数形结合	(页码)
第 十 章	分类讨论	(页码)
第十一章	函数与方程思想	(页码)
第十二章	转化与化归思想	(页码)
第十三章	应用题	(页码)
第十四章	开放性试题	(页码)
第十五章	创新题型	(页码)

注 每章均包含[知识对接]、[经典名题]、[思维发散]、[高考对接]、
[举一反三训练]、[答案与提示]六个板块。

前言

如今,奥林匹克这个名字,已经成为人类最高水平竞赛的代名词,对每一位有竞争意识的人,都充满着无法抗拒的诱惑力。能够得到它的垂青,是一个人一生中无上的荣誉,哪怕是仅仅参与一下都会让人激动不已。

本书编写意图

中学生学科奥林匹克竞赛也是如此。

1959年第一届国际中学生数学奥林匹克竞赛(罗马尼亚)成功举办,拉开了中学生学科奥林匹克竞赛的序幕,紧接着又相继产生了中学生物理(1967年)、化学(1968年)、生物(1969年)、信息学(1989年)等学科奥林匹克竞赛。我国自1956年参加这一赛事以来,取得了辉煌的成绩,为祖国争得了很高的荣誉,同时也使得国内奥林匹克选拔赛轰轰烈烈地开展来。国家的最高教育和科技行政部门也对中学生的各学科奥林匹克的一系列竞赛给予了足够重视。不仅形成了规范的竞赛制度,还制定了与普通教学大纲相衔接的三级竞赛大纲,如此系统的大纲,除高考外还是第一个。

在1999年高考招生过程中,全国一流重点大学及各地招生办对高中应届毕业生的保送资格有如下要求:‘获全国高中数学联赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克联赛、全国中学生生物学联赛,省级赛区一等奖;获全国数学奥林匹克竞赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克竞赛、全国中学生生物学竞赛,全国决赛一、二、三等奖。’而且,对于以上获奖又参加高考的,享有加分的特征加分待遇。

看到以上这段文字,每一位面临高考的同学都不免会怦然心动:既是一种莫大的荣誉,又有实实在在的收获。

但是,要想攀上奥林匹克的高峰可不是一件易事,因为它首先要求同学们在具有扎实的课本知识基础上还要了解知识的更深内涵和更广的外延;其次,还要求同学们具有很强的综合创新解题能力。这两点要求,就目前正常的中学教学和学习深度还是很难达到的。所以还要在学好教学大纲规定的知识和能力同时,进行一些拓展学习和训练。日积月累、循序渐进,把自己也培养成一个“天才”。

如何进行课外拓展学习,不能盲目操作,要有一套科学的方法和计划,还要有一个得力的助手——辅导参考书。否则,会顾此失彼,得不偿失。

另外,奥林匹克竞赛受到如此程度的重视,其最根本原因是各级“奥赛”试题具有很强的创新性、灵活性、综合性。注重考查学生对知识的理解及综合运用能力和思维方法的掌握和创新能力。而这一点恰恰是素质教育的核心内容,也是高考改革的精神实质。

下面是有关 2000 年的高考试卷的一段报道。

“今年的数学题新而不怪,试题难,易拉开档次,每位考生可以根据自己的能力爬台阶式的做题。’高考数学阅卷组组长周兴和教授谈起今年的高考数学显得很有话说。据介绍,今年的数学试卷就连小题目都没有明显的送分题,考查点偏重于知识网络的交汇点。周兴和指出:这张数学试卷是对沉迷于题海战术式教育的一次沉重打击,用常规的课堂教学思维应付这张试卷显然不太够。据了解,从试批的考卷看,考生缺乏开放性思维、应用意识不完美等问题已暴露无遗。”

从以上这段报道,我们可以更清晰的看出学习‘奥赛’的重要性。对比‘奥赛’初赛、复赛大纲和高考大纲,以及历年初赛、复赛试题和高考中的难题、压轴题也不难得出这一结论。因此,我们学习和研究奥林匹克竞赛不光是为了夺取‘奥赛’金牌,更重要的是可以让我们站在一个更高一点的高度俯视普通的中学学习和高考,在学习和应考上能够登上一个新的台阶,更加从容面的对高考的洗礼,取得出色成绩。

基于以上几方面原因,我们编写了这套‘演习奥林匹克,夺取高考高分’奥赛学习辅导丛书,希望能为同学们找到一条通向更大成功

的有效捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于高考水平,不超过奥赛复赛的最高难度,以中学教学大纲中的重、难点和被奥赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础。结合各类典型竞赛例题,剖析知识的内涵,发掘思维的本质,介绍解决难题的常规方法,归纳发散,培养和训练开放型创新思维,对接历年高考中的经典‘拔高’题,用奥赛解题思维巧解高考难题,并通过举一反三训练及时巩固,引导创新。

本书编写形式为讲练结合,重点放在例体讲解上。各栏目所选例题具有典型的代表性,思路剖析透彻,解答过程详尽,点津之笔富有启发性,练习题少而精,能起到举一反三之效果,避免‘偏题’‘怪题’和‘题海战术’。对于较难的练习题,一般会给出全解或解答提示,但这仅作参考。同学们要自己开动脑筋,结合例题,想出自己的解决方案来。

本套丛书涉及数学、物理、化学、生物各科,涵盖中学各个年级,共计 15 分册,知识讲解系统,题型全面,可作为同步辅导教材使用。

本书编写力量

本套丛书由中学教育专家、全国化学教学研究会副理事长、北京化学奥校校长、特级教师黄儒兰担任编委会主任,主持丛书编写工作。

参加本套丛书编写的人员均为来自北京四中、北师大附属实验中学、人大附中、清华附中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京景山中学、北京育英中学、民大附中等一批京城重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练;几位清华大学和北京大学的奥赛保送生和高考理科状元也为本书做了许多有益工作。

由于此书产生于‘非常时期’,时间有限,水平有限,可能存在一些缺憾,请批评指正。

编 者



第一章 函数综合应用



知识对接

员集合、简易逻辑

考试内容：

集合、子集、补集、交集、并集 援

逻辑联结词、四种命题、充要条件 援

考试要求：

(员理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合 援

(圆理解逻辑联结词‘或’、‘且’、‘非’的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义 援

圆函数

考试内容：

映射、函数、函数的单调性 援

反函数、互为反函数的函数图像间的关系 援

指数概念的扩充、有理指数幂的运算性质、指数函数 援

对数、对数的运算性质、对数函数 援

函数的应用举例 援

考试要求：

(员了解映射的概念，理解函数的概念 援

(圆了解函数的单调性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性的方法 援

(猿了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数 援

(源理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像和性质 援

(缘理解对数的概念，掌握对数的运算性质，掌握对数函数的概念、图像和性质 援





(这能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题援



经典名题

例 5 (1985年全国高中数学竞赛) 求集合

$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0, x^2 - 4 \leq 0\}$ 的真子集的个数援

【解答】

$$\begin{aligned} & \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0, x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1, -2 \leq x \leq 2\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\} \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

此集合中元素个数为 ∞ 故其真子集个数为 $(2^{\infty} - 1)$ 个援

例 6 (1985年全国高中数学竞赛) 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, 求

$A \cap B$, 判断 A 与 B 的关系援

【解答】 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

又 $A \subseteq B$
故 $A \subseteq B$

例 7 设 $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 4$, 求证: 若 $f(x) \leq 0$, 则 $g(x) \leq 0$ 援

【解法一】 如果存在实数 x 使 $f(x) \leq 0$ 且 $g(x) > 0$ 成立, 那么就一定存在整数 m 和 n 使 $(m, n) \in (f(x) \leq 0, g(x) > 0)$, 即

$$m^2 - 1 \leq 0, n^2 - 4 > 0$$

也就是存在整数 m 使得 $m^2 - 1 \leq 0$ 且 $n^2 - 4 > 0$

如果存在实数 x 使 $f(x) \leq 0$ 那么必有 $m^2 - 1 \leq 0$

因此, 实数 x 满足

$$\begin{cases} m^2 - 1 \leq 0, n^2 - 4 > 0 & (1) \\ m^2 - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$



①式表明点 P 在直线 $z = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$ 上, 设原点到直线的距离为 d , 于是 $d = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$. 等号只在 $z = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$ 时成立, 而 z 在故等号不能成立, 因此 $d < \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$.

因为点 P 在直线 z 上, 点 P 到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2} \geq d$. 这使 $\sqrt{a^2+b^2} \leq d$ 不可能成立.

所以不存在实数 a 与 b 使式①与式②同时成立. 由此不存在 a 与 b 使 $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}) \leq d$ 且 $(a, b) \in D$.

【解法二】 由解法一中式①得, $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$. 代入式②整理得到关于 a 的不等式

$(a^2+b^2) - \frac{1}{4}(a^2+b^2) \geq 0$ ③
它的判别式

$$\Delta = b^2 - 4a^2$$

由于 a 在 $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$ 上, 则 $\Delta \geq 0$.

又 $a^2+b^2 \geq 0$, 故不存在实数 a 与 b 使式③成立. 这表明不存在实数 a 与 b 使式①与式②同时成立.

【解法三】 如果存在整数 a 和 b 满足题意, 由解法一中式①知, 必存在整数 c 使 $\sqrt{a^2+b^2} = c$. 这个关于 c 的方程的判别式 $\Delta = c^2 - 4a^2$. 由式②得 $\sqrt{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$. 所以 $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$, 即 $(\sqrt{a^2+b^2})^2 \leq (\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}))^2$. 得 $\sqrt{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$.

当 $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$ 时, $\sqrt{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$ 的等号也应成立, 于是 $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$ 而 $\Delta \geq 0$ 即为 $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$. 所以 $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$. 此时 $\Delta = c^2 - 4a^2$ 不是整数.

所以不存在 a 与 b .

【点津】 三种解法都是出于对式①与式②的不同处理手法, 特别是对式①的不同认识. 将 a 与 b 看成坐标变量时, 式①成为直线方程, $\sqrt{a^2+b^2}$ 是点 (a, b) 到原点的距离. 将式①中的 a 看作变量, 就成为关于 a 的一元二次方程. 将式①中的 b 作为变量, 得到关于 b 的一元二次方程. 由此分别得出三种解法.

例 1 (题源 上海市高中数学竞赛) 设 $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})$ ($x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), 且 $f(x)$ 是奇函数, $f(x)$ 是偶函数, 求 $[f(x)]^2$ 原





[早曾] 援

【解答】 由于 零曾是奇函数, 所以 零原曾 越原零曾, 早曾是偶函数, 早原曾 越早曾 援在 零曾 垣早曾 越 $\sqrt{\frac{\text{零曾}^2 + \text{早曾}^2}{2}}$ 中用 原曾代替 曾得 原零曾 垣早曾 越 $\sqrt{\frac{\text{零原曾}^2 + \text{早原曾}^2}{2}}$, 通过解方程组得

$$\text{零曾} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\text{零原曾}^2 + \text{早原曾}^2}{2}}$$

$$\text{早曾} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\text{零原曾}^2 + \text{早原曾}^2}{2}}$$

通过化简易得 [零曾] 原 [早曾] 越原零曾 (曾 (原 $\frac{\pi}{2}$ 原 $\frac{\pi}{2}$))

例 参 (员圆 上海市数学竞赛) 已知函数 零曾 越曾 原曾 垣圆 曾 越 [贼 贼 员] 的最小值是 早 急 援写出函数 零越早 贼 的解析表达式 援

【解答】 零曾 越 (曾原员) 垣员 曾 越 [贼 贼 员] 援

(员当 贼 越 贼 员 即 圆 越 贼 员 时, 零曾在 [贼 贼 员] 上的最小值 早 贼 越零员 越员 援

(圆当 员跃贼 员 即 贼约圆 时, 零曾在 [贼 贼 员] 上的最小值 早 贼 越零贼 垣员 越圆 援

(猿当 员约贼 即 贼约员 时, 零曾在 [贼 贼 员] 上的最小值 早 贼 越零贼 越 (贼原员) 垣员 援

综上所述

$$\text{零越早 贼} \begin{cases} \text{贼垣员} & (\text{贼约} \\ \text{员} & (\text{圆} \leq \text{贼} \leq \text{员}) \\ (\text{贼原员}) 垣员 & (\text{贼约} \end{cases}$$

【点津】 对于二次函数在闭区间 [皂, 灶] 上的最值, 要分析对称轴 曾 越原 遭 是否经过此区间, 然后用函数的单调性解题 援

例 远 (员圆 上海市数学竞赛) 已知函数 零曾 定义在非负整数集上, 且对于任意正整数 曾 都有

$$\text{零曾} \geq \text{零曾原员} \text{ 垣 } \text{零曾垣员}$$

若 零圆 越员 圆 求 零员 圆 援

【解答】 因为对任意正整数 曾 有



$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

所以

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \\ x_1 &\leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \end{aligned}$$

将上面三式相加,得

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

以 x_1 代替 x_2 得

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

从而

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

即 x_1 是以 2π 为周期的周期函数,因此

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$$

例 1 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 满足 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, 对于任意实数 x 都有 $f(x) \geq 0$ 并且当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $f(x) \leq \frac{1}{4}$

(1) 求 a 的值;

(2) 证明 $f(x) \leq \frac{1}{4}$

(3) 当 $x \in [0, 1]$ 时, 函数 $f(x)$ 是单调的, 求证 $f(x) \leq \frac{1}{4}$

【解答】 由题意对于任意实数 x 都有 $f(x) \geq 0$

亦 $a \geq 0$

又当 $x \in [0, 1]$ 时, 有

$$f(x) \leq \frac{1}{4}$$

亦 $a \leq 1$

亦 $a \leq 1$

【证明】 由 $f(0) = 1$ 得 $c = 1$ ①

由 $f(1) = 0$ 得 $a + b + c = 0$ ②

由式①式②得 $b = -a - 1$

又由题意知, 对任意实数 x 都有 $f(x) \geq 0$ 即 $ax^2 + (a-1)x + 1 \geq 0$

亦 $\Delta \leq 0$ 且 $a \geq 0$





即 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 从而 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 获证援

(猿[证明] 疫 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ 伊 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$

又 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$

亦 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$

亦 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$

亦 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 原 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$ [$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($\frac{f(x)}{g(x)}$)] 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$

疫 当 $\frac{f(x)}{g(x)}$ [原 $\frac{f(x)}{g(x)}$] 时, 函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是单调的,

亦 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{f(x)}{g(x)}$

解得 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{f(x)}{g(x)}$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)}$



思维发散

关于函数的单调性

(员复合函数的单调性 若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 早曾在区间 $[\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}]$ 上单调, 而 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 $[\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}]$ 上单调, 且 $[\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}] \subseteq [\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}]$ 或 $[\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}] \subseteq [\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}]$, 则函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 早曾在 $[\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(x)}{g(x)}]$ 上也单调, 根据增、减函数的定义, 易证得, 若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 都是增(或都是减)函数, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 为增函数援

(圆判断函数单调性的方法有: ①根据定义(注意, 几乎所有资料总错误地将用定义证明等同于求差比较法: $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$ 跃园或 $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$ 约园); ②根据图像; ③利用已知函数的单调性; ④利用复合函数的单调性援

关于函数的奇偶性

(员要注意: ①奇、偶函数的定义域须关于原点“对称”(必要条件); ② $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是恒等式援

(圆用定义判定、证明奇偶性, 可根据具体函数在化简、变形中的需要, 采取① $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$; ② $\frac{f(x)}{g(x)}$ 依 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越园; ③ $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($\frac{f(x)}{g(x)}$ 原 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 园) 等等价手段援

(猿可以用图像的对称性作判断: 一函数为奇(偶)函数的充要条件是其图像关于原点(赠轴)对称援

(源易证得, 函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 既是奇函数又是偶函数的充要条件是 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 越园

(恒等式),且定义域关于原点对称

函数的图像变换

(1) 平移变换

函数 $y=f(x)$ 的图像

当 $a>0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位得到函数 $y=f(x+a)$ 的图像

当 $a<0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $|a|$ 个单位得到函数 $y=f(x-a)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 的图像

当 $b>0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像向上平移 b 个单位得到函数 $y=f(x)+b$ 的图像

当 $b<0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图像向下平移 $|b|$ 个单位得到函数 $y=f(x)+b$ 的图像

(2) 翻折变换

函数 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称

函数 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称

函数 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图像关于原点对称

函数 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 的图像位于 y 轴右边的图像不变,且关于 y 轴对称,所得图像为 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 的图像

函数 $y=f(x)$ 在 x 轴上边的图像不变,且其下边的图像关于 x 轴对称,所得图像为 $y=f(x)$ 的图像

例 1 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,且满足 $f(x+2)=f(x)$,求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式

【解答】 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式为 $y=f(x)$

当 $x \in [-1,1]$ 时,有 $f(x+2)=f(x)$

亦当 $x \in [1,3]$ 时,有 $f(x)=f(x-2)$

故 $f(x)$ 为偶函数,且 $f(x+2)=f(x)$



亦 麥原曾原圓 越麥曾圓 越麥曾

亦 当 曾 (原遠 原園时, 零曾 越圆^{原曾原園}垣援

例 4 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 恒有 $f(x) + f(x+1) = 1$, 则下列关于 $f(x)$ 奇偶性的判断中, 正确的是 ()

粤题曾为奇函数

月鑒曾为偶函数

忧鬱曾为奇函数或偶函数

閱圖表會可能既不是奇函数,也不是偶函数

【解答】 取 零 會 越 $\begin{cases} \text{員} & (\text{會} \Rightarrow \text{願}) \\ \text{願} & (\text{會} \Rightarrow \text{願}) \end{cases}$

显然 φ 不满足 $\varphi(-x) = \varphi(x)$ 或 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ 而由其图像(如图 1.1.1 所示)知, φ 既不是奇函数,也不是偶函数,故选 D.

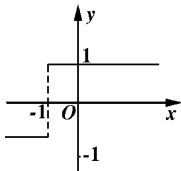


图 员源

【点津】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ 得出 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 后,一般会错选为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 为奇函数或偶函数。注意,这里仅表明在 $x \rightarrow 0$ 时,恒有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$,而不是恒有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 或恒有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 。

高考对接

例 5 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 且 $A \cap B = \{1\}$, 则实数 a 组成的集合是 $\{1\}$.

【思路导航】由已知集合 粤越圆猿 , 因 粤 是圆的一次方程的形式, 显然 $\text{粤} \neq \text{月}$, 又 $\text{粤} \neq \text{月}$ 越 粤 故 $\text{月} \neq \text{粤}$ 是有如下解法:

【解法一】 由已知可知 月_C 粤所以,月越靑或月越園或月越猿
当 月越靑时,皂越园

当月越圆时,圆皂垣员越园解得 皂越原^员/_圆

当 月越 猿时,猿皂垣员越园解得 皂越原猿

亦 皂的值组成的集合是 $\left\{ \text{园原员, 原猿} \right\}$

【解法二】若 月越競时,皂越园

解得 原灵约皂约员

【点津】(员虽然一般性的方程 恒成立(为正常数)没有公式解,但作为选择题总可将选项代入而求解援

(因此题解法实质上是求相关点的轨迹,须注意,不可将(造曾造与方程中要求的 曾混淆援

例 远 (员若函数 恒成立(为正常数)的定义域为 求实数 的取值范围援

(因此函数 恒成立(为正常数)的值域为 求实数 的取值范围援

【解答】(员函数 恒成立(为正常数)的定义域为 求

即 恒成立(为正常数)恒成立

此时不等式左边若不是二次函数

即 恒成立显然 恒成立不能恒成立

因此,左边一定是二次函数

即 恒成立且 $\Delta \leq 0$ 进而可求得 的取值范围为 (为正常数)

解得: $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

(因此因为函数 恒成立(为正常数)的值域为 求

则有 恒成立一定有实根

因此 由 $\Delta \geq 0$ 即 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

解得 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

【点津】(员已知定义域为全体实数,是在 恒成立(为正常数)恒成立的情况下恒成立,即该一元二次不等式的解为全体实数,特别注意,

恒成立时,恒成立对 来说是有限制范围的,并根据二次函数图像判定条件为: $\Delta \leq 0$ 恒成立

(因此这是一道值域的应用题

设 恒成立(为正常数)值域为 依题意应有 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \subseteq$ 函数 恒成立(为正常数)恒成立应与 轴有交点,即 恒成立(为正常数)恒成立有实根,即 $\Delta \geq 0$ 从而得到 的取值范围援

例 近 (员已知 恒成立(为正常数)恒成立,则 恒成立