高等院校金融学系列教材

寿险精算数学教程

艾洪德　总主编
刘　波　编　著

立信会计出版社

书　　名：寿险精算数学教程
作　　者：艾洪德
出 版 社：立信会计出版社
出版日期：2006年7月
ISBN：7-0278-1667-X/F1493

总　　序

金融是现代经济的核心。我国经济从计划经济向市场经济的转轨已历时二十余年,实现这一转轨的目的就在于充分发挥市场在资源配置中的基础性作用,实现资源的优化配置。与计划经济体制下的行政调拨和使用票证等资源配置方式显著不同的是,市场经济是一种交换经济,要获得别人拥有所有权的资源,就必须遵循等价交换原则,即突出体现为"物随钱走"。因此,在市场经济体制下,实现资源优化配置的前提是实现资金的优化配置。以资金配置为核心功能的金融体系(包括金融机构体系和金融市场体系)对资金配置的合理性和效率,决定了一个社会对资源配置的合理性和效率。这也正是我国在深化社会主义市场经济体制改革的同时,不断深化金融体制改革的目的所在,即通过构建一个发达、完善、高效的金融体系,实现对市场经济体制下最稀缺资源——资金的优化配置,进而实现整个社会对资源的优化配置。

在我国金融体制改革不断深化的背景下,金融业已经并将继续发生深刻的变革,无论是以商业银行为主体的金融机构体系,还是以资本市场和货币市场为主体的金融市场体系,在取得长足发展的同时,无论在运营体制还是在业务种类等方面都有了质的变化。从适应社会主义市场经济体制不断深化所产生的全新的金融服务需求角度考虑,我国的金融服务供给也必将发生全新的变化,作为金融服务供给主体的金融体系的变革已成必然。而金融服务供给变革的一个重要方面就在于金融从传统的"融资"向现代的"融智"的变迁,即从传统的融通资金向现代的融通智慧的变迁,微观经济主体对金融服务的需求已不再仅仅局限于资金数量,更重要的是资金效率(节约财务成本,低成本高效率地融通与运用资金)。正如任何事物都包括数量和质量两个方面一样,资金数量和资金效率同样重要,而在现代经济条件下,资金效率问题已经取代资金数量问题成为现代企业最为关心的问题。

21世纪是开放经济的时代。伴随着我国加入WTO时间的推移,我国经

济的开放程度不断深化,融入国际社会的进程也将进一步加快,作为现代经济核心的金融必然处于经济对外开放的核心和前沿。同时,21 世纪也是知识经济的时代,知识成为决定经济增长的生产要素之一,人力资本在经济增长中的作用日益凸显。在经济全球化的时代,各国经济实力和综合国力的竞争日趋激烈,未来的竞争将是人才的竞争。培养富有创新精神和能力的人才已成为 21 世纪实现中华民族的伟大历史复兴的关键,这也正是我国 20 世纪 90 年代提出并实施科教兴国战略的意义所在。

基于以上背景,具体到金融业而言,培养适应我国金融业全新变革、开放经济和知识经济要求的金融人才,不仅关系到我国金融业的未来,也关系到我国经济的未来。而在人才的培养中,教育至关重要。

教育是对人的教育,而不是对技艺的教育,如果教育不传授精神,培养出来的学生只会成为工具。正如雅斯贝尔斯在《什么是教育》中所论述到的:“教育是人的灵魂的教育,而非理性知识和认识的堆积。”教育家斯金纳曾说:“如果我们将学过的东西忘得一干二净时,最后剩下来的东西就是教育的本质了。”这一系列关于教育的论述无疑为我们反思和改革我国现在的高等教育尤其是金融教育指明了方向。正如俗语所言,“授之以鱼,还是授之以渔”,我国现在的高等教育在某种程度上更多地强调的是前者而不是后者。而要实现教育的根本变革,教师在其中的作用至关重要。教师的教学工作的核心并不仅仅是知识的简单传授,而是对学生创新能力的培养和创新思维的塑造。唯有如此,才能培养出适应未来需要的真正的人才,否则,真会出现“用过去的知识,教现在的学生,去面对未来的问题”的教育悲剧。

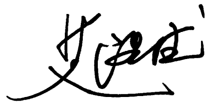
我国著名教育家梅贻琦在 1931 年就任清华大学校长时发表的就职演说中关于大学的论断,“大学者,非谓有大楼之谓也,有大师之谓也”,无疑为教师在大学教育中的重要性提供了最为有力的论证。作为大师,最为重要的莫过于学术思想,而学术思想需要有效的承载体,学术论文与专著无疑是一种有效的承载体,但论文和专著更多地体现的是理论研究的成果,集理论研究成果与教学实践经验为一体的教材无疑是更为适合教育需要的学术思想的有效承载体。

基于此,东北财经大学与立信会计出版社决定组织一批在金融学领域既有深厚理论造诣,又有丰富教学经验的教师,策划并出版“高等院校金融学系列教材”丛书。这不仅能反映金融学科领域的最新研究成果,充分展现教师的

学术水平,又能引导更多的学生沿着正确的学术方向步入所向往的科学殿堂,以推动我国高等金融学教育事业的发展,培养更多的创新型、开放型金融人才,为我国金融业的健康发展,进而为我国经济的健康发展和持续繁荣提供有效的人才保障。

中国的金融业正在发生全新的变革,金融学研究和教学也必须适应金融业的变化作出相应的调整,而作为金融学理论研究成果、金融体制改革实践和教学实践经验总结的教材也就必须不断地进行修订和完善。因此,本套丛书的出版之日,也就是对其进行进一步修订和完善的开始之日。除了源于上述要求的修订和完善之外,来自国内外同行,尤其是本套丛书的使用者,包括教师、学生和其他使用者的建议和意见,无疑也将是我们对其进行进一步修订和完善的重要依据。因此,我们衷心欢迎来自国内外同行的有关本套丛书的建设性意见和建议,我们深信,唯有集思广益,海纳百川,方能成就大业。

东北财经大学校长、教授、博士生导师



序

精算是以数学、统计学、人口学、金融学、保险学等学科为基础,研究保险乃至金融业经营各个环节的数量分析,为金融企业良好运作、制定决策提供科学依据和工具的一门学科。精算在保险业中占据举足轻重、不可替代的地位。每家规范运作的保险公司都必须有若干名取得专业资格的委任精算师。精算师是在保险公司专司精算职责的人,他们对于保险公司的财务安全负有重要责任。精算师的工作不仅代表保险公司的利益,保持保险公司长期稳定运作,更重要的是,其最终目的在于维护广大保户的利益乃至社会公众的利益。

精算技术和精算方法是从 1988 年开始引入我国的。随着寿险业的发展,特别是我国加入 WTO 之后,对精算人才的需求极为迫切。在我国推出精算师考试制度后,众多有志于从事保险、金融和投资的有识之士对精算学的学习倾注了巨大的热情和精力。

然而,对于精算学这门相对艰深、需要较深厚的数学功底的课程,且由于十几年来国内出版的各种精算教材良莠不齐、模仿过重、创新不足,致使学生在学习过程中总会强烈地感受到或多或少、体会不一的难度。

本书的编著者刘波是东北财经大学培养起来的从事精算教学的骨干之一,他在十余年的精算教学过程中积累了丰富的经验,对于如何使学生由不喜欢到喜欢、由畏难到乐观、由不懂得到懂得精算有深刻的了解和认识。他不断探索新颖的教学方法,以达到使学生系统、扎实地掌握精算学的目的。本书是他在充分借鉴国内外寿险精算教材的基础上,结合多年教学经验编写而成的,其内容深入浅出,图文并茂,强调知识点的系统性、有机性、连贯性和协调性。因此,本书是近些年来难得出现的较好教材,对于从事精算教育、学习精算理论和技术,特别是参加精算师考试的人士必定有很大的裨益。

我很感欣慰的是，本书的编著者刘波在精算教育上作出了有益的探索，并希望有更多的人加入到精算教育研究队伍中来，有的放矢地编写受学生欢迎的、适用性强的教材，为有力推动中国的精算教育作出努力。

东北财经大学校长、教授、博士生导师

2006年7月

前　言

《寿险精算数学教程》是全面讲述寿险精算基础理论的专业教材。本书的写作参考了中国精算师考试的内容要求,力求叙述完整、详细、深入浅出。

本书是在尽可能多地吸收国内外一些经典精算教材精髓的基础上,结合编著者十余年的教学经验编写而成的。本书的特点是:

(1) 采用大量的图表直观地展示精算思想和计算方法,以使读者通过阅读图表深入领会计算过程。

(2) 强调寿险精算的重要知识点之间的密切联系,并首创性地将寿险精算的重要量值关系以框图的形式表示,以使读者对重点章节所阐述的理论的有机联系有环环相扣之感,避免割裂的、无逻辑的理解。

(3) 适时加入以领会本质为目的而非以演练为目的的例题,以使读者掌握计算公式的本质,而不是死记硬背计算公式。

书后一百多道难易不一的配套习题,供读者演练以强化计算技能。

本书适合保险学及金融学等相关专业学生学习使用,对参加精算师考试的学生亦有很大的帮助作用。

本书由东北财经大学金融学院刘波主编,编写第二章至第十一章;康书隆参编,编写第一章。全书由刘波总纂。

书中难免存在疏漏之处,敬请读者予以指正。

编著者

2006 年 7 月

目　　录

第 1 章　利息度量与确定年金

寿险精算理论的基本要素是利率、死亡率和费用。在开始讨论寿险精算数学的内容之前,本章作为后续章节的知识铺垫,介绍涉及利率的定量度量问题,对由利率因素决定的单笔或多笔支付的资金计算的各种情况进行讨论,然后讨论确定年金的计算。

1.1　利息度量

所谓利息,是指在一定时期内,资金拥有人将使用资金的自由权转让给借款人后所得到的报酬。利息是债务人(Borrower)对债权人(Lender)因为资金被借用而牺牲了当前消费以及对其面对的机会成本的一种补偿。经济学和货币银行学等课程讨论的是利息是如何形成的,以及分析决定利息多少的具体因素。与此不同,本章假定存在于债权人和债务人之间的利息是一种既定的事实,并在此基础上分析债权人和债务人之间的权利与义务的关系。度量利息的尺度是利率,利率的高低反映了债务人借用债权人资金的成本。

1.1.1　积累函数与金额函数

通常,一笔资金经过一段时间的投资之后会产生利息。例如,某人将 10 000 元存入为期 5 年的储蓄账户,5 年后该账户内有款 10 500 元。这笔 10 000 元的初始投资金额称为本金(Principal),5 年后账户内的总金额 10 500 元称为积累值(Accumulated Value),而积累值与初始投资额的差额 500 元(10 500－10 000)就是利息(Interest)。

我们利用积累函数(Accumulate Function)和金额函数(Amount Function)来度量利息。

定义积累函数 $a(t)$为从时刻 0 投资 1 单位本金,经过时间 t 后的积累值。显然,积累函数 $a(t)$满足 $a(0)=1$。为了使所研究的问题得到简化,通常我们假定 $a(t)$是连续的、递增的函数。

定义金额函数 $A(t)$为从时刻 0 投资若干单位的本金,经过时间 t 后的积累值。显然,金额函数 $A(t)$满足 $A(t)=A(0)\cdot a(t)$,即积累函数是金额函数本金取 1 时的特例。如果在时刻 0 投资 $A(0)$,在$[t_1, t_2]$内积累的利息为 $I(t_1, t_2)=A(t_2)-A(t_1)$。

【例 1】　已知积累函数 $a(t)=kt^2+m$,其中 k 和 m 为常数。如果在时刻 0 投资 100

元,到时刻 3 可以积累到 172 元。那么,如果在时刻 5 投资 200 元,到时刻 10 的积累值是多少?

解:根据 $a(0)=1$ 可知 $m=1$,于是 $a(t)=kt^2+1$。再根据 $172=100(k\times 3^2+1)$,得到 $k=0.08$,于是 $a(t)=0.08t^2+1$。

现在假设本金从时刻 0 的 $A(0)$ 积累到时刻 5 的 200 元,则 $200=A(0)(0.08\times 5^2+1)$,得 $A(0)=200/3$。于是在时刻 5 投资的 200 元到时刻 10 的积累值可以视为在时刻 0 投资 200/3 元到时刻 10 的积累值,即 $(200/3)\times(0.08\times 10^2+1)=600$ 元。

或许有人会认为,在求得 k 和 m 值后,只需做如下计算:$200\times[0.08\times(10-5)^2+1]=600$ 元。其结果恰巧相同,但计算过程是错误的。因为,尽管在时刻 5 投资的本金是 200 元,但 $a(t)=0.08t^2+1$ 的含义却是在时刻 0(绝不是时刻 5)投资 1 单位到时刻 t 的积累值。

如果非要将投资 200 元的时刻确定为新坐标系下的时刻 $s=0$,则必须确定新的积累函数 $\tilde{a}(s)$,这里 $s=t-5$。由于在 $t=5$ 时刻投资 1 单位相当于在 $t=0$ 时刻投资的 $1/(0.08\times 5^2+1)=1/3$,所以 $\tilde{a}(s)=\frac{1}{3}\times[0.08(s+5)^2+1]$,它显然满足 $\tilde{a}(0)=1$。这样本题的解是 $200\tilde{a}(5)=(200/3)\times(0.08\times 10^2+1)=600$ 元。

如果将本题中的条件"如果在时刻 0 投资 100 元,到时刻 3 可以积累到 172 元"改为"如果在时刻 0 投资 100 元,到时刻 3 可以积累到 181 元",则错误算法的结果为 650 元,正确算法的结果为 615.38 元。

1.1.2 实际利率

实际利率(Effective Rate of Interest)是利息的常用度量方法之一。它是指在某计息期间初投资某本金,在该计息期间内所获得的利息与该本金之比。利率常以符号 i 来表示。定义中的计息期间可以是日、月、季或年,甚至是 10 年等等,不过从理论上讲,计息期间可以任意时间单位来度量。当然,最常用的计息期间是 1 年。

根据定义,

$$i=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=a(1)-1$$

如果存在一系列的计息期间(如每年计息一次)$1\sim n$,那么第 k 个连续计息期间的实际利率为

$$i_k=\frac{A(k)-A(k-1)}{A(k-1)}=\frac{a(k)-a(k-1)}{a(k-1)};k=1,2,\cdots,n$$

如果变形为

$$A(k)=A(k-1)(1+i_k)$$
$$a(k)=a(k-1)(1+i_k)$$

则以上两式表明了当期(第 k 期)期末积累值与其期初投资金额之间的关系。

1.1.3　复利与单利

进一步考虑公式 $A(k)=A(k-1)(1+i_k)$ 或 $a(k)=a(k-1)(1+i_k)$。如果将上期的积累值(本息和)自动作为当期的本金,则每期所生利息都会自动实现再投资以得到更多的利息,这就是众所周知的复利(Compound Interest)理论。如果我们从 $k=n$ 开始递推,则

$$\begin{aligned} a(n) &= a(n-1)(1+i_n) \\ &= a(n-2)(1+i_{n-1})(1+i_n) \\ &= \cdots \\ &= a(0)(1+i_1)\cdots(1+i_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+i_k) \end{aligned}$$

特别地,当每期利率为常数(称为常数复利)时,

$$a(n)=(1+i)^n \tag{1.1}$$

因此,我们常称 $1+i$ 为积累因子,它表示资金经历一个计息期间的增值情况。

与复利方式不同的另一种利息度量方法是单利(Simple Interest)方式。在单利积累方式下,每期所生利息不会自动计入下期本金,也就是说,每期所生利息总是在最初投资金额(原始本金)的基础上产生的。如果原始本金为1单位,第 k 期期末的积累函数为

$$a(k)=1+i_k;k=1,2,\cdots,n$$

于是

$$a(n)=1+\sum_{k=1}^{n}i_k$$

特别地,当每期利率为常数(称为常数单利)时,

$$a(n)=1+ni \tag{1.2}$$

比较式(1.1)和式(1.2)可以看出,当总投资期间(计息期间数)和利率相同的条件下,复利作用下的资金积累程度大于单利作用下的情形。这就是复利所谓的"利上有利"、"利滚利"与单利所谓的"利上无利"的区别。复利与单利下资金积累过程比较,如图1.1所示。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & & & n-1 & & n \\ 1 & \rightarrow & (1+i) & \rightarrow & (1+i)^2 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & (1+i)^{n-1} & \rightarrow & (1+i)^n \\ 1 & \rightarrow & 1+i & \rightarrow & 1+2i & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & 1+(n-1)i & \rightarrow & 1+ni \end{array}$$

图1.1　复利与单利下资金积累过程比较

现在我们引进"现值"和"折现"的概念。我们经常需要计算某人在开始时应投资多少,才能在一个计息期间结束后获得1单位的积累资金。显然,答案是 $1/(1+i)$。为此,

我们定义符号 v,使 $v=1/(1+i)$,称 v 为折现因子。折现的含义是将一笔投资资金在计息期末的值换算到它在该计息期初时的价值。换算后的结果称为现值,即未来 1 单位金额的资金的现值等于 v。同样的概念也可以扩展到有多个计息期间而按复利计息的情形,未来 n 个计息期间末的 1 单位金额的资金的现值等于 v^n,如图 1.2 所示。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & & & n-1 & & n \\ v^n & \leftarrow & v^{n-1} & \leftarrow & v^{n-2} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & v & \leftarrow & 1 \end{array}$$

图 1.2　复利下资金折现过程

现值和折现的概念在寿险精算中非常重要,掌握好这个概念有利于理解保费与给付金额之间的关系。

1.1.4　实际贴现率

实际利率是关于期末支付利息的度量,而实际贴现率则是关于期初支付利息的度量。

实际贴现率(Effective Rate of Discount)是指一个计息期间内取得的利息金额(有时称为贴息)与期末投资金额之比,常以 d 来表示。该定义中没有使用“本金”这一术语,因为本金是期初投资金额,不是期末投资金额。

实际利率与实际贴现率的本质差别在于:利息按期初金额计算而在期末支付;贴息按期末金额计算而在期初支付。在实务中,如果可以利用实际利率和实际贴现率来同时度量某一投资过程,则它们反映同一个问题的两个不同的侧面。实际利率用来度量借款人到期偿还利息额的大小,而实际贴现率用来度量借款人为了到期清偿本金,而在借款之初支付的利息。

如果存在一系列的计息期间(如每年计贴息一次)$1\sim n$,那么第 k 个计息期间的实际贴现率为

$$d_k=\frac{A(k)-A(k-1)}{A(k)}=\frac{a(k)-a(k-1)}{a(k)};\ k=1,2,\cdots,n$$

如果变形为

$$A(k)=A(k-1)(1-d_k)^{-1}$$
$$a(k)=a(k-1)(1-d_k)^{-1}$$

则以上两式表明了当期(第 k 期)期末投资金额与期初投资金额之间的关系。

由于第 k 期的贴息与利息的计算公式同为 $A(k)-A(k-1)$,所以利息和贴息这两个术语可以在包含贴现率的场合通用。

复利理论也可应用于贴现的情形。对于有多个连续计息期间的情况,则

$$\begin{aligned} a(n)&=a(n-1)(1-d_n)^{-1} \\ &=a(n-2)(1-d_{n-1})^{-1}(1-d_n)^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots \\
&= a(0)(1-d_1)^{-1}\cdots(1-d_n)^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(1-d_k)^{-1}
\end{aligned}
$$

特别地,当每期贴现率为常数(称为常数复贴现率)时,

$$a(n)=(1-d)^{-n}$$

【例 2】 作为比较,考虑以下两种情况:

(1) 张三以实际利率 6%向某银行借款 100 元,为期 1 年;

(2) 李四以实际贴现率 6%向另一家银行借款 100 元,为期 1 年。

试分别计算两人所付利息。

解:张三将在 1 年后向银行支付利息 6 元(100×6%),加上本金,共计 106 元。由于李四以贴现方式借款,银行预收 6%的利息(严格称贴息),即 6 元(100×6%),而在 1 年后,李四将向银行支付借款额 100 元。张三在未来 1 年内有 100 元可用,而李四在未来 1 年内只有 94 元(100-6)可用。

[例 2]告诉我们一个道理,实际利率 6%与实际贴现率 6%的作用并不等价。尽管表面上看,前者的效果是产生利息 6 元,后者的效果是产生贴息 6 元,借款人都须支付 6 元,但支付 6 元金额的发生时刻不同,导致借款人在借款期间内所持有的可利用资金金额不同。因而实际利率 6%与实际贴现率 6%实际上度量了不同投资活动的效果。

但对于同一投资活动,实际利率与实际贴现率之间存在着一个确定的关系,称为等价关系。我们将[例 2]做一下修改,给出[例 3]。

【例 3】 考虑以下两种情况:

(1) 张三以实际利率 $i=6\%$向银行借款 100 元,为期 1 年;

(2) 李四以某实际贴现率 d 向同一银行借款 100 元,为期 1 年。

试计算实际贴现率 d。

解:张三将在 1 年后向银行支付利息 6 元(100×6%),加上本金,共计 106 元。由于李四以贴现方式借款,银行预收利息(严格称贴息)$100d$ 元,而在 1 年后,李四将向银行支付借款额 100 元。

张三在未来 1 年内有 100 元可用,而李四在未来 1 年内只有 $100(1-d)$元可用。由于同一银行不可能仅仅因计息方式不同而使两人的借款出现差别,因而若将李四的借款活动换算为按实际利率计息,则应该等于张三的借款利率 i,即 6%。于是

$$\frac{100d}{100(1-d)}=i=6\%$$

解得 $d=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{6}{106}=5.66\%$。

根据对[例 3]的理解,我们得出实际利率和实际贴现率之间的等价关系:

$$i=\frac{\text{利息}}{\text{期初金额}}=\frac{d}{1-d}$$

$$d=\frac{\text{贴息}}{\text{期末金额}}=\frac{i}{1+i}$$

据此，我们给出实际利率、实际贴现率、积累因子和折现因子之间的等价关系：

$$1-d=v=\frac{1}{1+i}$$

按 i 积累和按 d 贴现的直观图示，如图 1.3 所示。

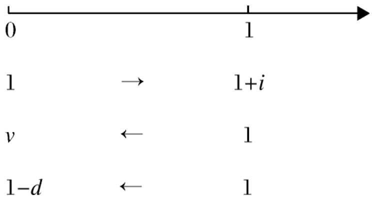


图 1.3　复利下资金积累与折现过程比较

1.1.5　名义利率和名义贴现率

前面我们讨论了实际利率和实际贴现率，“实际”一词的含义主要在于利息（或贴息）在每个计息期间支付一次（或在期初，或在期末）。然而，实务中常常要求一个计息期间支付多次利息或多个计息期间支付一次利息。例如，住房贷款需要每月向银行还款，而贷款利率是以年利率表示的，这时需要把年利率转化为等价的月利率。

举例说明，如果需要将年实际利率 6%转换为等价的月实际利率（以 j 表示），在复利下，由于按 6%一年计息 1 次等价于按 j 一年计息 12 次，必有 $1+6\%=(1+j)^{12}$，所以与 6%等价的月实际利率 $j=0.4868\%$。

反过来的例子是，如果已知月实际利率为 0.5%，与其等价的年实际利率 i 必然满足 $1+i=(1+0.5\%)^{12}$，即 $i=6.1678\%$。实务中，我们通常按照单利的算法，简单地将 $0.5\%\times12=6\%$，称 6%为名义利率。

根据对以上例子的理解，现在我们提出名义利率（Nominal Rate of Interest）和名义贴现率（Nominal Rate of Discount）的概念。以符号 $i^{(m)}$ 表示在一个计息期间内计息 m 次（m 一般为大于 1 的整数，但在理论上可以等于 1）的名义利率。名义利率 $i^{(m)}$ 是指每 $1/m$ 个计息期间计息一次，而在每 $1/m$ 个计息期间的实际利率为 $i^{(m)}/m$。根据等价关系，$i^{(m)}$ 与等价的实际利率 i 之间的关系为

$$1+i=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

根据以上的关系式，已知实际利率 i 和计息次数 m 时可以求得等价的名义利率 $i^{(m)}$，或者已知名义利率 $i^{(m)}$ 和计息次数 m 时可以求得等价的实际利率 i。

类似地，还可以定义名义贴现率 $d^{(m)}$，名义贴现率 $d^{(m)}$ 是指每 $1/m$ 个计息期间计息一次，而每 $1/m$ 个计息期间的实际贴现率为 $d^{(m)}/m$。根据等价关系，$d^{(m)}$ 和 d 之间的关系为