

第一章 企业经济活动中的线性最优化方法

第一节 企业经济活动中的经营最优化问题

任何一个企业在其生产经营活动中都要消耗一定的资源。企业经营者总是希望本企业的资源能得到充分的利用 总希望以最小的投入获得最大的产出。尽管不同的企业往往有着不同的生产经营方式，有着不同的投入产出结构，但在经营管理的优化方法上，却往往可能使用相同的数学模型。下面，我们来看几个简单的例子。

例 1 某工厂计划生产 I、II 两种产品。已知生产每件产品 I，需要甲种原料 6 公斤、乙种原料 2 公斤；需要电力 20 度、劳动力 7 个工日；需要在车床上加工 4 小时，在钻床上加工 12 小时。生产每件产品 II，需要甲种原料 8 公斤、乙种原料 4 公斤；需要电力 50 度、劳动力 5 工日；需要在车床上加工 2 小时 在钻床上加工 4 小时。已知在一个计划期内，该厂能够提供甲、乙种原料分别为 2000 公斤、1000 公斤 能够提供劳动日为 1500 工日 电力 2000 度 能够提供的车床、钻床的有效台时数分别为 800 台时和 1200 台时。又知生产每件产品 I、II 分别获利 600 元、400 元。问如何安排生产，才能

得到最大的利润。

这是一个典型的生产安排及资源配置问题。

从单位产品的利润情况来看，产品Ⅱ优于产品Ⅰ，似乎是生产单一的产品Ⅱ比生产两种产品要合算。但是，因为产品Ⅱ的投入结构与工厂拥有的资源结构不协调，若是生产单一产品，势必造成企业资源的浪费，势必影响企业的整体经济效益。如何科学地安排生产计划，使资源得到充分的利用，使工厂经济效益最大，这就是资源的最优配置问题。

一个生产计划就是一组数值：产品Ⅰ的计划产量数及产品Ⅱ的计划产量数。不同的计划就是不同的数值。我们可用一组变量 x_1, x_2 来表示计划方案，其中 x_1, x_2 分别表示产品Ⅰ，Ⅱ的计划产量数。根据工厂的资源， x_1, x_2 应受到如下限制：

1. 耗用原料甲的数量，不应大于可能提供的甲种原料的数量。

$$\text{即：} 6x_1 + 8x_2 \leq 2000$$

2. 耗用原料乙的数量，不应大于可能提供的乙种原料的数量。

$$\text{即：} 2x_1 + 4x_2 \leq 1000$$

3. 耗用的电力，不应大于可能提供的电力数量。

$$\text{即：} 20x_1 + 50x_2 \leq 2000$$

4. 耗用的劳力数，不应大于可能提供的劳力数。

$$\text{即：} 7x_1 + 5x_2 \leq 1500$$

5. 占用车床的台时数，不应大于可能提供的车床台时数。

$$\text{即：} 4x_1 + 2x_2 \leq 800$$

6. 占用钻床的台时数，不应大于可能提供的钻床台时数。

$$\text{即: } 12x_1 + 4x_2 \leq 1200$$

7. 产品的产量数不能取负值。

$$\text{即: } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

任何一个可行的生产计划 x_1 、 x_2 都必须满足上述各不等式。显然，可能有多种可行的生产计划。我们所说的资源最优配置就是在同时满足上述不等式的可行的生产计划中，寻求一个，使得工厂所得利润

$$L = 600x_1 + 400x_2$$

取最大值。

于是，这个生产安排问题，可以表成如下数字模型：

求 x_1, x_2

$$\text{满足 } \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \leq 2000 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 2000 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 1500 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 800 \\ 12x_1 + 4x_2 \leq 1200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

且使 $L = 600x_1 + 400x_2$ 取最大值。

例 2 某煤炭公司有两个煤场 A、B 它们每月的供煤能力分别不少于 60 吨、100 吨。它们担负供应三个居民区用煤任务，这三个居民区每月需用煤分别为 45 吨、75 吨、40 吨。A 场离这三居民区分别为 10 公里、5 公里、6 公里，B 场离这

三居民区分别为 4 公里、8 公里、15 公里。问这煤炭公司应如何给 A 、 B 二煤场安排供煤计划，才能使花费的运输吨公里最小。

这是一个典型的运输调度问题。经营者的任务是，在保证三居民区煤炭供应的前提下，合理安排煤炭运输的路线及运量，使运输总吨公里最少，使运输力生产资源总投入量少。这类问题可表述为：

设煤场 A 往第一、二、三居民区的煤炭运量吨数分别为 x_{11} ， x_{12} ， x_{13} ，煤场 B 往第一、二、三居民区的煤炭运量吨数分别为 x_{21} ， x_{22} ， x_{23} 。

根据煤场的供煤可能性有：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 60$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100$$

根据三居民区对煤炭的需求，有

$$x_{11} + x_{21} \geq 45$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 75$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 40$$

又因煤炭运量不可能取负值，故有

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

公司经营者的希望的是花费的总吨公里最少，即希望适当的运量 x_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 使

$$10x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 8x_{22} + 15x_{23}$$

取最小值。

从数学的角度，这个运输最优化问题可描述为：

求一组变量： x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23} 的取值，要求它们满足下列不等式：

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100 \\ x_{11} + x_{21} \geq 45 \\ x_{12} + x_{22} \geq 75 \\ x_{13} + x_{23} \geq 40 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

并使函数 $S = 10x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{21} + 8x_{22} + 15x_{23}$ 取最小值。

例 3 设有某种原料产地 A_1 , A_2 , A_3 。这种原料经过加工，制成成品，再运往销地。假设用 4 吨原料可制成一吨成品。产地 A_1 年产原料 30 万吨，同时需要成品 7 万吨。产地 A_2 年产原料 26 万吨 同时需要成品 13 万吨。产地 A_3 年产原料 24 万吨 不需要成品。又 A_1 与 A_2 间距离 150 公里， A_1 与 A_3 间距离 100 公里， A_2 与 A_3 间距离 200 公里。又知原料运费为 3 千元 / 万吨公里，成品运费为 2.5 千元 / 万吨公里。又知在 A_1 开设加工厂，加工费为 5.5 千元 / 万吨 在 A_2 为 4 千元 / 万吨 在 A_3 为 3 千元 / 万吨。又知 因条件限制 在 A_2 设厂规模不能超过年产成品 5 万吨， A_1 , A_3 可以没限制。问在何地设厂，生产多少成品，才能使生产费用（包括原料运费、成品运费、加工费之和）为最小。

这个问题比例 2 复杂，不但要考虑运费，还要考虑加工费。这是一个企业（工厂）选址问题，处理方法与例 2 类似。

设 $x_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 表示从产地 A_i 运往产地 A_j 的原料的万吨数。

$y_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 表示从工厂 A_i 运往工厂 A_j 的成品的万吨数。

$z_i(i = 1, 2, 3)$ 表示工厂 A_i 生产的成品万吨数。

根据各产地生产原料的能力考虑有：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 26$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 24$$

从各工厂对成品的产销关系考虑，有：

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} = z_1$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} = z_2$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} = z_3$$

从各厂在生产成品时对原料的消耗关系考虑，有：

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4z_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4z_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4z_3$$

从各产地对成品的需求考虑，有：

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = 7$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} = 13$$

$$y_{13} + y_{23} + y_{33} = 0$$

从各工厂对成品产量的限制考虑，有

$$z_2 \leq 5$$

因为原料、成品的产量运量均不能取负数，所以

$$x_{ij}, y_{ij}, z_i \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

决策者希望生产费用最小，而生产费用包括：

原料运费（单位：千元）：

$$3(150x_{12} + 100x_{13} + 200x_{23} + 150x_{21} \\ + 100x_{31} + 200x_{32})$$

成品运费（单位：千元）：

$$2.5(150y_{12} + 100y_{13} + 150y_{21} + 200y_{23} \\ + 100y_{31} + 200y_{32})$$

加工费（单位：千元）：

$$5.5z_1 + 4z_2 + 3z_3$$

于是决策者的目标是求函数

$$S = 3(150x_{12} + 100x_{13} + 150x_{21} + 200x_{23} \\ + 100x_{31} + 200x_{32}) + 2.5(150y_{12} + 100y_{13} \\ + 150y_{21} + 200y_{23} + 100y_{31} + 200y_{32}) \\ + 5.5z_1 + 4z_2 + 3z_3$$

的最小值。

从数学的角度，本问题的实质为：

求一组变量

$$x_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$$

$$y_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$$

$$z_i (i = 1, 2, 3)$$

的取值。

要求它们满足下列约束条件

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 26 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 24 \\ y_{11} + y_{12} + y_{13} = z_1 \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} = z_2 \\ y_{31} + y_{32} + y_{33} = z_3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4z_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4z_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4z_3 \\ y_{11} + y_{21} + y_{31} = 7 \\ y_{12} + y_{22} + y_{32} = 13 \\ y_{13} + y_{23} + y_{33} = 0 \\ z_2 \leq 5 \\ x_{ij}, y_{ij}, z_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

并且使函数

$$\begin{aligned} S = & 3(150x_{12} + 100x_{13} + 150x_{21} + 200x_{23} + 100x_{31} \\ & + 200x_{32}) + 2.5(150y_{12} + 100y_{13} + 150y_{21} \\ & + 200y_{23} + 100y_{31} + 200y_{32}) + 5.5z_1 + 4z_2 + 3z_3 \end{aligned}$$

达到最小值。

例 4 设某生产小组有 5 项工作需分配给 5 个工人，在一个计划时间内每人必须从事一项工作，也只能从事一项工作。由于各项工作的难度各异，各人的专长也不同。第 i 个人 A_i 完成第 j 项工作 B_j 所需的时间为 C_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$) (时间单位为分钟) 如下表所示：

时 间 人	工 作 C_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		A_1	8	7	5	3
A_2	5	4	4	2	3	
A_3	8	2	7	4	4	
A_4	5	6	5	4	4	
A_5	8	3	7	9	4	

决策者希望找到一个最好的工作分配方案，使得完成这 5 项工作所花的总时间最少。

这是工作分配问题。

设 x_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$) 表示第 i 个人 A_i 被分配从事第 j 项工作 B_j 。

令
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{表示 } A_i \text{ 从事 } B_j \text{ 工作} \\ 0 & \text{表示 } A_i \text{ 不从事 } B_j \text{ 工作} \end{cases}$$

因为每人必须从事一项工作，也只能从事一项工作，于是有

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

于是问题的实质为：求变量 x_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5$) 的一组取值，使之满足上述约束条件，并使函数

$$S = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 C_{ij} x_{ij}$$

取最小值。

例 5 某投资单位现有资金 100 万元。每年都有如下的

投资方案可供考虑采纳：“假使第一年投入一笔资金，第二年又继续投入此金额的 50%，那末到第三年就可回收第一年投入资金的两倍的金额”。投资单位要决定最优的投资策略，使第六年所掌握的资金为最多。

因为题中并未明言投资和回收是在一年中什么时候发生，所以可假定某一年回收的款项立即可在这一年投资。

每年，投资单位都如下的活动：

1. 补充上一年的投资，即继续增加 50% 投资。
2. 开始这一年新的投资。
3. 保存现金，供将来投资之用。

第一项活动取决于上一年开始的投资，因此对于这一年来讲是没有选择余地的。不过，对于 2、3 两项活动，却有充分的自由。因此，每年需要两个决策变量——一个变量用来表示这一年开始的新投资，另一表示这一年的保留的资金。于是可设如下决策变量：

- x_1 ——第一年所作的新投资（单位：万元，下同）；
- S_1 ——第一年所保留的资金；
- x_2 ——第二年所作的新投资；
- S_2 ——第二年所保留的资金；
- x_3 ——第三年所作的新投资；
- S_3 ——第三年所保留的资金；
- x_4 ——第四年所作的新投资；
- S_4 ——第四年所保留的资金；
- S_5 ——第五年所保留的资金。

之所以在第五年不再进行新的投资，是因为这笔投资不能在第六年回收。

上述决策变量均受到投资金额的限制：投资总金额（续加投资和新投资）+ 保留资金 = 可利用的现金总额。于是约束条件为

$$x_1 + S_1 = 100 \quad (\text{第一年})$$

$$\frac{x_1}{2} + x_2 + S_2 = S_1 \quad (\text{第二年})$$

$$\frac{x_2}{2} + x_3 + S_3 = S_2 + 2x_1 \quad (\text{第三年})$$

$$\frac{x_3}{2} + x_4 + S_4 = S_3 + 2x_2 \quad (\text{第四年})$$

$$\frac{x_4}{2} + S_5 = S_4 + 2x_3 \quad (\text{第五年})$$

运筹目标是到第六年投资单位所掌握的现金总额最多，即求 $S = S_5 + 2x_4$ 的最大值。

于是，问题归结为在满足下列条件

$$\begin{cases} x_1 + S_1 = 100 \\ \frac{x_1}{2} + x_2 - S_1 + S_2 = 0 \\ -2x_1 + \frac{x_2}{2} + x_3 - S_2 + S_3 = 0 \\ -2x_2 + \frac{x_3}{2} + x_4 - S_3 + S_4 = 0 \\ -2x_3 + \frac{x_4}{2} - S_4 + S_5 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \geq 0 \end{cases}$$

的前提下，求函数 $S = S_5 + 2x_4$ 的最大值。

例 6 某公司的检验人员分为一级和二级两种等级，他们的任务是质量管理的检验工作。要求每天八小时至少检验

1800 件。一级检验员每小时能够检验 25 件，准确度是 98%，二级检验员每小时检验 15 件，准确度是 95%。一级检验员的工资是每小时 4 元，二级检验员是每小时 3 元。检验员每出错一次，公司方面的损失为 2 元。公司拥有一级检验员 8 人，二级检验员 10 人。问公司经理应怎样指派检验员的工作，才能既完成检验任务，又使检验的总费用为最小。

显然，在此决策对象是被指派担任检验工作一级和二级检验员的人数 x_1 和 x_2 。

因为每种等级的检验员人数都有一定限制，所以有下列约束条件：

$$x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 10$$

又因为公司要求每天至少检验 1800 件，因此有下列约束条件：

$$(25x_1 + 15x_2) \geq 1800$$

即

$$5x_1 + 3x_2 \geq 45$$

又因为担任检验工作的检验员人数不能是负数，所以有下列约束条件：

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

运筹目标是检验总费用最少，而检验总费用包括检验员的工资及出错损失两部分。

每一个一级检验员每小时的费用为

$$4 + 2(25)(0.02) = 5$$

每一个二级检验员每小时的费用为

$$3 + 2(15)(0.05) = 4.5$$

于是，问题归结为在满足下列条件

(其中 a_{ij} , b_i , c_j ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$) 均为已知常数)。

条件 (1.1) 称为线性规划问题的约束条件, 函数 S 称为线性规划问题的目标函数。

线性规划问题的数学模型是描述实际问题的抽象的数学形式, 它反映了客观事物数量间的本质规律。建立数学模型可以粗一些, 也可以细一些。当然, 模型越细, 考虑因素越多, 模型越接近真实, 但是求解也越复杂。人们没有必要, 也不可能把模型搞得尽善尽美, 而应该从实际出发, 抓住最本质的因素, 将不太重要的因素去掉, 建立一个既简单, 又比较真实反映本质规律的模式。

怎样建立线性规划的数学模型呢? 建模工作大致分为如下三大步骤:

第一步, 明确所要建立的决策方案是由哪些要素构成的, 用一组有待确定的未知量来代表这些要素。这样就把决策过程中的定性分析变成定量分析。那些有待确定的未知量称为决策变量。

第二步, 明确与决策方案相关的经济环境、社会环境的各种约束和限制, 用决策变量的线性方程或线性不等式组表示出来。

第三步, 明确决策目标或准则, 用决策变量的一个线性函数表示, 根据决策意图, 求其极大值或极小值。

下面通过一个实例来阐述这三个基本步骤。

例 1 某公司要安排一种儿童玩具的生产, 该产品有 A 、 B 、 C 三种型号, 需要两种资源——劳动力和原材料。生产技术科提供下列数据:

所需资源及 所获利润 \ 型 号	A	B	C
劳动力 (小时/件)	7	3	6
原材料 (公斤/件)	4	4	5
利润 (元/件)	4	2	3

在该公司的经济社会环境中，每天可供应的原材料限制在 200 公斤，每天能利用的劳动力为 150 小时。问，在现有投入条件下，应如何组织生产，才能使公司产出的利润最大。

为寻找最优决策方案，先建立数学模型：

第一步，明确决策变量。本决策问题所要决策的是三种型号的日产量，它们就是决策变量。用三个代数符号分别表示这三种型号产品的日产量：

x_A ——产品 A 的日产量；

x_B ——产品 B 的日产量；

x_C ——产品 C 的日产量。

第二步，明确约束条件。在本问题中，约束条件是两种资源——劳动力和原材料的有限供应。

对于劳动力的供需约束：型号 A 每生产一件需 7 小时劳动力，生产 x_A 件需 $7x_A$ 小时劳动力。型号 B 每生产一件需 3 小时劳动力，生产 x_B 件需 $3x_B$ 小时劳动力。型号 C 每生产一件需 6 小时劳动力，生产 x_C 件需 $6x_C$ 小时劳动力。于是当生产 A、B、C 三型号产品分别为 x_A 、 x_B 、 x_C 件时，共需 $7x_A + 3x_B + 6x_C$ 小时劳动力。由于可供劳动力为 150 小时，所以关于劳动力的约束条件为

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

对于材料的供需约束：型号 A 每生产一件需 4 公斤原料，生产 x_A 件需原材料 $4x_A$ 公斤。型号 B 每生产一件需 4 公斤原材料，每生产 x_B 件需原材料 $4x_B$ 公斤。型号 C 每生产一件需 5 公斤原材料，生产 x_C 件需原材料 $5x_C$ 公斤。由于可供原材料为 200 公斤，所以关于材料的约束条件为

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

再者，根据经济含义，产量 x_A, x_B, x_C 只能具有非负值，所以又有

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0, \quad x_C \geq 0$$

于是，本决策问题的约束条件为

$$\begin{cases} 7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150 \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0 \end{cases}$$

第三步，明确目标。本决策问题的目标是要使生产的总利润为最大。假定这三种型号的产品有完全市场，即凡生产出来的都可销售，每天的总利润为

$$S = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

这样，我们就得到了本决策问题的线性规划模型：

求数 x_A, x_B, x_C 使

$$S = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

为最大值，且受下列条件的约束

$$\begin{cases} 7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150 \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0 \end{cases}$$

通常表为：

求

$$\max S = 4x_A + 2x_B + 3x_C$$

$$S. T \begin{cases} 7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150 \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200 \\ x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{cases}$$

其中 $S. T$ 是英文 Subject to 的缩写, 表示“受约束于”。

(二) 线性规划模型的标准形式

为了讨论与计算上的方便, 通常需要通过代数恒等变换对线性规划问题的一般型式实施如下标准化变换:

- 将约束条件中的常数项列中的负数变成正数;
- 将约束条件中的不等式化成等式;
- 用非负变量代换无非负要求的变量;
- 将目标函数的极大化问题变成极小化问题。

具体的做法是:

1. 如果 $b_k < 0$, 则在 b_k 所在的那个约束不等式 (或等式) 的两边同乘以 -1 ;
2. 如果第 k 个式为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

则加入新变量 x_{n+k} , ($x_{n+k} \geq 0$), 使第 k 个式子变成

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$$

如果第 k 个式为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k$$

则减去新变量 x_{n+k} , ($x_{n+k} \geq 0$), 使第 k 个式子变成

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k$$

新加入的 x_{n+k} 称为松弛变量, 代表未被利用的资源, 它在目标函数中的系数为零。

3. 如果约束条件中某变量 x_j 无非负要求, 则引进两个