

经济最优规划

赵德滋 宋颂兴
徐志坚 强莹 编

南京大学出版社

1991·南京

内 容 简 介

本书较全面、系统地讲解应用广泛、行之有效的经济最优规划方法，包括经济资源最优配置的线性规划问题、线性规划问题的单纯形解法、资源价格测算的对偶规划、最优化后分析和参数规划、物质调运方案的最佳选择、关于最大流与最小费用的网络规划、经济变量在整数条件下的规划问题、经济动态过程的最优规划、具有多种经济目标的规划问题等九章。可作为高等院校经济管理、管理工程类有关专业的教材，也可供实际经济管理工作者参考使用。

经济最优规划

赵德滋 宋颂兴 徐志坚 强 莹 编

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 丹阳练湖印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12.25 字数 317 千

1991年4月第1版 1991年4月1次印刷

印数 1—2000

ISBN 7-305-00981-4

F·139

定价 6.50 元

责任编辑：新 平

前 言

经济最优规划是运用运筹学中线性规划、整数规划、动态规划、网络规划、多目标规划等方法研究生产布局、资源配置、计划安排、价格测定、物资调运等经济管理问题，以取得最佳经济效益的一门新兴的边缘学科。近 30 年来，发展迅速、应用广泛。

我国经济管理工作者，用经济最优规划方法解决实际问题，已取得了明显的效果。目前，越来越多的人要求学习和掌握这门学科的理论、方法和应用技术；大专院校的经济管理、管理工程类专业都相继开设了有关课程。在这种写一情况下，编本取材得当、程度适中、学以致用教材是十分需要的。

本书是我们多年讲授该课程实践的一个总结。具有三个特点：

1. 内容选择上注重的广应用泛性和实用性；
2. 内容讲解上注重经济涵义的明确性和清晰性；
3. 内容安排上注意前后连贯性和相对独立性。

我们认为，这样既便于学生掌握和运用，又便于实际工作者有目的地学习有关内容。是否能如愿以偿，诚望读者评说。

本书由编写组成员集体讨论、分头执笔。具体分工为：赵德滋——第一、五章，宋颂兴——第二、三、四章，徐志坚——第六、九章，强莹——第七、八章。最后由赵德滋、宋颂兴总纂定稿。

本书在编写过程中，得到南京大学国际商学院以及经济决策系领导的关心和支持，谨此表示感谢。

编 者

1990 年 8 月

目 录

第一章 经济资源最优配置的线性规划问题	1
§ 1 什么是线性规划	1
§ 2 资源最优配置的线性规划模型	6
§ 3 线性规划模型的标准化	13
§ 4 两个变量线性规划问题的图解法	20
习题一	31
第二章 线性规划问题的单纯形解法	38
§ 1 单纯形法的制定	38
§ 2 人为变量法	63
§ 3 改进单纯形法	71
习题二	84
第三章 资源价格测算的对偶规划	88
§ 1 对偶规划的一般形式	88
§ 2 对偶规划的性质和经济意义	97
§ 3 对偶单纯形法	110
习题三	116
第四章 最优化后分析和参数规划	121
§ 1 现行规划条件下市场变化的分析	121
§ 2 市场情况不确定时的规划方法——参数规划	140
习题四	154
第五章 物资调运方案的最佳选择	161
§ 1 物资调运问题的线性规划模型	161
§ 2 初始调运方案的确定	167
§ 3 初始调运方案的检验	178

§ 4 调运方案的调整与最优调运方案的确定	184
§ 5 某些特殊运输问题的处理	187
习题五	193
第六章 关于最大流与最小费用的网络规划	202
§ 1 基本概念	202
§ 2 最大流问题	204
§ 3 最短路问题	212
§ 4 最大流与最小费用问题	221
习题六	228
第七章 经济变量为整数条件下的规划问题	231
§ 1 变量取整数的经济最优规划	231
§ 2 分枝定界解法	234
§ 3 割平面解法	243
§ 4 投资方案的最优选择	249
§ 5 任务最优分配问题	263
习题七	272
第八章 经济动态过程的最优规划	278
§ 1 动态规划方法引例	278
§ 2 动态规划的最优性原理	281
§ 3 动态规划的基本方法	289
§ 4 经济动态过程的最优规划的应用	294
习题八	334
第九章 具有多种经济目标的规划问题	338
§ 1 多目标规划	338
§ 2 生产计划的目标规划问题	349
§ 3 目标规划的求解方法	366
习题九	379

第一章 经济资源最优配置的线性规划问题

§ 1 什么是线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。它是研究在现有人力、财力和物力等资源条件下，合理调配和有效使用资源，以达到最优目标(产量最高、利润最大、成本最小、资源消耗最少等等)的一种数学方法。

为了便于了解线性规划的一般特征，先举两个简单的例子。

例 1.1 某工厂用 A, B, C 三种资源生产甲、乙两种产品，单位产品需消耗各种资源的数量、单位产品的收益以及各种资源的限量如表 1.1 所示。问应生产甲、乙产品各多少，才能获得最大收益？

表 1.1

资 源	单位产品需消耗的资源		各种资源 的限量
	产 品 甲	产 品 乙	
A	9	4	360
B	4	5	200
C	3	10	300
单位产品的收益 (百元)	7	12	

表中数据表示，生产一个单位甲种产品需消耗 9 个单位 A 种

资源、4个单位B种资源和3个单位C种资源，而能收益7百元；生产一个单位乙种产品需消耗4个单位A种资源、5个单位B种资源和10个单位C种资源，而能收益12百元。A、B、C三种资源的限有量分别为360单位，200单位，300单位。

现设生产甲种产品 x_1 个单位，乙种产品 x_2 个单位，则可得到的总收益 Z 为：

$$Z = 7x_1 + 12x_2 \quad (1-1)$$

我们的目标是要使总收益达到最大，于是记成

$$\max Z = 7x_1 + 12x_2 \quad (1-2)$$

Z 是 x_1, x_2 的线性函数，称为目标函数； $\max Z$ 表示求目标函数的最大值。

另一方面，由于各种资源的数量是有限的，不管如何安排产量 x_1 和 x_2 ，都应满足下列三个条件：

$$9x_1 + 4x_2 \leq 360 \quad (1-3)$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200 \quad (1-4)$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 300 \quad (1-5)$$

此外，产量不能为负值，即

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1-6)$$

(1-3)~(1-5)的三个线性不等式和(1-6)式的变量非负条件一起，称为约束条件。

根据上述讨论，我们所要解决的问题可简述为：在满足约束条件下，求出变量 x_1, x_2 （称为决策变量）的值，使目标函数达到最大。它的数学模型写为：

$$\begin{cases} \max Z = 7x_1 + 12x_2 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

这就是例1.1的线性规划模型。

例 1.2 某冶金企业，为了满足市场需要，每年至少需生产 A36 吨、B16 吨、C60 吨；而这三种产品可从甲、乙两种原料中提炼，该两种原料每百吨的单价以及能提炼 A, B, C 的数量如表 1.2 所示。问如何配置原料，既能满足产品的市场需要，又能使总成本最小？

表 1.2

产 品	百吨原料能提炼的产品数 (吨)		市场最少需求量 (吨)
	原 料 甲	原 料 乙	
A	6	4	36
B	2	2	16
C	6	12	60
百吨原料单价 (百元)	40	32	

表中数据表示，使用百吨甲种原料，可提炼出 6 吨 A 种产品、2 吨 B 种产品和 6 吨 C 种产品，而成本为 40 百元；使用百吨乙种原料，可提炼出 4 吨 A 种产品、2 吨 B 种产品和 12 吨 C 种产品，而成本为 32 百元。A, B, C 三种产品的市场最少需求量分别为 36 吨、16 吨、60 吨。

现设使用甲种原料为 x_1 ，乙种原料为 x_2 (x_1, x_2 以百吨为单位)，则总成本 Z 为：

$$Z = 40x_1 + 32x_2 \quad (1-8)$$

我们要求它达到最小，于是记成

$$\min Z = 40x_1 + 32x_2 \quad (1-9)$$

与上例类似，这里的 Z 是目标函数，它是 x_1, x_2 的线性函数；而 min 表示求目标函数的最小值。

另一方面，根据市场需要，使用甲、乙两种原料所提炼出来的 A, B, C 三种产品数量应满足下列三个条件：

$$6x_1 + 4x_2 \geq 36 \quad (1-10)$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 16 \quad (1-11)$$

$$6x_1 + 12x_2 \geq 60 \quad (1-12)$$

此外，使用的原料数量不能为负值，即

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1-13)$$

(1-10)~(1-12)三个线性不等式和(1-13)式的变量非负条件，构成了约束条件。

本例所要解决的问题可简述为：在满足约束条件下，求出决策变量 x_1, x_2 的值，使目标函数达到最小。它的数学模型可写为：

$$\begin{cases} \min Z = 40x_1 + 32x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 36 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

这就是例 1.2 的线性规划模型。

上述两个例子是比较简单的，都只含有两个变量。在很多实际问题中，会出现多个变量。同时，约束条件还会出现“等式”的形式；也可能在同一个线性规划问题中，“ \leq ”、“ \geq ”、“ $=$ ”三种形式的约束条件一起出现。

根据这些情况，可以归纳出线性规划问题有以下三个共同特征：

(1) 每一个问题都有一组决策变量 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，这组变量的一组定值就代表一个具体的规划方案。通常要求变量的取值是非负的。

(2) 都有一个目标函数，它是决策变量的线性函数。按研究问题的不同，要求目标函数达到最大值，或者最小值。

(3) 存在一定的限制条件(除变量非负条件外的约束条件)，它们都可以用线性不等式或线性等式来表达。

由于所要求的是规划方案 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，而它的目标函数

§ 2 资源最优配置的线性规划模型

运用线性规划方法研究经济资源的最优配置，首先要建立它的数学模型。通过上一节的两个简单例子，我们对如何建立线性规划模型已经有了一定的了解。但是，实际问题往往是复杂的，所提出的要求和给定的条件是多种多样的。必须经过周密的考虑和仔细的分析，才能建立正确的模型。本节通过各种不同有关资源最优配置的实例，讲述其线性规划问题的建模过程。

一、生产计划问题

例 1.3 某工厂计划生产四种产品；各种产品每件所需消耗的各类资源定额，计划期内各类资源的总量限制和各种产品的单位价格如表 1.3 所列。问工厂应如何安排生产，使计划期内所得的总收益最大？

表 1.3

各类资源	每件产品所需消耗的资源				资源总量限制
	产品 I	产品 II	产品 III	产品 IV	
工时(小时)	2	3	1	2	60
原料(吨)	4	2	2	0	100
机时(小时)	1	1	1	1	40
产品单价(万元)	3	1	$\frac{3}{2}$	2	

本例和例 1.1 极为类似，只是这里有了四种产品。可设决策变量 x_1, x_2, x_3 和 x_4 分别表示产品 I，产品 II，产品 III 和产品 IV 的产量，仿照例 1.1 的分析，可建立其线性规划模型为：

$$\max Z = 3x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (1-22)$$

二、饲料混合问题

例 1.4 某畜牧场所用饲料是由四种饲料混合而成的，其中包括玉米、苜蓿、大麦及黄豆。各种饲料每单位所含营养成分及价格，所配饲料每单位的营养标准(为简化起见，只考虑各种营养成分的最低含量要求)如表 1.4 所列。问按何种配比混合饲料可使单位成本最小？

表 1.4

营养成分	各种饲料每单位中营养成分含量(克)				每单位混合饲料 营养成分最低含量
	玉米	苜蓿	大麦	黄豆	
蛋白质	0.082	0.19	0.11	0.48	0.21
纤维	0.022	0.17	0.076	0.028	0.05
脂肪	0.036	0.023	0.017	0.005	0.04
铁	0.0006	0.016	0.0057	0.0024	0.015
钙	0.0022	0.0007	0.0012	0.0019	0.004
各种饲料单价 (元)	0.25	0.30	0.28	0.35	

设 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示混合饲料中所含玉米、苜蓿、大麦及黄豆的比例，单位为百分数。再设每单位混合饲料的成本为 Z ，则由表列数据可得：

$$Z = 0.25x_1 + 0.30x_2 + 0.28x_3 + 0.35x_4$$

我们的目标是要求它达到最小，仿照例 1.2，记成

$$\min Z = 0.25x_1 + 0.30x_2 + 0.28x_3 + 0.35x_4$$

另一方面，每单位混合饲料中各种营养成分的最低含量是有

要求的；而这些营养成分是由玉米、苜蓿、大麦和黄豆等饲料提供的。根据表 1.4 的数据，应满足下列条件：

$$0.082x_1 + 0.19x_2 + 0.11x_3 + 0.48x_4 \geq 0.21$$

$$0.022x_1 + 0.17x_2 + 0.076x_3 + 0.028x_4 \geq 0.05$$

$$0.036x_1 + 0.023x_2 + 0.017x_3 + 0.005x_4 \geq 0.04$$

$$0.0006x_1 + 0.016x_2 + 0.0057x_3 + 0.0024x_4 \geq 0.015$$

$$0.0022x_1 + 0.0007x_2 + 0.0012x_3 + 0.0019x_4 \geq 0.004$$

此外，各种饲料的百分比之和应等于 1，且各种饲料的百分比均为非负，即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

综上所述，该饲料混合问题的线性规划模型为：

$$\min Z = 0.25x_1 + 0.30x_2 + 0.28x_3 + 0.35x_4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.082x_1 + 0.19x_2 + 0.11x_3 + 0.48x_4 \geq 0.21 \\ 0.022x_1 + 0.17x_2 + 0.076x_3 + 0.028x_4 \geq 0.05 \\ 0.036x_1 + 0.023x_2 + 0.017x_3 + 0.005x_4 \geq 0.04 \\ 0.0006x_1 + 0.016x_2 + 0.0057x_3 + 0.0024x_4 \geq 0.015 \\ 0.0022x_1 + 0.0007x_2 + 0.0012x_3 + 0.0019x_4 \geq 0.004 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

(1-23)

三、合理下料问题

例 1.5 用统一规格的原材料切割成 m 种零件 A_1, A_2, \dots, A_m 的毛坯，而每一单位原材料上可有 n 种不同的下料(切割)方式 B_1, B_2, \dots, B_n 。每种下料方式可得到的各种毛坯个数 c_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 及每种零件的需要量 a_i ($i=1, 2, \dots, m$) 如表 1.5 所示。问应怎样安排下料方式，使得既能满足需要，而用的原材料又最少。

表 1.5

零件名称	下料方式				各零件需要量
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
\vdots	\vdots
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m

通过例 1.1~1.4, 我们对线性规划问题的建模过程已有了一定的了解。从本例开始, 在不理解的情况下, 将简化叙述。

设用 B_j 方式下料的原材料数为 x_j , 则该问题的线性规划模型为:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \geq a_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, \text{ 且为整数} & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1-24)$$

x_j 是以各种方式下料时所用的原材料数, 当然应该非负且是整数。

四、农作物生产布局问题

例 1.6 农场要在 n 块土地 B_1, B_2, \dots, B_n 上, 种植 m 种农作物 A_1, A_2, \dots, A_m ; 各种土地的面积 $b_j (j=1, 2, \dots, n)$, 各种作物的计划播种面积 $a_i (i=1, 2, \dots, m)$, 各种作物在各块土地上的亩产量 $c_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 如表 1.6 所示。问应如何合理进行生产布局, 使既能完成各种作物的播种计划, 又能使农作物的总产量最多。

表 1.6

农作物	土地				各种作物 播种面积
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
\vdots	\vdots
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
各块土地面积	b_1	b_2	...	b_n	

为简化起见，不妨假定各种作物计划播种总面积等于土地总面积，即

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1-25)$$

设 x_{ij} 为土地 B_j 上种植作物 A_i 的面积 ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$)，则该作物布局问题的线性规划模型为：

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ &\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j=1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned} \quad (1-26)$$

五、生产进度问题

例 1.7 某工厂生产的一种产品，其需求具有季节性，假定只能在夏季前后的四个月内进行生产和销售。生产可以按正常工作时间进行，也可以加班。前三月的月产量可以大于当月的销售

量而将多余的产品存贮，但要付出存贮费；而在第四个月月末要将产品全部售完。

设产品在正常工作时间生产，每月最多能生产 100 单位，单位成本为 15 元。在加班时间生产，每月最多能生产 30 单位，单位成本为 20 元。每月生产量及平均成本不一定要相等。存贮费每月每单位 0.2 元。四个月的需求量分别为 50, 130, 150 及 100 单位。

试建立线性规划模型，以确定每月在正常时间及加班时间各生产多少产品，使总成本最小。

为使模型清晰起见，我们设三套变量 x_i, y_i, z_i ：

x_i ——在第 i 月正常时间内生产的产品数， $i=1, 2, 3, 4$ ；

y_i ——在第 i 月加班时间内生产的产品数， $i=1, 2, 3, 4$ ；

z_i ——在第 i 月末存贮的产品数， $i=1, 2, 3$ 。

我们的目标是总成本最小，即

$$\begin{aligned} \min Z = & 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 20(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ & + 0.2(z_1 + z_2 + z_3) \end{aligned}$$

生产能力约束为：

$$x_i \leq 100 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$y_i \leq 30 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

产品需求约束为：

$$x_1 + y_1 - z_1 = 50$$

$$x_2 + y_2 + z_1 - z_2 = 130$$

$$x_3 + y_3 + z_2 - z_3 = 150$$

$$x_4 + y_4 + z_3 = 100$$

变量均为非负，即

$$x_i, y_i, z_i \geq 0$$

综上所述，该问题的线性规划模型为：

$$\begin{aligned} \min Z = & 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 20(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ & + 0.2(z_1 + z_2 + z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_i \leq 100 \\ y_i \leq 30 \\ x_1 + y_1 - z_1 = 50 \\ x_2 + y_2 + z_1 - z_2 = 130 \\ x_3 + y_3 + z_2 - z_3 = 150 \\ x_4 + y_4 + z_3 = 100 \\ x_i, y_i \geq 0 \quad (i=1,2,3,4), \quad z_i \geq 0 \quad (i=1,2,3) \end{cases} \quad (1-27)$$

六、连续加工问题

例 1.8 某工厂在第一车间用 1 单位原材料 M 加工成 3 个单位 A 种产品和 2 个单位 B 种产品。 A 可以按单位售价 8 元出售，也可以在第二车间继续加工，单位生产费用要增加 6 元，加工后单位售价为 16 元； B 可以按单位售价 7 元出售，也可以在第三车间继续加工，单位生产费用要增加 4 元，加工后单位售价为 12 元。原材料 M 的单位购入价为 2 元。上述生产费用均不包括工资在内。

三个车间每月最多共有 20 万工时，每工时工资 0.5 元。每加工一个单位原材料需 1.5 工时，继续加工一个单位 A 产品需 3 工时，继续加工一个单位 B 产品需 1 工时。每月最多能购进的原材料为 10 万单位。问如何安排生产，使工厂获利最大？

我们知道，利润是由产品销售额减去成本(包括生产费用和工资)得到的。现设

- x_1 —— 第一车间所用的原材料数量；
- x_{1A} —— A 未经继续加工出售的数量；
- x_{2A} —— A 在第二车间加工后出售的数量；
- x_{1B} —— B 未经继续加工出售的数量；
- x_{3B} —— B 在第三车间加工后出售的数量。

根据上述所给的数据，可得目标函数(利润最大)为：