普通高等教育‘十五’国家级规划教材

（高职高专教育）

经济应用数学——微积分学习辅导

叶子祥　于　信　宿金勇　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与教育部高职高专规划教材《经济应用数学——微积分》配套的学习指导书，是根据教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》编写的。全书共六章，内容与《经济应用数学——微积分》教材相呼应，包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学及综合测试题（五套）。每章均由学习指导（基本要求、重点、难点）、疑难解析、典型例题、习题选解及测试题（A，B 两套）五部分所组成，各种测试题在其后都附有答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业微积分课程的教学用书，也可作为对微积分及其应用感兴趣的读者的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学. 微积分学习辅导/叶子祥，于信，宿金勇编. —北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-012409-2

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①叶… ②于… ③宿… Ⅲ. 微积分-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 043825 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	年　月第　版
印　　张	9.75	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	230 000	定　　价	10.90 元

策划编辑　蒋　青
责任编辑　应丽贞
封面设计　杨立新
责任绘图　吴文信
版式设计　陆瑞红
责任校对　殷　然
责任印制

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19 号)，提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　　言

本书是与教育部高职高专规划教材《经济应用数学——微积分》配套的学习指导书。

在编写本书的过程中，我们注意到初学者对微积分的一些基本概念理解不透或产生错误，对解题方法的掌握感到困难，而教材本身由于受篇幅等诸多因素的限制，不可能对学生在学习过程中所遇到的各种问题都给出详细的解答。为此，我们编写了这本学习指导书。其目的是帮助微积分的初学者正确理解与掌握基本概念和有关的基本理论；帮助学生开阔视野、活跃思路，逐步解决学习中的困难，总结解题规律，提高解题能力并用数学方法分析经济现象，运用计算机及数学软件 Mathematica 解决实际问题；同时也是对《经济应用数学——微积分》教材的一种补充。

全书共六章，包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学及综合测试题(五套)。每章均由学习指导(基本要求、重点、难点)、疑难解析、典型例题、习题选解及测试题(A，B 两套)五部分所组成，各种测试题在其后都附有答案。

本书由于信(第一、二章)、叶子祥(第三、六章)、宿金勇(第四、五章)编写。全书由叶子祥统稿。

高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示衷心感谢！

限于作者水平，加之时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

2003 年 3 月

目　录

第一章　极限与连续 …… 1
第一节　函数 …… 1
一、学习指导 …… 1
二、疑难解析 …… 1
三、典型例题 …… 4
四、习题选解 …… 5
第二节　极限与连续 …… 7
一、学习指导 …… 7
二、疑难解析 …… 7
三、典型例题 …… 12
四、习题选解 …… 15
章后测试题 …… 18
章后测试题参考答案 …… 24

第二章　导数与微分 …… 26
一、学习指导 …… 26
二、疑难解析 …… 26
三、典型例题 …… 29
四、习题选解 …… 33
章后测试题 …… 37
章后测试题参考答案 …… 42

第三章　导数的应用 …… 44
一、学习指导 …… 44
二、疑难解析 …… 44
三、典型例题 …… 45
四、习题选解 …… 51
章后测试题 …… 68
章后测试题参考答案 …… 72

第四章　不定积分 …… 74
一、学习指导 …… 74
二、疑难解析 …… 74
三、典型例题 …… 75
四、习题选解 …… 79
章后测试题 …… 90
章后测试题参考答案 …… 92

第五章　定积分 …… 94
一、学习指导 …… 94
二、疑难解析 …… 94
三、典型例题 …… 95
四、习题选解 …… 99
章后测试题 …… 111
章后测试题参考答案 …… 113

第六章　多元函数微分学 …… 114
一、学习指导 …… 114
二、疑难解析 …… 114
三、典型例题 …… 115
四、习题选解 …… 122
章后测试题 …… 127
章后测试题参考答案 …… 131

综合测试题(A) …… 133
综合测试题(B) …… 135
综合测试题(C) …… 137
综合测试题(D) …… 139
综合测试题(E) …… 142
综合测试题参考答案 …… 145

第一章　极限与连续

这一章的内容可分为两部分，第一部分主要介绍了函数的概念，性质以及经济问题中常见的函数. 第二部分介绍了数列与函数的极限的概念、性质和运算法则，并在这基础上给出了连续函数的概念、闭区间上连续函数的性质以及函数间断点的分类.

第一节　函　　数

一、学习指导

（一）基本要求

1. 理解函数的定义，会求函数的定义域、函数值，能作出简单函数的图像.

2. 掌握函数的性质，会判断函数的奇偶性、单调性、有界性、周期性，清楚具有这些特性的函数的图形特征.

3. 理解反函数和复合函数的概念，清楚函数与其反函数的图形关系. 会求简单函数的反函数，清楚复合函数的复合过程.

4. 熟悉基本初等函数的定义、图像、性质.

5. 了解经济问题中常见函数表述的经济意义.

（二）重点与难点

重点：函数的概念与性质.

难点：定义域，函数值，复合函数.

二、疑难解析

1. 确定函数的两要素

函数的定义域和对应规律称为确定函数的两要素，要判定两个函数是否相同，就是看它们的两要素是否相同.

例 1　判断下列两组函数中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；$g(x)=x+1$.

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$；$g(x)=x$.

解　(1) $f(x)$ 的定义域 $D_1=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，

$g(x)$ 的定义域 $D_2=(-\infty,+\infty)$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

(2) $f(x)$ 的定义域与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$.

但对任意 $x_0\in(-\infty,0)$，有 $f(x_0)>0$，而 $g(x_0)<0$.

这表明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规律不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

2. 函数的定义域

函数的定义域是指使函数有意义的全体自变量构成的集合.

一般地,求函数的定义域须考虑下列几个方面:

(1) 分式的分母不能为零;

(2) 偶次根式下不为负值;

(3) 对数的真数须大于零;

(4) 反三角函数考虑主值区间;

(5) 复合函数由外(函数)及里(内函数);

(6) 代数和的情况下取各式定义域的交集.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\lg\sin x$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义,x 须同时满足

① $25-x^2>0$;

② $\sin x>0$.

由①得 $-5<x<5$;由②得　$2k\pi<x<(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$.

取交集,$f(x)$ 的定义域为 $D=(-5,-\pi)\cup(0,\pi)$.

3. 反函数.

(1) 求反函数的方法. 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$,通常是将 x 从函数解析式 $y=f(x)$ 中解出:$x=f^{-1}(y)$,然后将 x 与 y 的位置互换得到 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 反函数的存在性. 在某个区间 I 上一一对应的函数必有反函数;并且,严格单增(单减)函数的反函数也是严格单增(单减)函数.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域,$y=f(x)$ 的值域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

(4) 在同一个直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 3　设 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,0]$. 求该函数的反函数及其定义域.

解　由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 解出 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$.

由于 $x\in[-1,0]$,所以 $x=-\sqrt{1-y^2}$. x 与 y 互换,得 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

所以,$y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,0]$ 的反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 其定义域为 $D=[0,1]$.

4. 复合函数

(1) 复合函数也称为"套函数". 并不是任意的外函数 $y=f(u)$ 与内函数 $u=\varphi(x)$ 都可以复合成 $y=f[\varphi(x)]$. 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 要求外函数 $y=f(u)$ 的定义域与内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空.

(2) 复合函数的复合过程. 复合函数的复合过程有两层含义. 一是能将简单函数用"代入"的方法构成复合函数;二是能将复合函数以最少的步骤"拆解"成基本初等函数或由其和、差、积、商构成的简单函数.

例 4　由函数 $y=f(u)=\lg u$;$u=\varphi(x)=-2-x^2$ 能否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$?

解　外函数 $f(u)=\lg u$ 的定义域是 $D(u)=(0,+\infty)$.

内函数 $u=-2-x^2$ 的值域是 $M(u)=(-\infty,-2)$.

$$M(u)\cap D(u)=\varnothing.$$

所以,$y=f[\varphi(x)]=\lg(-2-x^2)$不构成复合函数.

例 5　下面给出的函数 $y=\sin^2(2x+5)$的拆解过程,哪一种符合要求?

A　$y=u^2$,$u=\sin(2x+5)$

B　$y=u$,$u=\sin^2 v$,$v=2x+5$

C　$y=u^2$,$u=\sin v$,$v=2x+5$

D　$y=\sin^2 u$,$u=2x+5$

解　A 中 $u=\sin(2x+5)$不是基本初等函数.

B 中"$y=u$"一步多余,$u=\sin^2 v$ 仍是复合函数,

D 中 $y=\sin^2 u$ 仍是复合函数.

这三种"拆解"过程都不符合要求.

C 中 $y=u^2$ 为幂函数,$u=\sin v$ 为三角函数.$v=2x+5$ 为幂函数与常数的四则运算.并且,C 中的"拆解"能够用"代入"的方法复合成 $y=\sin^2(2x+5)$.

因此,上述"拆解"复合函数的过程只有 C 符合要求.

5.分段函数

"由两个或两个以上的解析式表示的一个函数"或"在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示的函数"称为分段函数.

分段函数的定义域是各段函数定义域的并集;

分段函数求函数值时,自变量属于哪一个定义区间,就用哪一个相对应的解析表达式求函数值;

分段函数一般不是初等函数.

例 6　设有函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ x^2-1 & |x|\geqslant 1\end{cases}.$$

(1) 求 $f(x)$和 $g(x)$的定义域.

(2) 求函数值 $f(3)$,$g(-3)$,$f[g(1)]$,$g[f(1)]$.

(3) 作出 $f(x)$,$g(x)$的图形.

解　(1) $f(x)$的定义域 $D_1=(-\infty,+\infty)$.

$g(x)$的定义域 $D_2=(-1,1)\cup(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

$=(-\infty,+\infty)$.

(2) $f(3)=1$;$g(-3)=(-3)^2-1=8$.

$f[g(1)]=f(0)=0$;$g[f(1)]=g(1)=0$.

(3) 图 1-1 为 $f(x)$的图形.图 1-2 为 $g(x)$的图形.

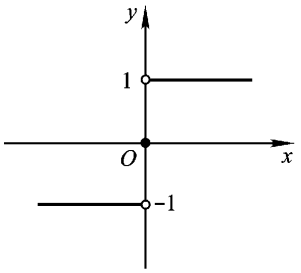

图 1－1

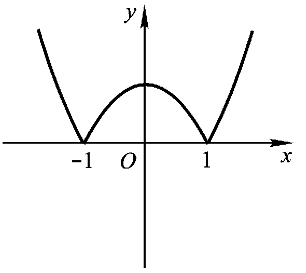

图 1－2

三、典型例题

例 1 已知 $f(x+1)=\begin{cases}2x+1 & x\leqslant 0\\ x^2-2x & x>0\end{cases}$，求 $f(x)$.

解 设 $x+1=t$，$x=t-1$.

$$f(t)=\begin{cases}2(t-1)+1 & t-1\leqslant 0\\ (t-1)^2-2(t-1) & t-1>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2t-1 & t\leqslant 1\\ t^2-4t+3 & t>1\end{cases}.$$

将 t 换成 x，得

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\leqslant 1\\ x^2-4x+3 & x>1\end{cases}.$$

例 2 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 因为 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

所以
$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

所以
$$f(x)=x^2-2.$$

例 3 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$，求 $y=f(x-2)$ 的定义域.

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$，故有 $-1\leqslant x<2$.
因此有 $-1\leqslant x-2<2$，即 $1\leqslant x<4$.

所以 $y=f(x-2)$ 的定义域为 $[1,4)$.

例 4 指出 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 的复合过程并求其定义域.

解 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 的定义域：

要满足 $\ln\sqrt{x}\geqslant 0$，必须 $\sqrt{x}\geqslant 1$，即 $x\geqslant 1$.

所以 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 的定义域为 $D=[1,+\infty)$.

例 5 求函数 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 的反函数和反函数的定义域.

解　由$y=\pi+\arctan\dfrac{x}{2}$解出 x,得

$$x=2\tan(y-\pi).$$

x 与 y 互换,得

$$y=2\tan(x-\pi).$$

所以 $y=\pi+\arctan\dfrac{x}{2}$的反函数是 $y=2\tan(x-\pi)$.

因为$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,所以$\dfrac{\pi}{2}<\pi+\arctan\dfrac{x}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$.

所以 $y=\pi+\arctan\dfrac{x}{2}$的值域是$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.亦即其反函数 $y=2\tan(x-\pi)$的定义域为$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

例 6　求 $f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x & x>4 \end{cases}$ 的反函数.

解　$x\in(-\infty,1)$时,$f(x)\in(-\infty,1)$.$f^{-1}(x)=x$.

$x\in[1,4]$时,$f(x)\in[1,16]$.$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

$x\in(4,+\infty)$时.$f(x)\in(16,+\infty)$.$f^{-1}(x)=\log_2 x$.

所以 $f(x)$的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16. \\ \log_2 x & x>16 \end{cases}$$

例 7　设 $f(x)$是以 3 为周期的奇函数,且 $f(-1)=2$,求 $f(7)$的值.

解　因为 $f(x)$以 3 为周期,所以 $f(x+3)=f(x)$.

所以 $f(7)=f(4+3)=f(4)$.

由已知 $f(-1)=2$,而 $f(-1)=f(-4+3)=f(-4)$.

因为 $f(x)$为奇函数,$f(-4)=-f(4)=2$.

所以 $f(7)=f(4)=-2$.

四、习题选解

习题一　(函数部分)

2．已知 $f(x)=ax+b$,且 $f(0)=-2$,$f(3)=5$,求 a 和 b.

解　$a\times 0+b=-2$,　$a\times 3+b=5$.解之得 $a=\dfrac{7}{3}$,$b=-2$.

4．求下列函数的定义域:

(3) $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$　　(5) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

解 (3) $\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}>0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<1\\ x\geqslant -2\end{cases}$.

所以，$y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$的定义域为$[-2,1)$.

(5) $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，即$-1\leqslant x\leqslant 3$.

所以 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$的定义域是$[-1,3]$.

5．判定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ (3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ (5) $f(x)=\log_3\dfrac{1+x}{1-x}$

解 (1)
$$f(-x)=\frac{3^{-x}+3^{-(-x)}}{2}=\frac{3^x+3^{-x}}{2}=f(x).$$

所以 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$为偶函数.

(2)
$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=\lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\\&=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

(5)
$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_3\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\\&=\log_3\frac{1-x}{1+x}\\&=\log_3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\\&=-\log_3\frac{1+x}{1-x}\\&=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\log_3\dfrac{1+x}{1-x}$是奇函数.

6．设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant -1\\ x^2 & -1<x\leqslant 1\\ 2-x & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(2)$，并作出函数的图像.

解 $f(0)=0^2=0$，$f(-1)=-1+2=1$，

$f(1)=1^2=1$，$f(-2)=-2+2=0$，

$f(2)=2-2=0$. 图 1－3 即为 $f(x)$ 的图像.

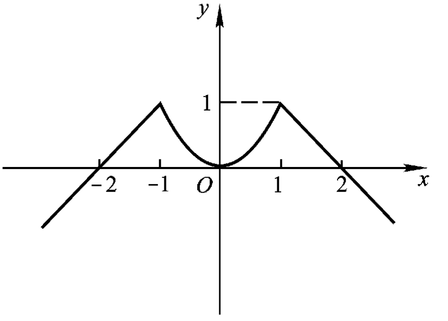

图 1－3

7. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解 $$f[\varphi(x)]=\frac{1+\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=x+1.$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1+x}{x}}=\frac{x}{1+x}.$$

10. 求下列函数的反函数：

(2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　　(4) $y=1-\lg(x+2)$

解 (2) 由 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 解出 x：$x=\dfrac{1+y}{y-1}$.

将 x 与 y 互换. 得 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

(4) 由 $y=1-\lg(x+2)$ 解出 x：$x=10^{1-y}-2$.

将 x 与 y 互换. 得 $y=10^{1-x}-2$.

第二节　极限与连续

一、学习指导

(一) 基本要求

1. 理解数列和函数极限的概念，清楚极限存在的判定准则，掌握极限的性质.
2. 理解无穷大量、无穷小量的概念，清楚它们之间的关系，会对无穷小的阶进行比较.
3. 能运用极限的四则运算法则和两个重要极限熟练地进行极限运算.
4. 会利用极限存在的充要条件讨论分段函数在分界点处的极限.
5. 理解连续函数的概念，掌握连续函数的四则运算法则，会判定分段函数在分界点处的连续性.
6. 清楚基本初等函数和初等函数的连续性.
7. 会求函数的间断点并判定间断点的类型.
8. 清楚闭区间上连续函数的性质.

(二) 重点与难点

重点 数列与函数的极限的概念. 连续函数的概念求极限的方法. 初等函数的连续性.

难点 极限概念. 判断函数的连续性. 闭区间上连续函数的性质.

二、疑难解析

1. 数列与函数的极限定义

在数列的极限定义 1.9 中,“如果当 n 无限变大时,x_n 无限趋近于确定的常数 A”的意思是,对于任意给定的很小的正数 ε,数列 $\{x_n\}$ 中总有一项 x_N,自这项后的数列中的无穷多项 x_{N+1},x_{N+2},…,x_{N+k},…与常数 A 之间的距离 $|x_n - A|$($n>N$)要比给定的正数 ε 还要小,即 $|x_n - A|<\varepsilon(n>N)$. 从几何上看,若数列 $\{x_n\}$ 收敛于常数 A,则在小区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$外就只有数列的有限项 $x_1, x_2, \cdots, x_N$,而数列的无穷多项 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+k}, \cdots$都落在小区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内.

在函数极限的定义 1.10 中.“当自变量 x 无限增大时,函数 $f(x)$无限趋近于某个确定的常数 A”的意思是,对任意给定的很小的正数 ε,存在一个正数 N. 在区间$(N, +\infty)$内的所有 x 对应的函数值 $f(x)$与常数 A 之间的距离 $|f(x)-A|$ 比给定的正数 ε 还要小,即 $|f(x)-A|<\varepsilon$ $(x>N)$. 从几何上看,就是在区间$(N, +\infty)$内对应的函数图像位于两条平行于 Ox 轴的直线 $y=A-\varepsilon$, $y=A+\varepsilon$ 之间.

在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的定义中,特别强调了 $x\to x_0$ 时 $x\neq x_0$,这说明,$f(x)$在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在与 $f(x)$在点 x_0 的值 $f(x_0)$以及在 x_0 处是否有定义没有关系.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. $f(1)$不存在.

但

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)\\ &= 2\end{aligned}$$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

由此可知,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中有一个不存在或都存在但二者不相等,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

这两个结论常用来判定分段函数在分界点处的极限是否存在.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & |x|\leqslant 1, x\neq 0\\ 2-x^2 & |x|>1\end{cases}$,

问(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$,(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,(3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在?

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2-x^2)=2-(-1)^2=1.$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{x}=\frac{(-1)^2}{-1}=-1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x^2)=1.$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

3．无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量与无穷大量都是极限概念，常数中只有 0 是无穷小量，而无论多么大的常数都不能称为无穷大量.

(2) 要分清无穷大量和无界变量是两个不同的概念，无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

例 3　设有 $\{x_n\}$：0，1，0，2，0，3，…

则 $\{x_n\}$是无界变量，但它不是无穷大量.

(3) 无穷多个无穷小的和不一定是无穷小量.

例 4　当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to0$，$\frac{1}{n}$是 $n\to\infty$时的无穷小量，

但$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}=\frac{n}{n}=1$，不再是无穷小量.

(4) 等价无穷小代换定理. 如果在自变量的同一个变化过程中，α，α_1，β，β_1 都是无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$ 则有

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}；\quad \lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot f(x)=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot f(x).$$

在求极限时，利用等价无穷小代换常可使复杂的计算简化，因此，掌握一批等价无穷小量会很方便.

常用的有：① $x\to0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1.$$

② $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

③ $x\to0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

解　$x\to+\infty$时，$\frac{3}{x}\to0$，$\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\sim\frac{3}{x}$.

所以
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\ln(1+2^x)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\ln2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\left[\ln2^x+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\cdot x\cdot\ln 2+\frac{3}{x}\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3\ln 2+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{2^x}\left(x\to+\infty\text{时},\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\sim\frac{1}{2^x}\right)$$

$$=3\ln 2.$$

4. **两个重要极限**

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ **与** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ **称为两个重要极限.在应用这两个重要极限求其他函数的极限时,常用下列的形式:**

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1\ ;\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$$

只要上面两式中□内的形式完全相同,就可利用上述结论.

例 6 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=\frac{1}{2}$.

例 7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^{\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}$.

5. **连续函数的概念**

若函数 $y=f(x)$**在** x_0 **及其附近有定义且有** $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$**,则称** $y=f(x)$**在** x_0 **点连续.**

条件 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$ **等价于** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

因此,函数 $y=f(x)$**在点** x_0 **处连续必须满足三个条件:**

(1) $f(x_0)$**存在;**

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$**存在;**

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

讨论分段函数在分界点处的连续性时,常要据此进行判断.

例 8 **已知** $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$**,讨论** $f(x)$**在** $x_0=0$ **处是否连续.**

解 $f(0)=0$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0=1$**,** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$**,所以** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\neq f(0)$**,所以** $f(x)$**在** $x_0=0$ **处不连续.**

6. **函数的间断点**

如果函数 $f(x)$**有下列情况之一,点** x_0 **就是** $f(x)$**的间断点:**

(1) $f(x_0)$**不存在;**

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$**不存在;**

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数的间断点分为两类.设 x_0 **为** $f(x)$**的间断点.**

第一类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在.

第一类间断点有两种：

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$x_0$为第一类间断点中的可去型间断点；

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$x_0$为第一类间断点中的跳跃型间断点.

第二类间断点：非第一类的间断点.

第二类间断点也有两种：

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$中至少有一个为无穷大，$x_0$为第二类间断点中的无穷型间断点；

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$振荡不存在，$x_0$为第二类间断点中的振荡型间断点.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x<0\\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & x>1\end{cases}$，

求$f(x)$的间断点并判断其类型.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x^2-1}=-1$.

所以$x_0=0$是$f(x)$的跳跃型间断点.属于第一类间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$

所以$x_0=1$是$f(x)$的第二类间断点中的无穷型间断点.

7．求极限的方法归纳

(1) 利用初等函数的连续性，也称‘代入法’求极限，函数值即为极限值.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 分解因式约去非零因子.

(3) 根式有理化.

(4) 利用极限的四则运算法则.

(5) 利用无穷小、无穷大的性质以及二者之间的关系.

(6) 利用两个重要极限.

(7) 利用等价无穷小代换定理.

(8) 利用无穷小量分出法及其结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}.$$