普通高等教育“十五”国家级规划教材
（高职高专教育）

# 经济应用数学——
# 概率论与数理统计学习辅导

田应辉　阳　妮　冷志魁　编

高等教育出版社

策划编辑　蒋　青
责任编辑　郭思旭
封面设计　杨立新
版式设计　陆瑞红
责任校对　戈　捷
责任印制

## 内容提要

本书是根据高职高专教材《经济应用数学——概率论与数理统计》编写的学习辅导书。全书共七章，每章由内容小结、学习指导、典型例题、自测题四部分组成，书末附有三套模拟试卷，自测题及模拟试卷答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经济类与管理类专业的教学参考书。


**图书在版编目(CIP)数据**

经济应用数学——概率论与数理统计学习辅导/田应辉，阳妮，冷志魁编．—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-012411-4

Ⅰ.经… Ⅱ.①田… ②阳… ③冷… Ⅲ.①经济数学-高等学校：技术学校-教材②概率论-高等学校：技术学校-教学参考资料③数理统计-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 038068 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 排　　版 | 高等教育出版社照排中心 | | |
| 印　　刷 | | | |
| 开　　本 | 787×1092　1/16 | 版　　次 | 年　月第　版 |
| 印　　张 | 5.75 | 印　　次 | 年　月第　次印刷 |
| 字　　数 | 130 000 | 定　　价 | 6.90 元 |

# 出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000] 19 号)，提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设的第一步工作。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

# 前　　言

本书是教育部高职高专规划教材《经济应用数学——概率论与数理统计》(田应辉等编)的配套辅导书。它以上述教材为主要教科书,同时兼顾其他同类教材,读者即便使用其他教材,也可采用本书作为参考书。本书是根据广大高职高专教师与学生的实际需要编写的,既可作为教师的"教学参考",又可作为学生的"学习指导"。

本书保持了《经济应用数学——概率论与数理统计》的体系,按原来的章编排,对教材中各章的内容进行了归纳总结,提出了教学的基本要求,指出了重点、难点。通过典型例题分析,帮助学生正确理解概念,理清解题的思路、方法及其规律,提高学生运用概率统计的思想方法,分析和解决经济问题的能力。每章后的自测题可以使学生了解自己对该章内容的掌握情况,书末的模拟试卷可以使学生估计自己的水平,同时对教师命题有一定的参考作用。

本书第一、二章由田应辉编写,第三、四、七章由冷志魁编写,第五、六章由阳妮编写。全书由田应辉统稿。

限于编者水平,书中难免有不足和疏漏之处,敬请读者不吝指正。

编者

2003 年 2 月

# 目　　录

# 第一章　随机事件及其概率

## 一、内 容 小 结

**(一) 随机事件**

1. **随机试验**　对随机现象的观察过程称为随机试验. 随机试验有如下三个特征：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果预先是知道的，并且不止一个；

(3) 每次试验总出现这些结果中的一个，但在试验之前不能确定出现哪个结果.

2. **基本事件与样本空间**　随机试验的每个可能结果称为一个基本事件（或样本点）. 一个随机试验的所有基本事件构成的集合，称为这个随机试验的样本空间，记作 $\Omega$.

3. **随机事件**　样本空间 $\Omega$ 的一个子集称为一个随机事件，简称事件. 通常用大写英文字母表示事件. 在一次试验中，当且仅当事件 $A$ 包含的一个基本事件出现时，称事件 $A$ 发生. 把基本事件 $\omega(\omega\in\Omega)$ 与事件 $\{\omega\}$ 等同看待，这样，基本事件也是随机事件. 空集 $\varnothing$ 是随机事件，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件. 样本空间 $\Omega$ 本身也是随机事件，它在每次试验中都必然发生，称为必然事件.

**(二) 事件间的关系与运算**

1. **事件的包含**　如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，即事件 $A$ 中的每个样本点都包含在 $B$ 中，则称 $A$ 含于 $B$，或 $B$ 包含 $A$，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

2. **事件的相等**　如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即事件 $A$ 与 $B$ 包含完全相同的样本点，则称事件 $A$ 与 $B$ 相等或等价，记作 $A=B$.

3. **事件的和**　“事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生”是一个事件，称之为 $A$ 与 $B$ 的和，记作 $A+B$. $A+B$ 是由 $A$ 与 $B$ 包含的所有样本点构成的集合.

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

4. **事件的积**　“事件 $A$ 与 $B$ 同时发生”是一个事件，称之为 $A$ 与 $B$ 的积，记作 $AB$. $AB$ 是由 $A$ 与 $B$ 的所有公共的样本点构成的集合.

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积，记作 $A_1A_2\cdots A_n$.

5. **事件的差**　“事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生”是一个事件，称之为 $A$ 与 $B$ 的差，记作 $A-B$. $A-B$ 是由所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的样本点构成的集合.

6. **互不相容事件**　如果事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 $A$ 与 $B$ 互不相容.

如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都互不相容，则称它们两两互不相容.

7. **逆事件**　设 $A$ 是一个事件，称事件 $\Omega-A$ 为 $A$ 的逆事件或对立事件，记作 $\bar{A}$，即

$\overline{A}=\Omega-A$. $A$ 与 $\overline{A}$ 有如下关系

$$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing.$$

8．完备事件组　如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组.

（三）事件的运算法则

随机事件的运算满足下列运算法则（与集合的运算法则相同）：

1．交换律　$A+B=B+A, AB=BA$；

2．结合律　$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC)$；

3．分配律　$A(B+C)=AB+AC$；$A+BC=(A+B)(A+C)$；

4．摩根律　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

5．$A-B=A\overline{B}$；$\overline{\overline{A}}=A$.

（四）随机事件的概率

1．频率　设在 $n$ 次独立重复试验中，事件 $A$ 发生了 $\mu$ 次，则称比值 $\frac{\mu}{n}$ 为 $A$ 在这 $n$ 次试验中发生的频率，记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$.

2．概率的统计定义　实践证明，在大量（$n$ 很大）重复试验中，事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$ 一定在某个确定的数值 $p$ 附近摆动，而呈现出一种稳定性. 数值 $p$ 的大小反映了事件 $A$ 发生的可能性大小，$p$ 称为事件 $A$ 的概率，记作 $P(A)=p$.

3．概率的古典定义　如果一个随机试验的样本空间 $\Omega$ 是有限集，且各基本事件发生的可能性相等，则称它为古典概型. 在古典概型中，如果基本事件总数为 $n$，事件 $A$ 包含其中的 $m$ 个基本事件，则事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

4．概率的基本性质及加法公式

（1）对任意事件 $A$，总有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

（2）$P(\varnothing)=1, P(\Omega)=1$.

（3）若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

（4）对任意事件 $A$，有 $P(A)+P(\overline{A})=1$.

（5）若事件 $A, B$ 满足 $A\subseteq B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

（6）若事件 $A, B$ 满足 $A\subseteq B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

（7）概率的加法公式　对任意两个事件 $A, B$，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意三个事件 $A, B, C$，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

一般地,对任意 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

**(五)条件概率及概率的乘法公式**

1.**条件概率的定义** 设 $A,B$ 是两个随机事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 $B$ 发生的条件下,事件 $A$ 发生的条件概率.

在实际计算条件概率时,通常是按条件概率的意义直接计算条件概率,或按上述定义式计算条件概率.

2.**概率的乘法公式** 设 $A,B$ 是两个随机事件,则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0),$$

或

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad(P(A)>0).$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个随机事件,则有

$$P(A_1,A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

**(六)事件的独立性**

1.**两个事件独立性的定义** 设 $A,B$ 是两个事件,如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 $A$ 与 $B$ 相互独立.

2.事件 $A$ 与 $B$ 相互独立的充要条件是:

$$P(A|B)=P(A)\qquad(P(B)>0),$$

或

$$P(B|A)=P(B)\qquad(P(A)>0).$$

3.如果事件 $A$ 与 $B$ 相互独立,则下列三对事件也相互独立:$\overline{A}$ 与 $B$;$A$ 与 $\overline{B}$;$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

4.如果事件 $A$ 与 $B$ 相互独立,则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B),$$

或

$$P(A+B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

5.**多个事件独立性的定义** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant2)$ 个事件,如果对其中的任意 $k$ $(k=2,3,\cdots,n)$ 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$,都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

在实际应用时,通常根据独立性的直观意义去判断事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的独立性.

6.如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,那么,把其中一部分事件换成它们的对立事件,得到的 $n$ 个事件仍然相互独立.

7.如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

**（七）全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式**

1. **全概率公式** 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 $B$,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

特别地,有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\quad(0<P(A)<1).$$

2. **贝叶斯公式** 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 $B(P(B)>0)$,有

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

## 二、学 习 指 导

**（一）基本要求**

1. 理解随机事件的概念,理解在一次试验中一个随机事件发生的含义；
2. 理解随机事件的关系与运算,会用概率论的语言来描述这些关系和运算,会用已给事件的关系及运算来表示新事件；
3. 理解随机事件概率的统计定义和古典定义,并会利用古典定义计算概率；
4. 掌握概率的基本性质和加法公式,并能熟练运用；
5. 理解条件概率的含义,掌握概率的乘法公式；
6. 理解随机事件相互独立的含义,能根据独立性的直观意义判定事件的独立性,会利用独立性计算概率；
7. 掌握全概率公式与贝叶斯公式.

**（二）重点与难点**

本章重点内容为:随机事件及其运算,随机事件概率的概念及性质,概率的加法公式,条件概率,概率的乘法公式,随机事件的独立性,全概率公式与贝叶斯公式.难点内容为:条件概率,事件的独立性,全概率公式与贝叶斯公式.

## 三、典 型 例 题

**例 1** 向指定的目标连续射击 3 次,用 $A_i$ 表示"第 $i$ 次射中目标"$(i=1,2,3)$;$B_j$ 表示"3 次射击恰好射中目标 $j$ 次"$(j=0,1,2,3)$;$C_k$ 表示"3 次射击至少射中目标 $k$ 次"$(k=0,1,2,3)$.

(1) 用 $A_1,A_2,A_3$ 表示 $B_j$ 和 $C_k(j,k=0,1,2,3)$；

(2) 用 $B_j$ 表示 $C_k(j,k=0,1,2,3)$.

**解** (1) $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$;$B_3=A_1A_2A_3$;$C_0=A_1+A_2+A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3(=\Omega)$;$C_1=A_1+A_2+A_3$;$C_2=A_1A_2$

$+A_1A_3+A_2A_3$；$C_3=A_1A_2A_3$.

（2）$C_0=B_0+B_1+B_2+B_3(=\Omega)$；$C_1=B_1+B_2+B_3$；$C_2=B_2+B_3$；$C_3=B_3$.

**例 2** 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.25$，$P(A-B)=0.25$，求 $P(AB)$，$P(A+B)$，$P(B-A)$，$P(\overline{A}\overline{B})$.

**解** 由于 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，故

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4-0.25=0.15,$$
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.25-0.15=0.5,$$
$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.25-0.15=0.1,$$
$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0.5=0.5.$$

**例 3** 已知 $P(A)=0.4$，$P(\overline{A}B)=0.2$，$P(\overline{A}\overline{B}C)=0.1$，求 $P(A+B+C)$.

**解** 由 $P(\overline{A}B)=P[\overline{A}(\Omega-\overline{B})]=P(\overline{A}-\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}\overline{B})$，得 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=(1-0.4)-0.2=0.4$. 又由 $P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$，得 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}C)=0.4-0.1=0.3$，所以

$$P(A+B+C)=1-P(\overline{A+B+C})=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-0.3=0.7.$$

**例 4** 设有 $n$ 个人，$N$ 个房间（$n\leqslant N$），每个人都以 $\frac{1}{N}$ 的概率分配到每一房间中，求

（1）某指定的 $n$ 个房间内各有一人的概率；

（2）恰有 $n$ 个房间各有一人的概率.

**解** 为求基本事件总数，可以设想将 $n$ 个人分别编号 $1,2,\cdots,n$，1 号人随机分配到 $N$ 个房间内，共有 $N$ 种分配方式，2 号人随机分配到 $N$ 个房间内，也有 $N$ 种分配方式，…，$n$ 号人随机分配到 $N$ 个房间内，还是有 $N$ 种分配方式，由乘法原理，将 $n$ 个人随机分配到 $N$ 个房间内，共有 $N^n$ 种分配方式，这就是基本事件总数.

（1）设 $A$ 表示"某指定的 $n$ 个房间内各有一人". 把 $n$ 个人分配到指定的 $n$ 个房间内，且每个房间各有一人，一种分配方式就是一个 $n$ 个元素的全排列，故 $A$ 包含的基本事件数为 $P_n^n=n!$，因此

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

（2）用 $B$ 表示"恰有 $n$ 个房间各有一人". 从 $N$ 个房间中选出 $n$ 个房间，共有 $\mathrm{C}_N^n$ 种选法，把 $n$ 个人分配到选出的 $n$ 个房间中，共有 $n!$ 种分配方式，故 $B$ 包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_N^n\cdot n!$，因此

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

**例 5** 某班有 $n$（$n\leqslant 365$）个学生，求这个班上至少有两个学生在同一天过生日的概率（一年按 365 天计）.

**解** 若把 365 天看作 365 个房间，把某学生在某天过生日视为该生分配到该房间，则这个问题就抽象为 把 $n$ 个人分配到 365 个房间中，求至少有两个人分在同一房间的概率. 若用 $A$ 表示"班上至少有两个学生在同一天过生日（即至少有两人分在同一房间）"，则 $\overline{A}$ 表示"班上学生的生日各不相同（即恰有 $n$ 个房间各有一人）". 由例 4 结果得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{365^{n}}.$$

**例 6** 从 5 双不同鞋号的鞋子中任意取 4 只，求 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率.

**解** 5 双鞋子共 10 只，从中任取 4 只，共有 $C_{10}^{4}$ 种不同取法，即基本事件总数为 $C_{10}^{4}$. 设 $A$ 表示"取出的 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双".

**方法一** $A$ 包含的基本事件有下面两种情况. 第一种情况是恰有 2 只配成一双，共有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法. 事实上，配成对的一双有 $C_5^1$ 种取法，剩下的两只可以是其余的 4 双中任取两双，再各取 1 只，两双的取法共有 $C_4^2$ 种，两双中各取 1 只有 $C_2^1C_2^1$ 种取法，以上搭配共有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法. 第二种情况是 4 只可配成 2 双，共有 $C_5^2$ 种取法.

所以，$A$ 包含的基本事件数为 $C_5^1C_4^1C_2^1C_2^1+C_5^2$，于是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

**方法二** $\overline{A}$ 表示"取出的 4 只鞋子中没有 2 只可配成一双"，$\overline{A}$ 包含的基本事件数为 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，故

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{13}{21}.$$

**例 7** 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A+B)$.

**解** $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 得 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$. 由加法公式，得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

**例 8** 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法求).

**解** 设 $A$ 表示"两颗骰子的点数之和为 7"，$B$ 表示"其中有一颗为 1 点".

**方法一** 先求 $P(A)$ 和 $P(AB)$. 两颗骰子的点数 $m$ 和 $n$ 构成一有序数对 $(m,n)$，$m$ 与 $n$ 都可取 1 到 6 之间的整数，故基本事件总数为 $6\times6=36$. $A$ 包含如下 6 个基本事件：$(1,6)$，$(2,5)$，$(3,4)$，$(4,3)$，$(5,2)$，$(6,1)$. $AB$ 包含如下 2 个基本事件：$(1,6)$，$(6,1)$. 故

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

由条件概率的定义，所求的条件概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}.$$

**方法二** 在已知两颗点数之和为 7(即 $A$ 发生)的条件下,共有 6 种可能结果:(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),而其中有 2 个结果(1,6)与(6,1)为"其中有一颗为 1 点".故所求条件概率为

$$P(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

**例 9** 袋中有 5 个黑球和 4 个白球,从中任取一球,然后放入 2 个与取出的球同色的球,再从中任取一球,求两次都取到白球的概率.

**解** 设 $A_i$ 表示"第 $i$ 次取到白球"($i=1,2$),则"两次都取到白球"这一事件为 $A_1A_2$,由乘法公式,

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1).$$

在第一次取球时,袋中共有 9 个球,其中 4 个为白球,故 $P(A_1)=\frac{4}{9}$.在已知第一次取到白球(即 $A_1$ 发生)的条件下,第二次取球时袋中共有 10 个球,其中 5 个为白球,故 $P(A_2|A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.所以

$$P(A_1A_2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{9}.$$

**例 10** 一批产品共 100 件,其中有 5 件是废品.现对该批产品进行不放回抽样检查,整批产品不合格的条件是:被检查的 5 件产品中至少有 1 件是废品.求该批产品因不合格而被拒绝接收的概率.

**解** **方法一** 设 $A_i$ 表示"被检查的第 $i$ 件产品是废品"($i=1,2,3,4,5$),$B$ 表示"该批产品被拒绝接收".则 $B=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$.于是

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&\quad\cdot P(\overline{A}_5|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4).\end{aligned}$$

在抽取第 1 件产品时,产品共有 100 件,其中 95 件为正品,故 $P(\overline{A}_1)=\frac{95}{100}$;在已知第 1 次取到正品(即 $\overline{A}_1$ 发生)的条件下,抽取第 2 件产品时,产品共有 99 件,其中 94 件为正品,故 $P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{94}{99}$;同理,$P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{93}{98}$,$P(\overline{A}_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{92}{97}$,$P(\overline{A}_5|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=\frac{91}{96}$.所以

$$P(B)=1-\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}\approx0.23.$$

**方法二** 本题也可以用概率的古典定义来计算.先算 $P(\overline{B})$.从 100 件产品中不放回地依次取 5 件,基本事件总数为 $P_{100}^5$(或 $C_{100}^5$);$\overline{B}$ 表示"该批产品被接收",即抽检的 5 件产品均为合格品,$\overline{B}$ 包含的基本事件数为 $P_{95}^5$(或 $C_{95}^5$).所以

$$P(\overline{B})=\frac{P_{95}^5}{P_{100}^5}\left(\text{或}\frac{C_{95}^5}{C_{100}^5}\right),$$

于是,

$$P(B)=1-P(\overline{B})\approx0.23.$$

**例 11**　一个工人看管三台机床,在一小时内机床不需要工人照管的概率:第一台为 0.9,第二台为 0.8,第三台为 0.7. 求在一小时内三台机床中最多有一台需要工人照管的概率.

**解**　设 $A_i$ 表示"一小时内第 $i$ 台机床需要工人照管"($i=1,2,3$),$B$ 表示"最多有一台机床需要照管",则

$$B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

由于上式右端的四个事件互不相容,故

$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

由题设,$P(\overline{A}_1)=0.9$,$P(\overline{A}_2)=0.8$,$P(\overline{A}_3)=0.7$,从而,$P(A_1)=0.1$,$P(A_2)=0.2$,$P(A_3)=0.3$. 由于各台机床是否需要工人照管是相互独立的,故

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.504,$$
$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.056,$$
$$P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=0.126,$$
$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=0.216,$$

所以

$$P(B)=0.504+0.056+0.126+0.216=0.902.$$

**例 12**　当工厂的某个系统发生危险时,报警回路闭合并发出警报. 我们可用多个开关并联以改善可靠性,一旦发生危险时,只要并联的开关中至少有一个闭合就能使报警回路闭合而发出警报. 设每个开关的可靠性(即发生危险时闭合的概率)为 0.96,且各个开关闭合与否是相互独立的. 如果需要一个可靠性(即报警回路闭合的概率)至少为 0.9999 的系统,则在报警回路中至少应并联多少个开关?

**解**　设并联 $n$ 个开关,$A_i$ 表示"发生危险时第 $i$ 个开关闭合",$B$ 表示"报警回路闭合",则 $B=A_1+A_2+\cdots+A_n$. 由题设,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,故

$$P(B)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

而 $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)=1-0.96=0.04$($i=1,2,\cdots,n$),故

$$P(B)=1-(0.04)^n.$$

依题意,要求 $P(B)\geqslant 0.9999$,即 $(0.04)^n\leqslant 0.0001$,所以,

$$n\geqslant\frac{\lg 0.0001}{\lg 0.04}\approx 2.86,$$

这表明,至少需要并联 3 个开关.

**例 13**　市场供应的热水瓶中,甲厂产品占 50%,乙厂产品占 30%,丙厂产品占 20%. 甲厂产品的合格率为 90%,乙厂产品的合格率为 85%,丙厂产品的合格率为 80%. 从市场上任意买一个热水瓶,求

(1) 买到合格品的概率;

(2) 已知买到合格品,这个合格品是甲厂产品的概率.

**解**　用 $A_1$ 表示"买到甲厂产品",$A_2$ 表示"买到乙厂产品",$A_3$ 表示"买到丙厂产品",$B$ 表示"买到合格品". 由于在一次试验(即从市场上任意买一个热水瓶)中,$A_1,A_2,A_3$ 有且只有一个发生,故 $A_1,A_2,A_3$ 构成完备事件组.

（1）根据全概率公式，得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3).$$

由题设，$P(A_1)=50\%$，$P(A_2)=30\%$，$P(A_3)=20\%$，$P(B|A_1)=90\%$，$P(B|A_2)=85\%$，$P(B|A_3)=80\%$，因此

$$P(B)=\frac{50}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{85}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{80}{100}=0.865.$$

（2）根据贝叶斯公式，所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1|B)&=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}\\&=\frac{\frac{50}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{50}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{85}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{80}{100}}\\&=\frac{90}{173}\\&\approx 0.52.\end{aligned}$$

**例 14** 某仪器上有三个灯泡，烧坏第一、第二、第三个灯泡的概率分别为 0.1、0.2、0.3. 当三个灯泡都未烧坏时，仪器不会发生故障；当烧坏一个灯泡时，仪器发生故障的概率为 0.25；当烧坏两个灯泡时，仪器发生故障的概率为 0.6；当烧坏三个灯泡时，仪器发生故障的概率为 0.9，求仪器发生故障的概率.

**解** 设 $A_i$ 表示"第 $i$ 个灯泡被烧坏"($i=1,2,3$)，$B_j$ 表示"有 $j$ 个灯泡被烧坏"($j=0,1,2,3$)，$C$ 表示"仪器发生故障". 显然，$A_1$，$A_2$，$A_3$ 相互独立，$B_0$，$B_1$，$B_2$，$B_3$ 构成完备事件组. 由题设 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.3$，从而 $P(\bar{A}_1)=0.9$，$P(\bar{A}_2)=0.8$，$P(\bar{A}_3)=0.7$. 所以

$$P(B_0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0.504,$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)\\&=0.398,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)\\&=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)\\&=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.092,\end{aligned}$$

$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.006.$$

又由题设，$P(C|B_0)=0$，$P(C|B_1)=0.25$，$P(C|B_2)=0.6$，$P(C|B_3)=0.9$. 根据全概率公式，得

$$P(C)=\sum_{j=0}^{3}P(B_j)P(C|B_j)=0.1601.$$

**例 15** 有甲、乙两个箱子，甲箱中有 2 个白球 1 个黑球，乙箱中有 1 个白球 2 个黑球. 现从甲箱中任取一球放入乙箱中，再从乙箱中任取一球，求从乙箱中取到白球的概率.

**解** 设 $A$ 表示"从甲箱中取一个白球放入乙箱"，$B$ 表示"从乙箱中取得白球"，则 $\bar{A}$ 表示"从甲箱中取一黑球放入乙箱". 由题设得 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(\bar{A})=\frac{1}{3}$，$P(B|A)=\frac{2}{4}$，$P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$，根据全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

## 四、自 测 题

### 自 测 题（A）

**（一）填空题**

（1）一次掷两颗骰子，① 若观察两颗骰子各自出现的点数搭配情况，这个随机试验的样本空间为______；② 若观察两颗骰子的点数之和，则这个随机试验的样本空间为______.

（2）事件 $A,B,C$ 至多有两个发生可表为______，恰好有两个发生可表为______.

（3）已知 $P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，则 $P(B|A+\bar{B})$______.

（4）把 2 封信随机地投入 4 个邮筒中，则前两个邮筒没有信的概率为______，第一个邮筒恰有一封信的概率为______.

（5）已知某种反坦克弹对坦克靶单发命中率为 0.7，现连续地对坦克靶射出三发炮弹，命中坦克靶的概率为______.

**（二）单项选择题**

（1）若事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，$P(A+B)=0.6$，$P(A)=0.4$，则 $P(B)=$（　　）.

① 0.5； ② $\frac{1}{3}$； ③ $\frac{1}{8}$； ④ 0.7.

（2）设 $A,B,C$ 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，则 $A,B,C$ 至少有一个发生的概率为（　　）.

① $\frac{5}{8}$； ② $\frac{5}{7}$； ③ $\frac{3}{4}$； ④ $\frac{4}{9}$ .

（3）在一本标准英语字典中有 55 个由两个不相同的字母构成的单词. 若从 26 个英语字母中任取两个字母予以排列，能排成上述单词的概率为（　　）.

① $\frac{2}{11}$； ② $\frac{7}{120}$； ③ $\frac{13}{150}$； ④ $\frac{11}{130}$.

（4）若 3 次独立射击中至少命中目标 1 次的概率为 0.875，则在 1 次射击中命中目标的概率

为(　　).

① 0.7；　　② 0.75；　　③ 0.5；　　④ 0.85.

(5) 射击队里有编号为 1,2,3,4,5 的五名射手,其射击命中率分别为 0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,今从该队里随意选一名射手对靶射击一次,则命中靶的概率为(　　).

① 0.72；　　② 0.83；　　③ 0.8；　　④ 0.7.

(三) 解答题

(1) 袋中有 10 个外形相同的球,分别标有号码 1 到 10,从袋中任取 3 个球,记录其号码,(i) 求最小号码为 5 的概率；(ii) 求最大号码为 5 的概率.

(2) 一袋中有 $m$ 个白球,$n$ 个红球,先后两次从袋中各取一球,取后不放回.

(i) 已知第一次取出的是白球,求第二次取出的仍然是白球的概率；

(ii) 已知第二次取出的是白球,求第一次取出的也是白球的概率；

(iii) 已知取出的两球中有一个是白球,求另一个也是白球的概率.

(3) 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲,假设男人与女人各占一半,现随意挑选 1 人,(i) 求此人恰好是色盲的概率；(ii) 若此人不是色盲,问他是男人的概率多大？

## 自 测 题 (B)

(一) 填空题

(1) 某射手连续向靶射击,直至射中靶为止,记录其射击次数,这个随机试验的样本空间为______.

(2) 一个工人生产了 $n$ 个零件,用 $A_i$ 表示"他生产的第 $i$ 个零件是正品"($i=1,2,\cdots,n$),则事件"没有一个零件是次品"可表为______,事件"恰好有一个零件是次品"可表为______.

(3) 已知 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$P(A+B)=0.5$,则 $P(A\bar{B})=$______.

(4) 连续抛掷一枚均匀硬币 10 次,其中恰有 3 次是正面的概率为______.

(5) 三人独立地破译一个密码,他们单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,此密码被译出的概率为______.

(二) 单项选择题

(1) 已知 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,且 $P(A)=\frac{1}{3}$,则 $P(B)=$(　).

① $\frac{1}{2}$；　　② $\frac{1}{3}$；　　③ $\frac{3}{5}$；　　④ $\frac{2}{3}$.

(2) 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{6}$,$P(\bar{A}|\bar{B})=$(　　).

① $\frac{7}{12}$；　　② $\frac{8}{15}$；　　③ $\frac{5}{13}$；　　④ $\frac{1}{18}$.

(3) 一袋中有 $m+n$ 个球,其中 $m$ 个白球,$n$ 个红球,每次从袋中任取一球,取后不再放回袋中,直至把球取完,则第 $i$ $(1\leqslant i\leqslant m+n)$ 次取到红球的概率为(　　).

① $\frac{m}{m+n}$；　　② $\frac{n}{m+n}$；　　③ $\frac{m-i}{m+n-i}$；　　④ $\frac{n-i}{m+n-i}$.