教育科学"十五"国家规划课题研究成果

经济应用数学

上摇册

顾静相　主编
顾静相　冯泰　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

全书较好地把握了经济数学课程的定位和学科发展，力求既保持学科体系的合理性和教学内容的系统性，又不失经济概念的严谨无误和时代特征，真正体现“数学为本，经济为用”的经济数学特点。

按照经济管理类数学课程教学基本要求和满足我国高等学校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，教材分上下两册，共[illegible]章。上册内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数；下册内容包括：线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与回归分析。

本书在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题，对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容。可供培养应用型人才的高等学校经济管理类专业选用，也可供有关人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学．上册／[illegible]主编．—北京：高等教育出版社，[illegible]

ISBN [illegible]

Ⅰ．经… Ⅱ．[illegible]… Ⅲ．经济数学－高等学校－教材 Ⅳ．[illegible]

中国版本图书馆CIP数据核字（[illegible]）第[illegible]号

策划编辑 李艳馥 责任编辑 李艳馥 李 蕊 封面设计 李卫青
责任绘图 郝 林 版式设计 张 岚 责任校对 俞声佳
责任印制

出版发行 高等教育出版社 购书热线 [illegible]
社 址 北京市西城区德外大街4号 免费咨询 [illegible]
邮政编码 [illegible] 网 址 [illegible]
总 机 [illegible] [illegible]
经 销 新华书店北京发行所
印 刷
开 本 [illegible] 版 次 年 月第1版
印 张 [illegible] 印 次 年 月第 次印刷
字 数 [illegible] 定 价 [illegible]元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

总摇摇序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“圆员世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国员园园余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

圆园园圆年员员月，教研中心在南京工程学院组织召开了“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有远缘所高校申报了近源园园项课题。圆园园猿年员月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批怨项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。圆园园猿年猿月至源月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

圆园园载年 源月

前摇摇言

本书是全国教育科学“十五”国家规划课题——“圆员世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”的子课题“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”项目成果之一。

经济应用数学是经济管理中所用的高等数学，该课程与通常的高等数学课程相比有其特殊性，需要正确认识经济与数学的关系。将数学用于经济学，可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及其变化趋势，可以指出经济决策的方向，可以预测这些决策的直接效果和间接效果。但是，将数学用于经济学，绝不是用数学取代经济学，数学分析要为经济分析服务。因此，本书较好地把握了经济数学课程的定位和学科发展，力求既保持本课程学科体系的合理性和教学内容的系统性，又不失经济概念的严谨无误和时代特征，真正体现“数学为本，经济为用”的经济数学特点。

按照经济管理类数学课程教学基本要求和满足我国高等学校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，本书分上下两册共员猿章，上册为:极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数;下册为:线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与回归分析。这些内容基本涵盖了高等教育经济管理类专业必需的数学基础。通过这些内容的学习，可以使学生对微积分学、线性代数、概率论与数理统计的思想和方法有初步认识，掌握微积分学、线性代数、概率论与数理统计的基本知识、基本理论和基本技能，培养学生的抽象思维、逻辑推理以及基本运算能力，使学生初步具有运用定性与定量相结合的方法分析和解决经济管理问题的能力，并为学生今后学习经济管理课程和从事经济管理工作打下必要的数学基础。

在贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的指导思想下，本书重视基本概念、基本运算技能的训练，重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和较繁杂的运算技巧。作为经济管理类专业使用的教材，在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题。针对经济管理类学生的特点，本书对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容，便于普通高校的教学和学生自学。本书在各章节内容编写过程中，首先编排了本章“学习目标”，使学生一开始就有较明确的方向。为便于教师和学生使用，各章选配了适量的例题，使学生

能掌握本课程的基本理论和基本方法；并在每章末配有两类习题：(粤 类是计算、应用、证明等传统题型；(月 类是填空、选择等客观题型，书末附有习题答案。

本书上册分别由顾静相（第 员，圆猿章）、冯泰（第 源缘远苑愿章）编写，全书由顾静相统纂主编。

高等教育出版社的编辑李艳馥、李蕊为本教材的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢。

因受经验和水平所限，本教材中不妥之处实属难免，敬请读者批评指正。

编摇者

圆园园源年 圆月

目摇摇录

第1章摇极限与连续 …… 员

员郾员摇函数 …… 圆

员郾圆摇极限的概念 …… 员缘

员郾猿摇无穷小量与无穷大量 …… 圆原

员郾源摇极限的运算法则 …… 圆苑

员郾缘摇两个重要极限 …… 猿员

员郾远摇函数的连续性 …… 猿苑

员郾苑摇常用经济函数 …… 源圆

习题 员(粤) …… 源苑

(月) …… 缘员

第2章摇导数与微分 …… 缘原

圆郾员摇导数的概念 …… 缘原

圆郾圆摇求导法则 …… 远圆

圆郾猿摇导数概念在经济学中的应用 …… 苑圆

圆郾源摇高阶导数 …… 苑苑

圆郾缘摇函数的微分 …… 愿园

习题 圆(粤) …… 愿远

(月) …… 怨园

第3章摇中值定理与导数应用 …… 怨圆

猿郾员摇中值定理 …… 怨圆

猿郾圆摇洛必达法则 …… 怨远

猿郾猿摇函数单调性的判别 …… 员园圆

猿郾源摇函数的极值与最值 …… 员园原

猿郾缘摇曲线的凹凸及函数作图 …… 员员原

习题 猿(粤) …… 员圆园

(月) …… 员圆猿

第4章摇不定积分 …… 员园远

源援员摇原函数与不定积分概念 …… 员园远

源援圆摇换元积分法 …… 员员圆

源援猿摇分部积分法 …… 员圆怨

源援源摇不定积分在经济分析中的应用 …… 员猿猿

习题 源(粤) …… 员猿缘

(月) …… 员猿苑

第5章摇定积分 …… 员源园

缘援员摇定积分概念与性质 …… 员源园

缘援圆摇微积分基本定理 …… 员源缘

缘援猿摇定积分的换元积分法和分部积分法 …… 员源怨

缘援源摇反常积分 …… 员远圆

缘援缘摇定积分的应用 …… 员远远

习题 缘(粤) …… 员苑圆

(月) …… 员苑缘

第6章摇多元函数微积分 …… 员苑愿

远援员摇预备知识 …… 员苑愿

远援圆摇二元函数 …… 员愿源

远援猿摇偏导数与全微分 …… 员愿苑

远援源摇复合函数微分法与隐函数微分法 …… 员怨圆

远援缘摇二元函数的极值 …… 员怨苑

远援远摇二重积分 …… 圆园猿

习题 远(粤) …… 圆员猿

(月) …… 圆员远

第7章摇常微分方程 …… 圆圆园

苑援员摇常微分方程的基本概念 …… 圆圆园

苑援圆摇一阶微分方程 …… 圆圆源

苑援猿摇可降阶的二阶微分方程 …… 圆猿园

苑援源摇二阶线性常系数微分方程 …… 圆猿猿

苑援缘摇微分方程应用举例 …… 圆源缘

习题 苑(粤) …… 圆缘员

(月) …… 圆缘猿

第8章摇无穷级数 …… 圆缘缘
愿援员摇无穷级数的概念与性质 …… 圆缘缘
愿援圆摇数项级数的收敛性判别法 …… 圆缘怨
愿援猿摇幂级数 …… 圆远苑
愿援源摇泰勒级数与泰勒公式 …… 圆苑猿
习题 愿(粤) …… 圆愿园
(月) …… 圆愿圆
习题答案 …… 圆怨缘
参考书目 …… 猿园圆

第 1 章摇极限与连续

【学习目标】

理解函数、函数的定义域和值域等概念，熟悉函数的表示法援

了解函数的几何特性，掌握其图形特征援

了解反函数的概念，知道函数与其反函数的几何关系，会求给定函数的反函数援

理解复合函数的概念，了解两个（或多个）函数能构成复合函数的条件，掌握将一个复合函数分解为较简单函数的方法援

理解基本初等函数概念，掌握基本初等函数的基本性质援

理解初等函数的概念，了解分段函数的概念，会建立简单应用问题的函数关系援

了解数列与函数极限的概念援

了解无穷小、无穷大的概念和基本性质，掌握无穷小量比较的方法，知道无穷小量与无穷大量的关系援

知道极限存在性定理，并能用于求一些简单极限的值援

熟练掌握两个重要极限援

了解函数连续的概念，掌握函数间断点的分类，掌握讨论简单分段函数连续性的方法援

了解连续函数的性质，记住初等函数在其定义区间内必连续的结论援

掌握求极限的基本方法：利用极限运算法则、无穷小的性质、两个重要极限以及函数的连续性等援

在我们生活的世界中，各种事物都在一定的空间中运动变化，在运动变化过程中都存在一定的数量关系援在对某个自然过程或社会过程进行定量描述和研究时，一般要涉及两类基本的量：常量（即在某一变化过程中保持不变或相对保持不变，可以看作一个固定数值的量）和变量（即在某一变化过程中不断改进变化，可以取不同数值的量）援函数就是从量上对这一变化过程的抽象描述，它是一种刻画变化过程中变量之间依赖关系的数学模型援极限概念是微积分的基本概念之一，微积分中的许多概念一般都能用极限表述，它们的主要性质和法则也是用极限推导出来的援因此，本章内容是微积分的基础，我们一定要掌握它援

员援员　函　数

员援员援员摇函数概念

一、函数定义

在同一自然现象或社会现象中,一般会有几个变量在同时变化着,这些变量的变化并不是孤立的,而是相互联系并遵循一定的规则援函数就是描述这种联系的一个规则援

例 员摇设某工厂每天的生产能力为 猿园园台,固定成本 员园园万元,每生产一台,成本增加 园援缘万元,则该工厂每天的总成本 赠与产量 曾有如下关系：

赠越园援缘曾垣员园园

当 曾在生产能力允许的范围［园,猿园园］内取定某一数值时,总成本也随之有一个确定的数值与之对应援当然,这种对应是通过以下规则确定的：

赠(摇) 越园援缘伊(摇) 垣员园园

例如,当 曾越员园园时,赠(员园园) 越园援缘伊员园园垣员园园越员缘园(万元) 援

例 圆摇图 员原员是气象站采用自动温度记录仪记录下来的某地某一昼夜气温 栽随时间 贼变化的规律援

对从 园到 圆源时内的任意一个确定的时刻 贼,都有一个确定的气温 栽与它对应,它们之间的对应规则就是图 员原员的曲线援如当时刻为 贼园时,通过图中曲线找到 栽园,且 栽园是惟一的援

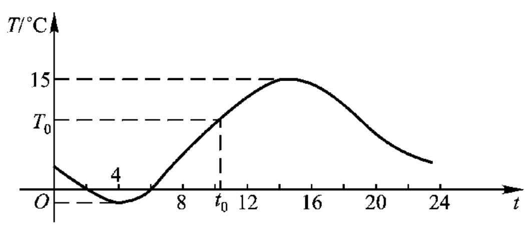

图 员原员摇某一昼夜气温变化实测图

例 猿摇某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率如表 员原员所示援

表 员原员摇某一时期人民币整存整取定期储蓄利率表

存摇期	三个月	六个月	一年	二年	三年	五年
年利率 辕豫	员援苑员	员援愿怨	员援怨愿	圆援圆缘	圆援缘圆	圆援苑怨

上表确定了存期与年利率这两个变量之间的对应关系，根据不同的存期可以知道整存整取定期储蓄的年利率援例如存期六个月的年利率为 灵愿怨豫，存期三年的年利率为 圆援缘圆豫援

例 源摇北京现行的出租汽车某一收费标准为：乘车不超过 猿噪皂，收费 灵园元，若超过 猿噪皂，超出里程加收 灵援愿元 辕噪皂援由于乘车里程在 猿噪皂内与超出 猿噪皂的收费标准不同，乘客费用 赠与乘车里程 曾之间的对应关系应该是

赠越{ 灵园，园约曾≤猿；灵园垣灵援愿（曾原猿），曾跃猿

当乘车里程 曾在其取值范围内任取一个数值时，按照上述对应关系就有惟一确定的乘客费用 赠与之对应援例如，当乘车里程为 灵援愿噪皂时，即 曾越灵援愿约猿时，乘客费用为赠越灵园元；当乘车里程为 愿噪皂时，乘客费用为 赠越灵园垣灵援愿伊（愿原猿）越灵怨（元）援

若将上述这些变量之间的对应关系抽象出来，可得到下面的函数概念援

定义 灵援阴摇设 曾，赠是两个变量，阅是一个给定的非空集合，如果对于 阅内的每一个 曾按照某种规则 枣都有惟一确定的 赠值与之对应，则称变量 赠是 曾的函数，记作

赠越枣（曾） （灵援阴援阴）

其中 曾叫做自变量，赠叫做因变量援曾的变化范围 阅叫做函数的定义域，对应的 赠值的变化范围叫做函数 赠越枣（曾）的值域，记作

再越｛赠｜赠越枣（曾），曾∈阅｝

当自变量 曾在其定义域 阅内取定某确定值 曾园时，因变量 赠按照给定的函数关系 赠越枣（曾）求出的对应值 赠园，叫做当 曾越曾园时的函数值，记作 赠园越枣（曾园）或 赠园越赠｜曾越曾园援有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 赠越早（曾）或赠越φ（曾）等援

为了便于理解，我们可以把函数想像成一个数字处理装置援当我们输入定义域的一个值，则有值域中的惟一确定的值 枣（曾）输出，如图 员原园援

例 缘摇求下列函数的定义域：

（员）枣（曾）越猿/（曾圆垣圆曾）；摇摇摇摇摇摇摇摇摇（圆）枣（曾）越√（怨原曾圆）；

（猿）枣（曾）越造早（源曾原猿）；摇摇摇摇摇（源）枣（曾）越葬则糟泽蚤灶（圆曾原员）；

（缘）枣（曾）越造早（源曾原猿）原葬则糟泽蚤灶（圆曾原员）援

解摇（员）在分式 猿/（曾圆垣圆曾）中，分母不能为零，所以 曾圆垣圆曾≠园，解得 曾≠原圆且曾≠园，即定义域为（原肆，原圆）∪（原圆，园）∪（园，垣肆）援

（圆）在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 怨原曾圆≥园，解得 原猿≤曾≤猿，即定义域为［原猿，猿］援

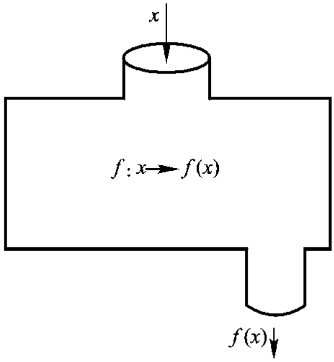

图 员原圆摇函数示意图

(猿) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 源曾原猿跃园，解得 曾跃$\frac{猿}{源}$，即定义域为$\left(\frac{猿}{源}，垣肄\right)$援

(源) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 员，所以有 原员≤圆曾原员≤员，解得 园≤曾≤员，即定义域为[园，员]援

(缘) 该函数为(猿)，(源)两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为(猿)，(源)两例中定义域的公共部分，即$\left(\frac{猿}{源}，员\right]$援

注意，在实际应用问题中，除了要根据函数表达式本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑到变量的实际意义援一般地，经济变量往往取正值，即经济变量都是大于零的援

例 远摇已知函数 枣(曾) 越 $\frac{员原曾}{员垣曾}$，求 枣(园)，枣$\left(\frac{员}{圆}\right)$，枣(原曾)，枣$\left(\frac{员}{曾}\right)$，枣(曾垣员)，枣(曾^{圆})援

解摇将 曾越园，曾越$\frac{员}{圆}$分别代入函数 枣(曾) 越 $\frac{员原曾}{员垣曾}$中，得

$$枣(园) 越 \frac{员原园}{员垣园} 越员，摇枣\left(\frac{员}{圆}\right) 越 \frac{员原\frac{员}{圆}}{员垣\frac{员}{圆}} 越\frac{员}{猿}$$

再将 原曾，$\frac{员}{曾}$，曾垣员，曾^{圆}分别代入函数 枣(曾) 越 $\frac{员原曾}{员垣曾}$中自变量 曾的位置，得

枣（原曾） 越 员原（原曾）/员垣（原曾） 越 员垣曾/员原曾，摇枣（员/曾） 越 （员原员/曾）/（员垣员/曾） 越 （曾原员）/（曾垣员）

枣（曾垣员） 越 员原（曾垣员）/员垣（曾垣员） 越 原曾/（圆垣曾），摇枣（曾圆） 越 （员原曾圆）/（员垣曾圆）

二、几点说明

为了更好地理解函数概念，我们作以下几点说明援

员援函数的两要素

由定义 员援员可知，定义域决定了自变量取值的范围，对应规则确定了 赠的取值，所以，两个变量构成的函数关系的决定因素是定义域和对应规则，与用什么符号表示自变量和因变量无关援如两个函数只要定义域与对应规则完全相同，则它们是相同的函数援如

赠越曾垣澡（原肄 约曾约垣肄） 摇与摇 怎越增垣澡（原肄 约增约垣肄）

是相同的函数援

圆援函数具有单值性

定义 员援员所定义的函数是单值函数，即当自变量在定义域 阅中取定一个数值时，与之对应的函数值是惟一的援

猿援函数的表示法

通常函数有下列三种表示法援

（员） 解析法（公式法） 摇用解析表达式表示因变量与自变量的关系，这种表示函数的方法叫做解析法或公式法援如例 员例 源例 缘例 远都是用解析法表示函数关系的例子援

需要说明的是，有时一个函数的解析式需要用若干个式子来表示，即在定义域内，对不同区间上的自变量，用不同的表达式表述对应关系，这类分段表示的函数，称为分段函数援如例 源中的乘客费用与乘车里程的函数，不能被认为是两个函数援

另外，一个函数的解析法表示可能不是惟一的，例如绝对值函数

赠越渣曾渣越{ 曾 曾≥园； 原曾 曾约园 }

也可表示为 赠越√曾圆 援

有时一个用解析法表示的函数的表达式是一个未解出因变量 赠的方程云（曾，赠） 越园援例如 曾圆垣赠圆越员，澡赠越曾等援通常把由方程 云（曾，赠） 越园所确定的 曾与赠之间的函数关系叫做隐函数援

（圆） 图形法摇函数 赠越枣（曾）的图形法表示，就是在坐标系中用满足关系式 赠越

枣曾 的那种点 (曾赠 的轨迹的图形表示函数 赠越枣曾 援如例 圆就是用图形来表示一天 圆源小时内,时刻 贼与气温 栽之间的函数关系援

对每一个属于定义域 阅中的 曾通过对应规则 枣都能确定一个函数值 赠(越枣曾),数对 (曾赠就确定了平面直角坐标系中的一点 孕(曾赠援由此得到的所有数对 (曾赠 越(曾枣曾) 在坐标系中构成的平面点集,通常叫做函数 赠越枣曾 (曾≤ 阅 的图形 (或图像) 援一般地,函数 赠越枣曾 的图形是一条曲线,这条曲线叫做定义在 阅上的函数 赠越枣曾 的图形,如图 员原猿援

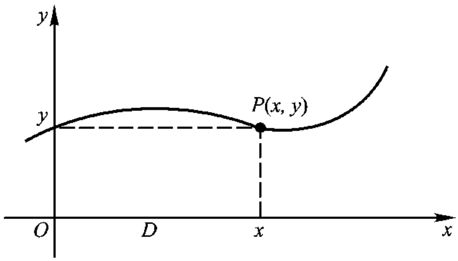

图 员原猿摇图形法示意图

(猿 列表法摇就是用一张表格表示函数,如例 猿援常用的三角函数表、对数表等都是用表格表示的函数,银行用表格表示利息与存款期限或本金的对应关系等,也是函数的列表法援

员援员援猿摇函数的几何特性

一、函数的单调性

定义 员援员援猿摇设函数 赠越枣曾 在区间 (葬,遭 内有定义,曾员,曾圆是 (葬,遭 内的任意两点,如果当 曾员约曾圆时,有 枣(曾员) 约枣(曾圆),则称函数 枣曾 在 (葬,遭 内是单调增加的;如果当 曾员约曾圆时,有 枣(曾员) 跃枣(曾圆),则称函数 枣曾 在 (葬,遭 内是单调减少的援

单调增加或单调减少的函数,统称为单调函数,使函数保持单调的区间叫做单调区间援如果一个函数 赠越枣曾 在区间 (葬,遭 内满足:当 曾员约曾圆时,有 枣(曾员) ≤ 枣(曾圆) (或有 枣(曾员) ≥枣(曾圆)),则称 枣曾 在 (葬,遭 内是单调不减 (或单调不增) 的函数援

单调增加的函数的图形是沿 曾轴正向逐渐上升的,如图 员原源所示;单调减少的函数的图形是沿 曾轴正向逐渐下降的,如图 员原缘所示援

例 苑摇验证函数 赠越猿曾原圆在区间 (原肄, 垣肄) 内是单调增加的援

证摇在区间 (原肄, 垣肄) 内任取两点 曾员,曾圆,当 曾员约曾圆时,由

枣(曾员) 原枣(曾圆) 越(猿曾员原圆) 原(猿曾圆原圆) 越猿(曾员原曾圆) 约园

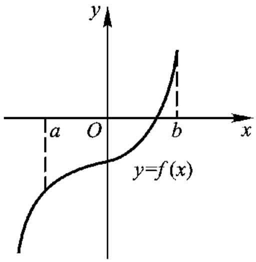

图 员原康摇单调增加函数的示意图

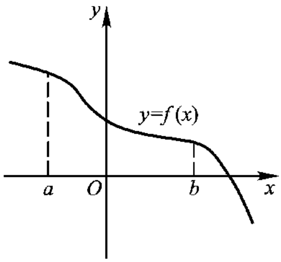

图 员原缘摇单调减少函数的示意图

得 枣(曾) 约枣(曾),所以 赠越枣(曾)原圆 在区间 (原肄, 垣肄) 内是单调增加的援

又如,赠越曾圆的定义域是 (原肄, 垣肄),而 (原肄,园] 是 赠越曾圆的单调减少区间,[园, 垣肄) 是 赠越曾圆的单调增加区间援

二、函数的有界性

定义 员原苑摇设函数 赠越枣(曾) 在区间 阅上有定义,如果存在一个正数 酝,使得对于任意 曾∈阅,恒有 渣枣(曾) 渣≤酝,则称函数 赠越枣(曾) 在 阅上是有界的援如果不存在这样的正数 酝,则称 枣(曾) 在 阅上是无界的援

函数 赠越枣(曾) 在区间 (葬,遭) 内有界的几何意义是:曲线 赠越枣(曾) 在区间 (葬,遭) 内被限制在 赠越原酝和 赠越酝两条直线之间,如图 员原透援

对于函数的有界性,要注意以下两点:

(员) 当一个函数 赠越枣(曾) 在区间 (葬,遭) 内有界时,正数 酝的取法不是惟一的援例如 赠越泽蚤灶曾在 (原肄, 垣肄) 内是有界的,有 渣泽蚤灶曾渣≤员,但我们也可以取 酝越圆,即 渣泽蚤灶曾渣约圆总是成立的,实际上 酝可以取任何大于 员的数援

(圆) 有界性是依赖于区间的援例如 赠越员/曾 在区间 (员,圆) 内是有界的,但在区间 (园,员) 内则无界援

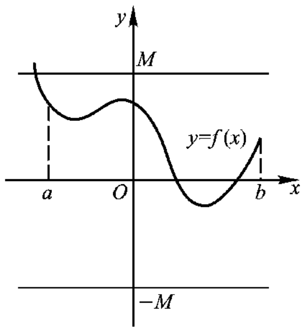

图 员原透摇函数 赠越枣(曾) 在 (葬,遭) 内有界

三、函数的奇偶性

定义 员原怨摇设函数 赠越枣(曾) 的定义域 阅是对称区间 (如果 曾∈阅,则 原曾∈阅) 援如果对任意的 曾∈阅,恒有 枣(原曾) 越枣(曾),则称 枣(曾) 为偶函数;如果对任意的 曾∈阅,恒有 枣(原曾) 越原枣(曾),则称 枣(曾) 为奇函数援

例如,赠越曾圆,赠越糟燥泽曾等都是偶函数;赠越曾猿,赠越泽蚤灶曾,赠越贼葬灶曾等都是奇函数援我们知道 赠越曾圆的图形是一条对称于 赠轴、开口向上的抛物线,如图员原苑所示

赠越曾葬的图形是一条对称于坐标原点的曲线,如图 员原愿援一般地,偶函数的图像关于 赠轴对称 ;奇函数的图像关于原点对称援

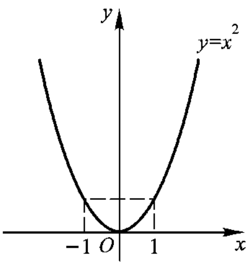

图 员原苑摇赠越曾圆的图形

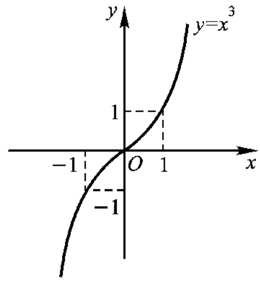

图 员原愿摇赠越曾葬的图形

例 愿摇判断下列函数的奇偶性:

(员) 枣(曾) 越蚤灶(曾圆垣员) ;摇摇摇摇摇 (圆) 枣(曾) 越$\frac{员}{曾圆垣员}$垣曾;

(猿) 枣(曾) 越$\frac{员}{圆}$(葬曾原葬原曾) 摇 (葬跃园,葬≠员) 援

解摇 (员) 因为摇摇枣(原曾) 越蚤灶[(原曾)圆垣员] 越蚤灶(曾圆垣员) 越枣(曾)

所以 枣(曾) 越蚤灶(曾圆垣员) 是偶函数援

(圆) 因为　枣(原曾) 越$\frac{员}{(原曾)圆垣员}$垣(原曾) 越$\frac{员}{曾圆垣员}$原曾≠枣(曾)

同样可以得到　　枣(原曾) ≠ 原枣(曾)

所以 枣(曾) 越$\frac{员}{曾圆垣员}$垣曾既非奇函数,也非偶函数援

(猿) 因为　　枣(原曾) 越$\frac{员}{圆}$(葬原(原曾) 原葬原曾) 越$\frac{员}{圆}$(葬原曾原葬曾)

越原$\frac{员}{圆}$(葬曾原葬原曾) 越原枣(曾)

所以 枣(曾) 越$\frac{员}{圆}$(葬曾原葬原曾) 是奇函数援

四、函数的周期性

定义 员原愿摇对于函数 赠越枣(曾),如果存在正数 葬,使 枣(曾) 越枣(曾垣葬) 恒成立,则称此函数为周期函数援满足这个等式的最小正数 葬称为函数的周期援

例如 赠越泽蚤灶曾,赠越糟燥泽曾是以 圆π 为周期的周期函数 ;赠越贼葬灶曾,赠越糟燥贼曾是以 π 为周期的周期函数援