教育科学‘十五’国家规划课题研究成果

经济应用数学

下摇摇册

顾静相　主编
顾静相　冯泰　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

全书较好地把握了经济数学课程的定位和学科发展，力求既保持学科体系的合理性和教学内容的系统性，又不失经济概念的严谨无误和时代特征，真正体现“数学为本，经济为用”的经济数学特点。

按照经济管理类数学课程教学基本要求和满足我国高等学校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，教材分上下两册，共 员缘章。上册内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数；下册内容包括：线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与回归分析。

本书在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题，对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容。本书可供培养应用型人才的高等学校经济管理类专业选用，也可供有关人员参考。

摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇经济应用数学援下册 辕顾静相，冯泰编著援—北京：高等教育出版社，圆园园源

摇陨杂月晕 苑原园源原园员缘猿园原园

摇Ⅰ援经… 摇Ⅱ援①顾…②冯… 摇Ⅲ援经济数学 原高等学校 原教材摇Ⅳ援云圆圆源

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园源）第 园缘怨源远号

策划编辑摇马丽摇摇责任编辑摇马丽摇摇封面设计摇李卫青摇摇
责任绘图摇尹莉摇摇版式设计摇张岚摇摇责任校对摇王效珍摇摇责任印制

出版发行摇高等教育出版社摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇购书热线摇园员园原远源园缘愿员员愿
社摇摇址摇北京市西城区德外大街 源号
邮政编码摇员园园园员员
总摇摇机摇园员园原愿圆园缘愿园园园
免费咨询摇愿园园原愿员园原园缘怨愿
网摇摇址摇澡贼贼责：辕辕憎憎憎援澡藻责援藻凿怎援糟灶
摇摇摇摇摇澡贼贼责：辕辕憎憎憎援澡藻责援糟燥皂援糟灶

经摇摇销摇新华书店北京发行所
印摇摇刷

开摇摇本摇苑愿苑×怨远园摇员辕员远
印摇摇张摇圆园
字摇摇数摇源猿园园园园
版摇摇次摇摇年摇月摇第 员版
印摇摇次摇摇年摇月摇第摇次印刷
定摇摇价摇圆愿援园园元

物料号：员缘猿园园原园园

总摇摇序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“圆员世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国员园园余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

圆园园圆年员员月，教研中心在南京工程学院组织召开了“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有远缘所高校申报了近源缘园项课题。圆园园猿年员月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批怨项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。圆园园猿年猿月至源月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部‘高等学校教学质量和教学改革工程’的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

圆园园源年 源月

前摇摇言

本书是全国教育科学‘十五’国家规划课题——“圆员世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践’的子课题‘圆员世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践’项目成果之一。

经济应用数学是经济管理中所用的高等数学，该课程与通常的高等数学课相比有其特殊性，因此需要正确认识经济与数学的关系。将数学用于经济学，可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及其变化趋势，可以指出经济决策的方向，可以预测这些决策的直接效果和间接效果。但是，将数学用于经济学，绝不是用数学取代经济学，数学分析要为经济分析服务。因此，本书较好地把握了经济数学课程的定位和学科发展，力求既保持本课程学科体系的合理性和教学内容的系统性，又不失经济概念的严谨无误和时代特征，真正体现‘数学为本，经济为用’的经济数学特点。

按照经济管理类数学课程教学基本要求和满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，本书分上下两册共员缘章，上册基本内容为'极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数；下册基本内容为'线性代数基础、线性代数应用、基础概率、随机向量、数据处理、统计推断、方差分析与回归分析。这些内容基本涵盖了高等教育经济管理类专业必需的数学基础，通过这些内容的学习，可以使学生对微积分学、线性代数、概率论与数理统计的思想和方法有初步认识，掌握微积分学、线性代数、概率与数理统计的基本知识、基本理论和基本技能，培养学生的抽象思维、逻辑推理以及基本运算能力，使学生初步具有定性与定量相结合的方法分析和解决经济管理问题的能力，并为学生今后学习经济管理课程和从事经济管理工作打下必要的数学基础。

在贯彻‘以应用为目的，以必须够用为度’的指导思想下，本书重视基本概念、基本运算技能的训练，重视培养学生运用数学分析方法解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和较繁杂的运算技巧。作为经济管理类专业使用的教材，在引例、解释和应用诸多方面力争多联系与经济有关的问题。针对经济管理类专业学生的特点，本书对概念、定理和方法等采用了学生容易理解的方式进行叙述，从而降低了起点，减小了难度，精简了内容，便于普通高校的教学和学生自学。本书在各章节内容编写过程中，首先编排了本章‘学习目标”，使学生一开始就有较明确方向。为便于教师和学生使用，各章选配了适量的例题，使学生能

掌握本课程的基本理论和基本方法;并在每章末配有两类习题:(粤)类是计算、应用、证明等传统题型;(月)类是填空、选择等客观性题型,书末附有习题答案。

本书下册分别由顾静相(第怨、员园章)、冯泰(第员员、员圆、员猿、员源、员缘章)编写,全书由顾静相统纂主编。

高等教育出版社的编辑李艳馥和马丽为本教材的出版付出了辛勤劳动,在此表示衷心感谢。

因受经验和水平所限,本教材中不妥之处实属难免,敬请读者提出批评指正。

编摇者

圆园园源年愿月

目摇摇录

第 9 章摇线性代数基础

【学习目标】

员援熟练掌握矩阵加法、减法、数乘和乘法的运算规则，了解其经济背景援

圆援熟练掌握矩阵行列式的定义及其性质援掌握矩阵行列式的计算方法，知道克拉默法则援

猿援理解可逆矩阵的概念及其性质，会用伴随矩阵求矩阵的逆，熟练掌握用初等行变换的方法求矩阵的逆援

源援了解初等矩阵的概念及它们与矩阵初等变换的关系援

缘援了解矩阵的秩的概念，掌握求矩阵的秩的方法援

远援了解矩阵分块的原则，掌握分块矩阵的运算法则援

苑援理解向量的概念，熟练掌握向量的加法和数乘运算援

愿援了解向量组的线性相关、线性无关、向量组的秩的概念，掌握求向量组的极大无关组的方法援

怨援掌握线性方程组有解判别定理，了解线性方程组的特解、一般解、基础解系和通解的概念援

员园援熟练掌握用矩阵初等行变换求线性方程组的一般解和通解的方法援

线性代数是本课程重要的一部分，这是因为在生产经营管理活动中，在商品流通和交换过程中，以及在人们日常活动中所碰到的问题，有许多可以直接或近似地表示成一些变量之间的线性关系援本章主要介绍线性代数中的矩阵概念、矩阵运算、特殊矩阵、矩阵行列式、逆矩阵与初等变换、矩阵的秩、矩阵的分块以及线性方程组及其解的情况判定、灶维向量及其相关性、线性方程组解的结构等基本概念和方法援

怨援员 矩 阵 概 念

在线性代数中，矩阵是一个重要概念，它是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，是研究线性函数的一个有力工具，它在自然科学、工程技术和经济管理的许多学科中有广泛的应用援

怨援员援员摇矩阵概念

矩阵是数(或函数)的矩形阵表援在工程技术、生产活动和日常生活中,我们常常用数表表示一些量或关系,如工厂中的产量统计表、市场上的价目表等等援在给出矩阵定义之前,先看几个例子援

例 员摇在物资调运中,某类物资有三个产地、四个销地,它的调运情况如下表所示:

表 怨原员摇调运方案表

销地 / 调运吨数 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
粤	园	猿	源	苑
月	愿	圆	猿	园
悦	缘	源	园	远

如果我们用一个三行四列或 猿伊源的数表表示该调运方案,可以简记作

$$\begin{pmatrix} \text{园} & \text{猿} & \text{源} & \text{苑} \\ \text{愿} & \text{圆} & \text{猿} & \text{园} \\ \text{缘} & \text{源} & \text{园} & \text{远} \end{pmatrix},$$

其中每一行表示各个产地调往四个销地的调运量,每一列表示三个产地调到该销地的调运量援

例 圆摇假设我们记录 猿名学生甲、乙、丙的 猿门课程(数学、语文、英语)的期末考试成绩援若按百分制评分,期末考试成绩如表 怨原圆所示援

表 怨原圆摇期末考试成绩表

课程 / 成绩 / 学生	数学	语文	英语
甲	怨园	愿缘	怨缘
乙	苑愿	愿圆	苑园
丙	怨圆	怨猿	怨远

学生各门课的成绩按原来的排列顺序可以组成一个三行三列或 猿伊猿的数表,即

$$\begin{pmatrix} \text{怨园} & \text{愿缘} & \text{怨缘} \\ \text{苑愿} & \text{愿圆} & \text{苑园} \\ \text{怨圆} & \text{怨猿} & \text{怨远} \end{pmatrix}\text{援}$$

例 猿摇含有 灶个未知量、皂个方程的线性方程组

$$\begin{cases} 葬_{员员}曾_{员}垣葬_{员圆}曾_{圆}垣\cdots垣葬_{员灶}曾_{灶}越遭_{员}, \\ 葬_{圆员}曾_{员}垣葬_{圆圆}曾_{圆}垣\cdots垣葬_{圆灶}曾_{灶}越遭_{圆}, \\ 摇摇摇摇\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 葬_{皂员}曾_{员}垣葬_{皂圆}曾_{圆}垣\cdots垣葬_{皂灶}曾_{灶}越遭_{皂}援 \end{cases}$$

如果把它的系数 $葬_{蚤躁}$(蚤越员,圆,…,皂;躁越员,圆,…,灶)和常数项 $遭_{蚤}$(蚤越员,圆,…,皂)按原来顺序写出,就可以得到一个 皂行、灶垣员列的数表

$$\begin{pmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶} & 遭_{员} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} & 遭_{圆} \\ □ & □ & & □ & □ \\ 葬_{皂员} & 葬_{皂圆} & \cdots & 葬_{皂灶} & 遭_{皂} \end{pmatrix},$$

那么,这个数表就可以清晰地表达这一线性方程组援

由上面三个例子可以看到,对于不同的问题可以用不同的数表来表示,我们将这些数表统称为矩阵援

定义 怨援员摇有 皂伊灶个数 $葬_{蚤躁}$(蚤越员,圆,…,皂;躁越员,圆,…,灶)排列成一个 皂行 灶列,并括以圆括弧(或方括弧)的数表

$$\begin{pmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} \\ □ & □ & & □ \\ 葬_{皂员} & 葬_{皂圆} & \cdots & 葬_{皂灶} \end{pmatrix} 或 \begin{pmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} \\ □ & □ & & □ \\ 葬_{皂员} & 葬_{皂圆} & \cdots & 葬_{皂灶} \end{pmatrix}$$

称为 皂行 灶列矩阵,简称 皂伊灶矩阵援矩阵通常用大写字母 粤,月,悦,…表示援例如上述矩阵可以记作 粤或 $粤_{皂伊灶}$,有时也记作

$$粤越(葬_{蚤躁})_{皂伊灶}援$$

其中 $葬_{蚤躁}$称为矩阵 粤的第 蚤行第 躁列元素,今后也简称为矩阵的(蚤,躁)元援

特别地,当 皂越员时,矩阵只有一行,即

$$粤越(葬_{员员},葬_{员圆},\cdots,葬_{员灶})$$

称之为行矩阵援当 灶越员时,矩阵只有一列,即

$$粤越\begin{pmatrix} 葬_{员员} \\ 葬_{圆员} \\ □ \\ 葬_{皂员} \end{pmatrix}$$

称之为列矩阵援当 皂越灶时,矩阵的行数与列数相同,即

$$
\text{粤越}\begin{pmatrix}
\text{葬}_{\text{员员}} & \text{葬}_{\text{员圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{员灶}} \\
\text{葬}_{\text{圆员}} & \text{葬}_{\text{圆圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{圆灶}} \\
\square & \square & & \square \\
\text{葬}_{\text{灶员}} & \text{葬}_{\text{灶圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{灶灶}}
\end{pmatrix}
$$

称之为 灶阶矩阵,或 灶阶方阵援

在 灶阶矩阵中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线援

上述例 员中的数表可以称为 猿伊源矩阵,例 圆中的数表可以称为 猿阶矩阵或猿阶方阵援

所有元素全为零的 皂伊灶矩阵,称为零矩阵,记作 韵$_{\text{皂伊灶}}$或 韵援例如

$$
\text{韵}_{\text{圆伊圆}}\text{越}\begin{pmatrix} \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} \end{pmatrix},\text{韵}_{\text{猿伊缘}}\text{越}\begin{pmatrix} \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{pmatrix}
$$

分别为二阶零矩阵和 猿伊缘零矩阵援

在矩阵 粤越(葬$_{\text{蚤躁}}$)中各个元素的前面都添加上负号(即取相反数)得到的矩阵,称为 粤的负矩阵,记作 原粤,即

$$
\text{原粤越}(\text{原葬}_{\text{蚤躁}})\text{越}\begin{pmatrix}
\text{原葬}_{\text{员员}} & \text{原葬}_{\text{员圆}} & \cdots & \text{原葬}_{\text{员灶}} \\
\text{原葬}_{\text{圆员}} & \text{原葬}_{\text{圆圆}} & \cdots & \text{原葬}_{\text{圆灶}} \\
\square & \square & & \square \\
\text{原葬}_{\text{皂员}} & \text{原葬}_{\text{皂圆}} & \cdots & \text{原葬}_{\text{皂灶}}
\end{pmatrix}\text{援}
$$

例如

$$
\text{粤越}\begin{pmatrix} \text{远} & \text{原圆} & \text{园} \\ \text{原员} & \text{猿} & \text{愿} \\ \text{缘} & \text{园} & \text{原苑} \end{pmatrix},\text{原粤越}\begin{pmatrix} \text{原远} & \text{圆} & \text{园} \\ \text{员} & \text{原猿} & \text{原愿} \\ \text{原缘} & \text{园} & \text{苑} \end{pmatrix}
$$

那么 原粤是 粤的负矩阵援

怨援猿援圆摇几种特殊矩阵

员援三角形矩阵

主对角线下(或上)方的元素全都是零的 灶阶矩阵,称为 灶阶上(或下)三角形矩阵援即

$$
\text{粤越}\begin{pmatrix}
\text{葬}_{\text{员员}} & \text{葬}_{\text{员圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{员灶}} \\
\text{园} & \text{葬}_{\text{圆圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{圆灶}} \\
\square & \square & & \square \\
\text{园} & \text{园} & \cdots & \text{葬}_{\text{灶灶}}
\end{pmatrix}\text{或 月越}\begin{pmatrix}
\text{遭}_{\text{员员}} & \text{园} & \cdots & \text{园} \\
\text{遭}_{\text{圆员}} & \text{遭}_{\text{圆圆}} & \cdots & \text{园} \\
\square & \square & & \square \\
\text{遭}_{\text{灶员}} & \text{遭}_{\text{灶圆}} & \cdots & \text{遭}_{\text{灶灶}}
\end{pmatrix}\text{援}
$$

上三角形矩阵、下三角形矩阵统称为三角形矩阵援

例如

$$粤越\begin{pmatrix} 原圆 & 源 & 园 \\ 园 & 员 & 原猿 \\ 园 & 园 & 缘 \end{pmatrix},月越\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 & 园 \\ 缘 & 猿 & 园 & 园 \\ 园 & 源 & 园 & 园 \\ 苑 & 园 & 圆 & 远 \end{pmatrix}$$

分别是一个三阶上三角形矩阵和一个四阶下三角形矩阵援值得注意的是，上（或下）三角形矩阵的主对角线下（或上）方的元素一定是零而其他元素可以是零也可以不是零援

圆援对角矩阵

如果一个矩阵 粤既是上三角形矩阵，又是下三角形矩阵，则称其为 灶阶对角矩阵，亦即对角矩阵是非零元素只能在主对角线上出现的方阵援如

$$粤越\begin{pmatrix} 圆 & 园 & 园 \\ 园 & 原猿 & 园 \\ 园 & 园 & 员援缘 \end{pmatrix}$$

是一个三阶对角矩阵援

显然，由主对角线的元素就可以确定对角矩阵了援因此，经常把对角矩阵记作

$$凿蚤葬早[葬_{员},葬_{圆},\cdots,葬_{灶}]援$$

当然允许元素 $葬_{员},葬_{圆},\cdots,葬_{灶}$ 中某些为零援

猿援数量矩阵

主对角线上元素都是非零常数 葬，其余元素全部是零的 灶阶矩阵，称为 灶阶数量矩阵援当 灶越圆，猿时，

$$粤越\begin{pmatrix} 葬 & 园 \\ 园 & 葬 \end{pmatrix},月越\begin{pmatrix} 遭 & 园 & 园 \\ 园 & 遭 & 园 \\ 园 & 园 & 遭 \end{pmatrix}$$

就是二阶、三阶数量矩阵援

源援单位矩阵

主对角线上的元素是 员，其余元素全部是零的 灶阶矩阵，称为 灶阶单位矩阵，记作 $耘_{灶}$ 或 耘，即

$$耘_{灶}越\begin{pmatrix} 员 & 园 & \cdots & 园 \\ 园 & 员 & \cdots & 园 \\ □ & □ & & □ \\ 园 & 园 & \cdots & 员 \end{pmatrix}援$$

当 灶越圆，猿时，

$$耘_{圆}越\begin{pmatrix} 员 & 园 \\ 园 & 员 \end{pmatrix},耘_{猿}越\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 \\ 园 & 员 & 园 \\ 园 & 园 & 员 \end{pmatrix}$$

就是二阶、三阶单位矩阵援

由上述讨论可知，单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵都是三角形矩阵，它们既是上三角形矩阵，又是下三角形矩阵援换句话说，如果一个矩阵 粤既是上三角形矩阵，又是下三角形矩阵，则 粤一定是对角矩阵，当然也可能是数量矩阵或单位矩阵，因为单位矩阵、数量矩阵是对角矩阵的特殊情况援

缘援对称矩阵

如果 灶阶矩阵 粤越($葬_{蚤躁}$)的元素满足 $葬_{蚤躁}越葬_{躁蚤}$(蚤，躁越员，圆，…，灶)，则称 粤是对称矩阵援

例如，矩阵

$$粤越\begin{pmatrix} 员 & 圆 & 原猿 \\ 圆 & 源 & 远 \\ 原猿 & 远 & 缘 \end{pmatrix},月越\begin{pmatrix} 圆 & 员 & 原猿 & 园 \\ 员 & 园 & 苑 & 源 \\ 原猿 & 苑 & 缘 & 原远 \\ 园 & 源 & 原远 & 愿 \end{pmatrix}$$

分别是一个三阶对称矩阵和一个四阶对称矩阵援

显然，对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵都是对称矩阵的特例援

远援反对称矩阵

如果 灶阶矩阵 粤越($葬_{蚤躁}$)的元素满足

$$\begin{cases} 葬_{蚤躁}越原葬_{躁蚤}，摇摇摇蚤\neq 躁 \\ 葬_{蚤蚤}越园，摇摇摇蚤越躁 \end{cases} 摇蚤，躁越员，圆，…，灶$$

则称 粤是反对称矩阵援

例如，矩阵

$$粤越\begin{pmatrix} 园 & 圆 & 原猿 \\ 原圆 & 园 & 源 \\ 猿 & 原源 & 园 \end{pmatrix},月越\begin{pmatrix} 园 & 员 & 原猿 & 园 \\ 原员 & 园 & 远 & 原源 \\ 猿 & 原远 & 园 & 原缘 \\ 园 & 源 & 缘 & 园 \end{pmatrix}$$

分别是一个三阶反对称矩阵和一个四阶反对称矩阵援

怨援圆　矩 阵 运 算

对从实际问题中抽象出来的矩阵，我们经常将几个矩阵联系起来，讨论它们

是否相等，它们在什么条件下可以进行何种运算，这些运算具有什么性质等问题，这就是本节所要讨论的主要内容援

怨援猿援员摇矩阵相等

定义 怨援猿援猿摇如果两个矩阵 粤越(葬$_{蚤躁}$)，月越(遭$_{蚤躁}$)的行数和列数分别相同，而且各对应位置处的元素相等，则称矩阵 粤与矩阵 月相等，记作

$$粤越月援 \qquad (怨援猿援远)$$

即如果 粤越(葬$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$和 月越(遭$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$，且 葬$_{蚤躁}$越遭$_{蚤躁}$(蚤越员，圆，…，皂；躁越员，圆，…，灶)，那么 粤越月援

由定义 怨援猿援圆可知，用等式表示两个 皂伊灶矩阵相等，等价于元素之间的 皂伊灶个等式援例如，矩阵

$$粤越\begin{pmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & 葬_{员猿} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & 葬_{圆猿} \end{pmatrix}，月越\begin{pmatrix} 猿 & 园 & 原缘 \\ 原圆 & 员 & 源 \end{pmatrix}援$$

那么 粤越月，当且仅当

$$葬_{员员}越猿，葬_{员圆}越园，葬_{员猿}越原缘，葬_{圆员}越原圆，葬_{圆圆}越员，葬_{圆猿}越源援$$

又设矩阵

$$悦越\begin{pmatrix} 糟_{员员} & 糟_{员圆} \\ 糟_{圆员} & 糟_{圆圆} \end{pmatrix}，$$

那么，无论矩阵 悦中的元素 糟$_{员员}$，糟$_{员圆}$，糟$_{圆员}$，糟$_{圆圆}$取什么数都不会与矩阵 月相等，这是因为 月，悦这两个矩阵的列数不同援

例 员摇设矩阵

$$粤越\begin{pmatrix} 葬 & 原员 & 猿 \\ 园 & 遭 & 原源 \\ 原缘 & 愿 & 苑 \end{pmatrix}，月越\begin{pmatrix} 原圆 & 原员 & 糟 \\ 园 & 员 & 原源 \\ 凿 & 愿 & 苑 \end{pmatrix}，$$

且 粤越月，求 葬，遭，糟，凿援

解摇根据定义 怨援猿援圆，由 粤越月，即

$$\begin{pmatrix} 葬 & 原员 & 猿 \\ 园 & 遭 & 原源 \\ 原缘 & 愿 & 苑 \end{pmatrix}越\begin{pmatrix} 原圆 & 原员 & 糟 \\ 园 & 员 & 原源 \\ 凿 & 愿 & 苑 \end{pmatrix}，$$

得 葬越原圆，遭越员，糟越猿，凿越原缘援

怨援猿援圆摇矩阵的加法

定义 怨援猿援猿摇设 粤越(葬$_{蚤躁}$)，月越(遭$_{蚤躁}$)是两个 皂伊灶矩阵，则称矩阵

悦越
葬员员 垣遭员员　葬员圆 垣遭员圆　…　葬员灶 垣遭员灶
葬圆员 垣遭圆员　葬圆圆 垣遭圆圆　…　葬圆灶 垣遭圆灶
□　□　□
葬皂员 垣遭皂员　葬皂圆 垣遭皂圆　…　葬皂灶 垣遭皂灶

为 粤与 月的和,记作

悦越粤垣月越(葬 垣遭)援　(怨援援圆)

由定义 怨援援可知,只有行数、列数分别相同的两个矩阵,才能做加法运算援

例 圆摇现有两种物资(单位 :贼)要从三个产地运往四个销地,其调运方案分别为矩阵 粤与 月援

粤越
猿园 圆缘 员苑 园
圆园 园 员源 圆猿
园 圆园 圆园 猿园
,月越
员园 员缘 员猿 猿园
园 源园 员远 员苑
缘园 员园 园 员园
援

那么,从各产地运往各销地,两种物资的总运量是多少?

解摇设矩阵 悦为两种物资的总运量,那么矩阵 悦是 粤与 月的和,即

悦越粤垣月 越
猿园 圆缘 员苑 园
圆园 园 员源 圆猿
园 圆园 圆园 猿园
垣
员园 员缘 员猿 猿园
园 源园 员远 员苑
缘园 员园 园 员园

越
猿园垣员园 圆缘垣员缘 员苑垣员猿 园垣猿园
圆园垣园 园垣源园 员源垣员远 圆猿垣员苑
园垣缘园 圆园垣员园 圆园垣园 猿园垣员园

越
源园 源园 猿园 猿园
圆园 源园 猿园 源园
缘园 猿园 圆园 源园
援

由矩阵加法运算和负矩阵的概念,我们可以定义矩阵的减法:

悦越粤原月 越粤垣(原月)援

即如果 粤越(葬)皂伊灶,月越(遭)皂伊灶,那么

悦 越粤原月越粤垣(原月)
越(葬)皂伊灶垣(原遭)皂伊灶
越(葬原遭)皂伊灶,　(怨援援猿)

称 悦为矩阵 粤与 月的差援

例 猿摇设矩阵

粤越
猿 园 原源
原圆 缘 原员
,月越
原圆 猿 源
园 原猿 员
援

求 粤垣月,粤原月援