

# 经济学家数学手册

Knut Sydsaeter

Arne Strøm 著

Peter Berck

张 涛 译

谢识予 校

复旦大学出版社

## 第三版序言

经济学的实践需要对来自数学、统计学和数理经济学公式的广泛知识。在本书中我们希望为经济学专业学生和学者提供一本专门的公式汇编。除了一些经常为经济学家所用到的数学和统计公式外,本书还包含了不少纯经济学的结论和定理。书中的公式还包含了回顾其数学内涵所需的最少限度的注解。我们努力使定理陈述保留在经济学家适用的一般化水平上。与经济学的格言“everything is twice more continuously differentiable than it needs to be”相反,我们陈述了定理通常成立的一般条件,希望达到了能够精确实用地阐明而不流于学究气。

Arne Strøm 作为协作者加入了扩展改进了的第三版的编写。本版包括了多于 250 条新增公式,许多原先只给出一般形式的公式,现在详述为更便利的方式。新增的领域包括单调比较静态及向量空间、标量向量空间、Banach 空间和 Hilbert 空间。第三版的另一特点是包含了许多图示,它们绝大多数是由 Arve Michaelsen 制作的。

在本书的编写过程中我们得到了许多人的帮助。本书最早产生于一组由 B. Thalberg 教授搜集的经济数学公式,并由斯堪的纳维亚的学生和经济学家广泛地使用了许多年,以后的版本的改进受益于来自 G. Asheim, T. Akram, E. Biørn, T. Ellingsen, P. Frenger, I. Frihagen, H. Goldstein, F. Greulich, P. Hammond, J. Heldal, Aa. Hylland, G. Judge, D. Lund, M. Machina, H. Mehlum, K. Moene, G. Nordén, A. Rødseth, T. Schweder, A. Seierstad, L. Simon 和 B. Øksendal 的建议和更正。

对于现在的第三版,我们特别感谢 Olav Bjerkholt、Jens-Henrik Madsen 和日语版的译者 Tan-no Tadanobu 的建议,作为参考工具书,错误是特别有害的。我们希望发现残留错误的读者能够批评指正,以便我们在今后的再版中更正。

Oslo & Berkeley, November 1998

*Knut Sydsaeter, Arne Strøm, Peter Berck*

# 目 录

1	集合理论 关系 函数 .....	1
	逻辑运算 是非表 集合理论的基本概念 笛卡尔乘积 关系 不同形式的有序 Zorn 引理 函数 反函数 有限及可数集合	
2	方程式 一元函数 复数 .....	7
	二次和三次方程的根 Cardano 公式 多项式 Descartes 符号法 则 二次曲线的分类 二次曲线的图形 函数的性质 渐近线 牛 顿近似公式 切线和垂线 幂 指数和对数 三角函数和双曲函数 复数 De Moivre 公式 欧拉公式 $n$ 次根	
3	极限 连续 微分(一元) .....	20
	极限 连续 单调连续 中值定理 可微函数 微分的一般和特殊 法则 均值定理 洛必达法则 微分	
4	偏导数 .....	25
	偏导数 杨氏定理 $C^k$ 函数 链法则 微分 阶层曲线的斜率 隐函数定理 齐次函数 欧拉定理 位似函数 梯度 方向导数 切(超)平面	
5	弹性 替代弹性 .....	31
	定义 马勃尔法则 一般和特殊法则 方向弹性 Passus 方程 边际替代率 替代弹性	
6	方程组 .....	35
	一般方程组 雅各比矩阵 广义隐函数定理 自由度 “计数法则” 函数相关 雅各比行列式 反函数定理 局部和广义反函数存在性	

	Gale-Nikaido 定理 收缩映射定理 Brouwer 和 Kakutani 不动点定理 在 $\mathbf{R}^n$ 中的子格 Tarski 不动点定理 线性方程组的一般结论	
7	不等式 ..... 41 三角形不等式 算术、几何和调和平均不等式 Hölder、柯西-施瓦兹、切比雪夫、Minkowski、Jensen 不等式	
8	级数 泰勒公式 ..... 44 算术和几何级数 无穷级数的收敛 收敛标准 一阶和二阶近似 Maclaurin 和泰勒公式 级数扩展 二项式系数 牛顿二项式公式 多项式公式 求和公式 欧拉常数	
9	积分 ..... 49 不定积分 一般和特殊积分 定积分 积分收敛 比较测试 Leibniz 公式 伽马函数 Stirling 公式 贝塔函数 梯形公式 辛普森公式 多重积分	
10	差分方程 ..... 58 线性一阶、二阶、高阶方程的解 后向解和前向解 稳定性 Schur 定理 矩阵形式	
11	微分方程 ..... 64 可分离方程 射影和 logistic 方程 线性一阶方程 Bernoulli 和 Riccati 方程 恰当方程 一般线性方程 参数变化 常系数二阶线性方程 欧拉方程 常系数一般线性方程 线性方程的稳定性 Routh-Hurwitz 稳定条件 正规方程组 线性方程组 矩阵形式分解 局部和整体的存在性和唯一性定理 自控系统 均衡点 积分曲线 局部和整体(渐近)稳定性 周期性解 Poincaré-Bendixson 定理 Liapunov 定理 双曲型均衡点 Olech 定理 Liapunov 函数 Lotka-Volterra 模型 局部鞍点定理 一阶偏微分方程 拟线性方程 Frobenius 定理	

12	欧氏空间拓扑学 .....	78
	点集拓扑学的基本概念 序列的收敛 柯西序列 连续函数 相对拓扑学 一致连续性 函数序列的点式和一致收敛 对应 下半连续性和上半连续性 下确界和上确界	
13	凸性 .....	84
	凸集 凸包 Carathéodory 定理 极点 Krein-Milman 定理 分离定理 凹函数和凸函数 Hessian 矩阵 拟凹和拟凸函数 有界 Hessian 矩阵 伪凹和伪凸函数	
14	经典最优化理论 .....	93
	基本定义 极值定理 驻点 一阶条件 鞍点 一元结论 拐点 二阶条件 等式约束下的最优化 拉格朗日方法 值函数和敏感性 拉格朗日乘数的性质 包络条件	
15	线性与非线性规划.....	102
	基本定义和结论 对偶 影子价格 互补的宽松性 Farkas 引理 Kuhn-Tucker 定理 鞍点结论 拟凹规划 值函数的性质 包络结论 非负条件	
16	变分学和最优化控制理论.....	109
	最简单的变分问题 欧拉方程 Legendre 条件 充分条件 横截条件 附加值函数 更一般的变分问题 控制问题 最大化原则 Mangasarian 和 Arrow 充分条件 值函数的性质 自由终端时间问题 一般终端条件 附加值函数 现值公式 线性二次型问题 无限时域 混合约束 纯状态约束 混合和纯状态约束	
17	离散动态最优化.....	124
	动态规划 值函数 基础方程 “自由控制参数”的公式 欧拉向量差分方程 无限时域 离散最优控制理论	
18	$\mathbb{R}^n$ 中的向量 抽象空间 .....	129
	线性相关和线性无关 子空间 基 数量积 向量的范数 向量之	

	间的角度 向量空间 度量空间 赋范向量空间 Banach 空间 Ascoli 定理 Schauder 不动点定理 收缩映射的不动点 收缩映射的 Blackwell 充分条件 内积空间 Hilbert 空间 柯西-施瓦兹和 Bessel 不等式 Parseval 公式	
19	矩阵..... 特殊矩阵 矩阵运算 逆矩阵及其性质 迹 秩 矩阵范数 指数矩阵 线性变换 广义逆矩阵 Moore-Penrose 逆矩阵 分块矩阵 复元素矩阵	137
20	行列式..... $2 \times 2$ 和 $3 \times 3$ 行列式 一般行列式及其性质 余子式 Vandermonde 和其他特殊行列式 子式 Cramer 法则	146
21	特征值 二次型..... 特征值和特征向量 对角化 谱定理 Jordan 分解 Schur 引理 Cayley-Hamilton 定理 二次型和定性标准 奇异值分解 联合对角化 线性约束下的二次型的定性	150
22	特殊矩阵 Leontief 方程组 ..... 等幂, 正交和排列矩阵的性质 非负矩阵 Frobenius 根 可分解矩阵 主导性对角矩阵 Leontief 方程组 Hawkins-Simon 条件	157
23	Kronecker 乘积和 vec 运算 向量和矩阵的微分 ..... Kronecker 乘积的定义和性质 vec 运算及其性质 向量和矩阵对元素, 向量和矩阵的微分	161
24	比较静态..... 均衡条件 互反关系 单调比较静态 $\mathbf{R}^n$ 的子格 上模 递增差别	165
25	成本和利润函数的性质..... 成本函数 条件要素需求函数 Shephard 引理 利润函数 要素	168

	需求函数 供给函数 Hotelling 引理 Puu 方程 替代弹性 Al- len-Uzawa's 和 Morishima 替代弹性 Cobb-Douglas 和 CES 函数 最小法则, Diewert, 和对数变换成本函数	
26	消费者理论..... 偏好关系 效用函数 效用最大化 间接效用函数 消费者需求函 数 Roy 恒等式 支出函数 Hicksian 需求函数 Cournot 弹性 Engel 弹性 Slutsky 弹性 Slutsky 方程 等价和补偿变量 LES (Stone-Geary) 函数 AIDS 和对数转换间接效用函数 Laspeyre, Paasche, 和一般价格指数 Fisher 理想指数	174
27	金融和经济增长理论中的问题..... 复利 有效利率 现值计算 内部报酬率 Norström 法则 连续 复利 Solow 增长模型 Ramsey 增长模型	181
28	风险和风险规避理论..... 绝对和相对风险规避 Arrow-Pratt 风险奖励 一级和二级随机优 于 Hadar-Russell 定理 Rothschild-Stiglitz 定理	185
29	金融和随机微积分..... 资本资产定价模型 单一消费 $\beta$ 资产定价方程 Black-Scholes 期权 标价模型 敏感性结论 广义 Black-Scholes 模型 买入卖出平价 美国买入卖出期权的对应 美国永久性卖出期权 随机积分 Itô's 公式 随机控制问题 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程	188
30	非合作博弈论..... $n$ 个博弈方的策略型博弈 纳什均衡 混合策略 严格下策 两人 博弈 零和博弈 对称博弈 纳什均衡的鞍点性质 两人零和博 弈的经典极小极大定理 互换性性质 进化博弈论	192
31	概率和统计..... 概率公理 概率计算法则 条件概率 随机独立 Bayes 法则 随 机变量(一维) 概率密度函数 累积分布函数 期望 均值 方差	196

标准差 中心矩 偏斜系数和峰态系数 切比雪夫和 Jensen 不等式 矩生成和特征函数 二维随机变量和分布 协方差 柯西-施瓦兹不等式 相关系数 边际和条件密度函数 随机独立 条件期望和方差 重期望 随机变量的变换 估计 偏差 均方误差 概率极限 一致性 检验 检验力度 第一类和第二类错误 显著水平 显著概率( $P$  值) 弱和强大数法则 中心极限定理

32	概率分布 最小二乘法.....	204
	贝塔分布 二项分布 二重正态分布 chi 平方分布 指数分布 极值(Gumbel)分布 $F$ 分布 伽马分布 几何分布 超几何分布 拉普拉斯分布 逻辑斯蒂分布 对数正态分布 多项分布 多重正态分布 负二项分布 正态分布 Pareto 分布 Poisson 分布 学生 $t$ 分布 标准分布 Weibull 分布 最小二乘法 多元回归	
	参考文献.....	212

# 1

## 集合理论 关系 函数

1.1  $x \in A, x \notin B$

元素  $x$  属于集合  $A$ , 但  $x$  不属于集合  $B$ .

1.2  $A = \{\text{典型元素: 定义特征}\}$

集合定义的一般形式.

1.3 以下几种逻辑运算符通常在表明  $P$  和  $Q$  关系时使用:

- $P \wedge Q$  指“ $P$  和  $Q$ ”
- $P \vee Q$  指“ $P$  或  $Q$ ”
- $P \Rightarrow Q$  指“如果  $P$  则  $Q$ ”(或者“ $P$  仅当  $Q$ ”, 或“ $P$  蕴涵  $Q$ ”).)
- $P \Leftarrow Q$  指“如果  $Q$  则  $P$ ”(或“ $P$  如果  $Q$ ”)
- $P \Leftrightarrow Q$  指“ $P$  当且仅当  $Q$ ”
- $\neg P$  指“非  $P$ ”

逻辑运算符.  
(注意“ $P$  或  $Q$ ”是指“或者  $P$  或者  $Q$ , 或者两者都成立”).)

1.4

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$
$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$

逻辑运算的是非表. 在此  $T$  指“是”,  $F$  指“非”.

- 1.5
- $P$  是  $Q$  的一个充分条件:  $P \Rightarrow Q$
  - $Q$  是  $P$  的一个必要条件:  $P \Rightarrow Q$
  - $P$  是  $Q$  的一个充分必要条件:  $P \Leftrightarrow Q$

经常用到的术语.

1.6  $A \subset B \Leftrightarrow A$  的每一个元素也是  $B$  的元素.

$A$  是  $B$  的一个子集.

1.7  $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$  ( $A$  与  $B$  的并集)

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$  ( $A$  与  $B$  的交集)

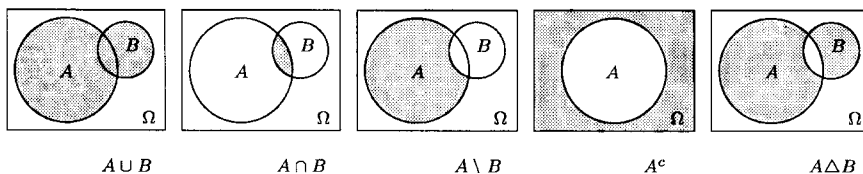
$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$  ( $A$  与  $B$  的差集)

$A^c = \{x: x \notin A\}$  ( $A$  的补集)

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

( $A$  与  $B$  的对称差)

集合理论的基本定义. 如果  $\Omega$  是一个全集, 则  $A^c = \Omega \setminus A$ .  $A^c$  的另一种符号是  $\complement A$ .



1.8  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

集合理论的重要运算法则.

1.9  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$

集合  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  的笛卡尔乘积.

1.10  $R \subset A \times B$

任何  $A \times B$  的子集  $R$  称为从集合  $A$  到集合  $B$  的关系.

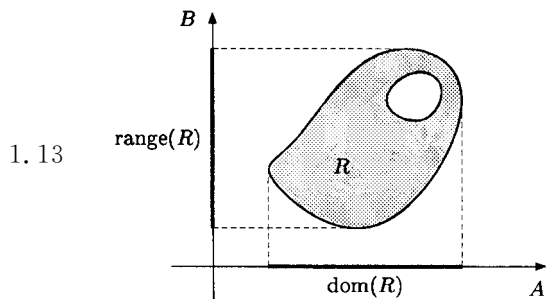
1.11  $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

$x \not R y \Leftrightarrow (x, y) \notin R$

另一种关系和无关系的记法. 我们称  $x$  满足对  $y$  的  $R$  关系, 如果  $(x, y) \in R$ .

- 1.12
- $\text{dom}(R) = \{a \in A; (a, b) \in R \text{ 对于 } B \text{ 中某一 } b\}$   
 $= \{a \in A; aRb \text{ 对于 } B \text{ 中某一 } b\}$
  - $\text{range}(R) = \{b \in B; (a, b) \in R \text{ 对于 } A \text{ 中某一 } a\}$   
 $= \{b \in B; aRb \text{ 对于 } A \text{ 中某一 } a\}$

关系的区域及范围.



(1.13)定义的关系  $R$  的区域及范围, 阴影部分集合是关系的图形.

- 1.14  $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A; (a, b) \in R\}$

从  $A$  到  $B$  的关系  $R$  的逆关系.  $R^{-1}$  是从  $B$  到  $A$  的关系.

- 1.15 让  $R$  为从  $A$  到  $B$  的关系,  $S$  为从  $B$  到  $C$  的关系, 我们则可定义  $R$  和  $S$  的复合  $S \circ R$  为属于  $A \times C$  的  $(a, c)$  的集合, 满足属于  $B$  的元素  $b$  具有  $aRb$  及  $bSc$ .  $S \circ R$  是一个从  $A$  到  $C$  的关系.

$S \circ R$  是两个关系  $R$  及  $S$  的复合.

- 1.16 从  $A$  到  $A$  自己的关系  $R$  称为  $A$  的二元关系.  $R$  的二元关系具有
- 自反性如果  $aRa$  对于每一在  $A$  中的  $a$  成立;
  - 非自反性如果  $aRa$  对于每一在  $A$  中的  $a$  成立;
  - 完整性如果  $aRb$  或  $bRa$  对于每一在  $A$  中的  $a$  和  $b$  成立, 且  $a \neq b$ ;
  - 传递性如果  $aRb$  及  $bRc$  则有  $aRc$ ;
  - 对称性如果  $aRb$  则有  $bRa$ ;
  - 反对称性如果  $aRb$  及  $bRa$  则有  $a = b$ ;
  - 非对称性如果  $aRb$  则有  $bRa$ .

特殊的关系.

1.17  $A$  的二元关系  $R$  被称为

- 先有序的(或拟有序的)关系,如果它是自反性的和传递性的;
- 弱有序的关系,如果它是传递性的和完整的;
- 部分有序的关系,如果它是自反性的,传递性的及反对称性的;
- 线性(或完全)有序的,如果它是自反性的,传递性的,反对称性的及完整的;
- 等价关系,如果它是自反性的,传递性的及对称的.
- 关系  $=$  在实数中是一个相应关系.
- 关系  $\geq$  在实数中是一个线性有序关系.
- 关系  $<$  在实数中是一个弱有序及非自反性,非对称性关系.
- 关系  $\subset$  在给定集合的子集中是一个部分有序关系.

特殊的关系.(这些术语并不是通用的.)注意线性有序与完整的部分有序是一样的.

序列关系通常用符号  $\leq$ ,  $\leq$ ,  $\ll$  等标示. 逆关系用  $\geq$ ,  $\geq$ ,  $\gg$  等标示.

- 1.18
- 关系  $x \leq y$  (“ $y$  至少与  $x$  一样好”)在一个商品向量集合里通常假定为完整的先有序关系.
  - 关系  $x < y$  (“ $y$ (严格好于) $x$ ”)在一个商品向量集合里通常假定为非自反的,传递的(因此是非对称性).
  - 关系  $x \sim y$  (“ $x$  与  $y$  无差别”)在一个商品向量集合里通常假定为等价关系.

关系的例子. 对于关系  $x \leq y$ ,  $x < y$ , 及  $x \sim y$ , 见第 26 章.

- 1.19 令  $\leq$  为在集合  $A$  中的一个先有序关系. 在  $A$  中的一个元素  $g$  称为在  $A$  中对于关系  $\leq$  的最大元素,如果  $x \leq g$  对于每一在  $A$  中的  $x$  成立. 在  $A$  中的一个元素  $m$  称为在  $A$  中对于关系  $\leq$  的极大元素,如果  $x \in A$  且  $m \leq x$  意味着  $x \leq m$ . 对  $\leq$  的最小和极小元素分别是对于  $\leq$  的逆关系  $\geq$  的极大和最大元素.

有序集合中最大元素,极大元素,最小元素和极小元素的定义.

1.20 如果 $\leq$ 是在 $A$ 中的先有序关系, $M$ 是 $A$ 的一个子集,在 $A$ 中的元素 $b$ 称为 $M$ 的一个上限(对于 $\leq$ ),如果 $x \leq b$ 对于每一在 $M$ 中的 $x$ 成立.一个 $M$ 的下限是在 $A$ 中的元素 $a$ 使 $a \leq x$ 对于所有在 $M$ 中的 $x$ .

上限和下限的定义.

1.21 如果 $\leq$ 是在非空集合 $A$ 中的一个先有序关系,且如果 $A$ 的每一线性有序子集 $M$ 都在 $A$ 中有上限,则对于关系 $\leq$ 在 $A$ 中存在一个极大元素.

Zorn 引理.(通常适用于部分有序,但对于先有序同样适用.)

1.22 一个从 $A$ 到 $B$ 的关系 $R$ 称为函数或映射,如果对于每一在 $A$ 中的 $a$ ,在 $B$ 中都存在一个唯一的 $b$ ,使 $aRb$ .如果用 $f$ 作为函数符号,则 $afb$ 可写成 $f(a) = b$ . $f$ 的图形则定义为 $\text{graph}(f) = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}$ .

从集合 $A$ 到集合 $B$ 的函数及其图形的定义.

1.23 一个从 $A$ 到 $B$ 的函数 $f(f:A \rightarrow B)$ 称为

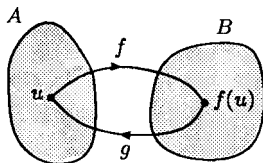
- 单射的(或一一对应的)如果 $f(x) = f(y)$ 意味着 $x = y$ ;
- 满射的(或自身映射)如果范围 $\text{dom}(f) = B$ ;
- 双射的如果它既是单射的又是满射的.

函数的一些重要概念.

1.24 如果 $f:A \rightarrow B$ 双射的(即既是一一对应的又是自身映射的),则它有反函数 $g:B \rightarrow A$ ,定义为 $g(f(u)) = u$ 对于所有 $u \in A$ .

反函数的特点. $f$ 的反函数通常记为 $f^{-1}$ .

1.25



反函数概念的图示.

1.26 如果 $f$ 是一个从 $A$ 到 $B$ 的函数,且 $C \subset A$ , $D \subset B$ ,我们则可使用记法

- $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$
- $f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$

$f(C)$ 称为 $A$ 在关系 $f$ 下的像, $f^{-1}(D)$ 称为 $D$ 的逆像.

1.27 如果  $f$  是从  $A$  到  $B$  的一个函数, 而且  $S \subset A$ ,

$T \subset A, U \subset B, V \subset B$ , 则

$$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$$

$$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$$

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

$$f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$$

重要的事实。(包含符号  $\subset$  不能由  $=$  替代)

1.28 如果  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  为自然数的集合, 而

$N_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 则

- 集合  $A$  是有限的如果它是空的, 或对于某一自然数  $n$ , 存在一从  $A$  到  $N_n$  的一一对应函数.
- 集合  $A$  是可数性无限的如果存在一从  $A$  到  $N$  的一一对应函数.

一个有限的或可数性无限的集合通常称为可数的. 有理数集合是可数性无限的, 而实数集合是不可数的.

## 参 考 文 献

参照 Halmos (1974), Ellickson (1993) 及 Hildenbrand (1974).



## 方程式 一元函数 复数

$$2.1 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2.2 \quad \text{如果 } x_1 \text{ 及 } x_2 \text{ 是方程 } x^2 + px + q = 0 \text{ 的根, 则}$$
$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

$$2.3 \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$2.4 \quad x^3 + px + q = 0$$

$$2.5 \quad x^3 + px + q = 0 \text{ 且 } \Delta = 4p^3 + 27q^2, \text{ 则有}$$

- 三个不同的根, 如果  $\Delta < 0$ ;
- 三个实根, 其中至少两个相等, 如果  $\Delta = 0$ ;
- 一个实根, 两个复根, 如果  $\Delta > 0$ .

$$2.6 \quad \text{方程 } x^3 + px + q = 0 \text{ 的解为}$$

$$x_1 = u + v, \quad x_2 = \omega u + \omega^2 v, \text{ 以及 } x_3 = \omega^2 u + \omega v, \text{ 其中 } \omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}$$

$$\sqrt{-3}, \text{ 且有}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4p^3 + 27q^2}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4p^3 + 27q^2}}$$

一般一元二次方程的根. ( $a \neq 0$ ) 如果  $b^2 \geq 4ac$  则是实数根. (假设  $a, b,$  和  $c$  是实数)

Viète 定理.

一般一元三次方程.

如果在(2.3)中的  $x$  写为  $x - b/3a$ , (2.3) 可简写为(2.4).

(2.4) 中根的分类. (假设  $p$  和  $q$  是实数)

对于一元三次方程的根的 Cardano 公式.  $i$  是虚数单位 (参照(2.72)), 而  $\omega$  是 1 的第三个复根 (参见(2.85)). (除非必要时, 尽量不要使用这一公式!)

- 2.7 如果  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是方程  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的根, 则
- $$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$
- $$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$$
- $$x_1x_2x_3 = -r$$
- 有用的关系.
- 2.8  $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$
- $n$  阶多项式. ( $a_n \neq 0$ )
- 2.9 对于(2.8)中的多项式  $P(x)$ , 存在常数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  (实数或复数), 使
- $$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$
- 代数基本定理.  $x_1, \cdots, x_n$  称为  $P(x)$  的零点和  $P(x) = 0$  的根.
- 2.10  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{i < j} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
- $$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$
- $P(x) = 0$  的根与系数的关系, 其中  $P(x)$  定义在(2.8). ((2.2)与(2.7)的一般化)
- 2.11 如果(2.8)的系数  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$  均为整数,  $p$  和  $q$  是没有共同因子的整数, 且  $P(p/q) = 0$ , 则  $p$  可整除  $a_0$ ,  $q$  可整除  $a_n$ .
- 多项式的有理零点.
- 2.12 设  $k$  为(2.8)中系数数列  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$  改变符号的次数.  $P(x) = 0$  的实正根的个数, 包括根的乘积, 是  $k$  或  $k$  减去一个正偶数. 如果  $k = 1$ , 则方程仅有一个正实根.
- Descartes 符号法则.
- 2.13 方程
- $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
- 的图形为
- 一个椭圆, 一点, 或空集, 如果  $4AC > B^2$ ;
  - 一条抛物线, 一条直线, 两条平行线, 或空集, 如果  $4AC = B^2$ ;
  - 一个双曲线或两条相交线, 若  $4AC < B^2$ .
- 二次曲线的分类.  $A, B, C$  不全为 0.

$$2.14 \quad x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \text{ 其中 } \cot 2\theta = (A - C)/B$$

将方程(2.13)转换成对于  $x'$ ,  $y'$  的二次方程, 其中  $x'y'$  的系数为 0.

$$2.15 \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

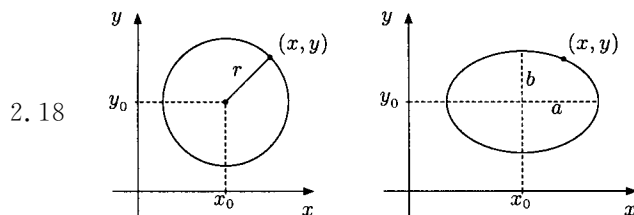
两点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  之间的(欧几里德)距离.

$$2.16 \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

以  $(x_0, y_0)$  为圆心,  $r$  为半径的圆.

$$2.17 \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

以  $(x_0, y_0)$  为中心, 轴与坐标轴平行的椭圆.



2.18

(2.16)与(2.17)的图形.

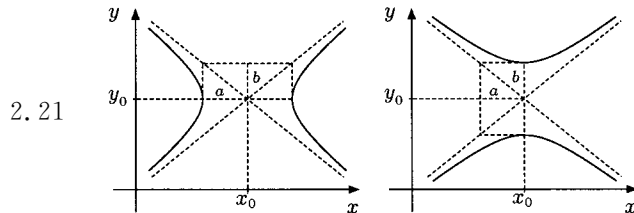
$$2.19 \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

以  $(x_0, y_0)$  为中心, 轴与坐标轴平行的双曲线.

2.20 (2.19)的渐近线:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

(2.19)中双曲线的渐近线的公式.



2.21

(2.19)与(2.20)中的双曲线和其渐近线的图形, 对应于各自的正负号.

$$2.22 \quad y - y_0 = a(x - x_0)^2, \quad a \neq 0$$

以  $(x_0, y_0)$  为顶点, 主轴平行于  $y$  轴的抛物线.