第一章　线性规划问题的数学模型及其标准形式

§1.1　绪　　论

线性规划是数学规划中理论较完整、方法较成熟、应用较广泛的一个分支，它可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济管理等许多方面提出的大量问题.

我们知道，在工农业生产、运输和经济管理等方面，经常遇到两种类型的问题，一类是已给定一定数量的人力、物力资源，问怎样安排运用这些资源，才能使完成的任务量最大，收到的效益最大；另一类是已给定一项任务，问怎样统筹安排才能使完成这项任务的人力、物力资源量为最小.事实上，这两类问题是一个问题的两种提法.这样的问题就是属于线性规划所要研究和解决的问题，对于一些简单的极值问题，在微积分中我们可以用拉格朗日（Lagrange)乘子法得到解决,但当变量数目和约束条件数目相当大时，比如上千，甚至上万个，就不容易解决了，这就需要化为线性规划问题，利用计算机以求得解决.

规划论是一门称为运筹学的学科的重要分支.运筹学包括规划论、更新论、存贮论、质量控制、排队论、对策论等分支,规划论中又包括了线性规划、非线性规划、动态规划三个方面.线性规划的理论、方法比较简捷，只要把所探讨问题的性质、指标因素等，限制在约束条件之中，求出满足约束条件的解，就可以选择或确定符合要求的最优方案因此，线性规划是运用数学模型解决有限资源最优配置 的有效工具和灵活手段.

资源配置问题一直被认为是经济学的一个十分重要的问题.线性规划是一个更接近现实经济活动情况的资源最优配置方法，可以对资源配置问题提供数量的解答.因此，不论在宏观经济领域，还是在微观生产经营活动中，线性规划理论与方法愈来愈广泛地得到应用.

早在 1939 年，苏联坎托罗维奇(Л. В. Канторович)从运输问题入手开始研究,写出了《生产组织与计划中的数学方法》，它是这方面的早期著作.20 世纪 40 年代末丹齐克(G. B. Dantzig)等人进一步从理论和方法上完善了线性规划学科，他在 1947 年与 L. 霍尔维茨(L. Hurwicz)共同发明了求解线性规划的单纯形法，为线性规划作为一门学科奠定了基础.D. 盖尔(D. Gale)、H. W. 库恩(H. W. Kuhn)和 T. W. 塔克尔(A. W. Tucker)，在发展对偶理论上作出了重要贡献，从而形成了应用数学中发展迅速、应用广泛而且十分活跃的学科——线性规划.在 20 世纪 50 年代，线性规划已经成了经济学家们分析经济问题的重要工具，在这方面贡献突出的有苏联的坎托罗维奇和美国的库普曼斯（T. C. Koopmans),他们联合获得了 1975 年诺贝尔经济学奖金.随着现代电子计算机的不断发展，计算能力的大大提高，使这一数学方法的应用，更具有广泛性.

我国在这方面的研究开始于 20 世纪 50 年代，在不长的时间内线性规划理论与方法得到了广泛采用并收到了很好的效果

1956 年以来数学家对规划论在理论上进行了一些本质性的深入研究，使得求解线性规划的规模愈来愈大，而且规划论和其他数学分支的联系愈来愈多．所以，我们学习这门功课，对于今后的学习和工 作都是很有用途的．

§1.2 线性规划问题的数学模型

将数学方法应用到任何一个实际问题中去，往往首先需要把这个问题的内在规律，运用数字、图表或者公式、符号表示出来，然后经过数学处理获得定量结果，以供人们作出分析、预报、决策或者控制．这个过程就是通常所说的建立数学模型．为了了解线性规划的数学模型，我们先看下面的引例．

一、引例

某工厂计划生产甲、乙、丙三种产品生产甲产品 1 件需要原材料 3 kg，占用劳动工时 2 h(小时)，盈利 4 元；生产乙产品 1 件需要原材料 2 kg，占用劳动工时 1 h，盈利 5 元；生产丙产品 1 件需要原材料 4 kg，占用劳动工时 3 h，盈利 3 元．若每天供应原材料 120 kg，劳动工时数为 100 h，在工时必须完全利用的条件下，问该厂应如何安排日生产，使总利润最大？

解决这一实际问题，我们应当把它归结为数学问题，一般可分以下步骤：

(1) 把问题的相关条件列成表格形式如下表：

单位消耗 资源 \ 产品	甲	乙	丙	资源供给数量
原材料(kg)	3	2	4	120 kg
劳动工时(h)	2	1	3	100 h
单位利润(元/件)	4	5	3	

(2) 选择决定因素作为未知量．

设 x_1, x_2, x_3 分别表示生产甲、乙、丙产品的数量（件）．

(3) 确定问题中的所有的限制条件，用方程组或不等式组表示．

该厂每天消耗的原材料数量不能超过 120 kg．

即：

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 120.$$

该厂提供的劳动工时数 100 h，必须用完．

即：

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100.$$

由未知量的实际意义有：

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$ 且均取整数．

(4) 确定该问题所寻求的目标：

使总利润 $S(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ 取得最大值

综上所述，该问题的数学表达式(数学模型)为 求 $x_j, j = 1,2,3$，满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 120, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \text{ 均取整数，} \end{cases}$$

并使总利润 $S(x)=4x_1+5x_2+3x_3$ 为最大.

由引例我们可以看到，实际问题中用数学式子表述出来，就可以把这些数学式称为实际问题的数学模型.而数学模型中所有表达式都是一次的，把属于这一类的数学模型称为线性规划的数学模型.

二、线性规划的数学模型

把在一组线性等式或不等式的约束之下，求一个线性函数的最大值或最小值的问题称为线性规划问题.线性规划问题的数学模型包含两个组成部分，一是目标函数，二是约束条件.目标函数是一个由欲达到最优目的的有关量所构成的关系式，根据研究的目标是最大还是最小，在目标函数前冠以‘max’或‘min”;约束条件是欲达到预期目的所受到的现实客观环境的制约，将这种制约用等式或不等式表示，即为约束条件，以后简记为 s.t.;是“subject to”的缩写.

研究数学模型，有助于认识这类问题的性质和寻求它的一般解法.但线性规划问题涉及到实际问题是非常广泛的，下面我们举几个典型的实际问题的例子.

例 1.1　运输问题

设 A_1、A_2、A_3 三地某时期产煤各为 7 kt(千吨)、4 kt、9 kt 销地为 B_1、B_2、B_3、B_4 四地，销量分别为 3 kt、6 kt、5 kt、6 kt ，问题是如何按下列运价表编制一个调运方案，使总运费最少？

单位 kt

收货 / 发货	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

注:A_1 行与 B_1 列相交处数字 3 为运价元／kt,其他类似.

解　设 S 表示总运费，x_{ij} 表示由煤产地 A_i 运往销地 B_j 煤的数量（单位:kt),$(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$,例如 x_{23} 表示由煤产地 A_2 运往销地 B_3 煤的数量等等.如下表。

单位 kt

收货 / 发货	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	4
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9
销量	3	6	5	6	

因为由产地 A_1 运往四个销地煤的总数应为 A_1 的产量 7 kt ,即有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7.$$

同样由产地 A_2、A_3 运往四个销地煤的总数应分别为 A_2 的产量 4 kt 和 A_3 的产量 9 kt ,即

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4\ .$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9.$$

另一方面，三个产地供给销地 B_1 煤的数量应等于 B_1 的需要量 3 kt ,即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3.$$

同理可得

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=6.$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=5.$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6.$$

因此，这一问题的数学模型为

$$\begin{aligned}\min\ S=&3x_{11}+11x_{12}+3x_{13}+10x_{14}\\&+x_{21}+9x_{22}+2x_{23}+8x_{24}\\&+7x_{31}+4x_{32}+10x_{33}+5x_{34}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ \ &x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7.\\&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4.\\&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9.\end{aligned}$$

在本例中发货点 A_1,A_2,A_3 产煤总量为

$$7+4+9=20(\text{kt}).$$

收货点 B_1,B_2,B_3,B_4 销量为

$$3+6+5+6=20(\text{kt}).$$

两者相等.这一类问题称为收发平衡型的运输问题，当然也可以研究收发不平衡运输问题.

一般的运输问题可以表述如下：要把某物资从 n 个发货点 $A_i,i=1,2,\cdots,n$,调运给需要这种物资的 m 个收货点 $B_j,j=1,2,\cdots,m$ 发货点 A_i 拥有物资量为 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 收货点 B_j 的需求量是 $b_j,j=1,2,\cdots,m$,已知

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j,$$

从 A_i 运一个单位物资到 B_j 的运价是 c_{ij}.现在要确定一个调运方案，即确定由 A_i 到 B_j 的运输量 $x_{ij},i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$ ，在满足供需要求的前提下，使总运输费用最省.

类似地分析，我们知道一般运输问题的数学模型是：

$$\min\ S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ \ &\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,i=1,2,\cdots,n.\\&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,j=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m.$$

实际问题中，收发不平衡运输问题是很普遍的，类似于上面方法，读者可以尝试建立不平衡运输问题的数学模型.

例 1.2 产品安排

某工厂有生产甲、乙两种产品的能力，且生产 1 t(吨) 甲产品需要 3 个工日和 0.35 t 小麦,生产 1 t 乙产品，需要 4 个工日和 0.25 t 小麦.该厂仅有技工 12 人，一个月只能出 300 个工日,小麦一个月只能进 21 t,并且还知生产 1 t 甲产品可盈利 8 000 元,生产 1 t 乙产品可盈利 9 000 元.那么，这个工厂在一个月中，应如何根据现有条件安排这两种产品的生产，使之获得最大盈利？建立这个问题的数学模型.

解 设 x_1、x_2 分别表示一个月中生产甲、乙两种产品的数量，则最大盈利为

$$S = 8\,000x_1 + 9\,000x_2.$$

工日的约束为 $3x_1+4x_2 \leqslant 300$;原料小麦的约束为 $0.35x_1+0.25x_2 \leqslant 21$，该问题的数学模型即为

$$\begin{aligned} \max\ & S = 8\,000x_1 + 9\,000x_2. \\ \text{s.t.}\ & 3x_1+4x_2 \leqslant 300. \\ & 0.35x_1+0.25x_2 \leqslant 21. \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

例 1.3 下料问题

已知工厂有一批(数量充分多)长为 180 cm 的钢管.现需要 70 cm 长的不少于 100 根，52 cm 长的不少于 150 根和 35 cm 长的不少于 100 根，问如何下料才能使边料最少？

解 由题意知，经过试算可以有 8 种不同的下料方法.

设 x_i 为用第 i 种截料的方法所截钢管的根数，列表如下：

规格	截法								需要量
	x_1 (一)	x_2 (二)	x_3 (三)	x_4 (四)	x_5 (五)	x_6 (六)	x_7 (七)	x_8 (八)	
70(cm)	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52(cm)	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35(cm)	1	0	1	3	0	2	3	5	100
边料(cm)	5	6	23	5	24	6	23	5	

设 f 为剩余边料的总长.数学模型为

$$\begin{aligned} \min\ & f = 5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8. \\ \text{s.t.}\ & 2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100. \\ & 2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geqslant 150. \\ & x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_3 \geqslant 100. \\ & x_1, x_2, \cdots, x_8 \geqslant 0. \end{aligned}$$

例 1.4 营养问题

假定在市场上可以买到各种不同的食品，第 j 种食品每单位售价为 c_j 元. 现在要求考虑 m 种基本营养成分，若要保证良好健康，对第 i 种营养成分，每人每天不能少于 b 个单位. 最后假定第 j 种食品每单位含有 a_{ij} 个单位的第 i 种营养. 在满足保证良好健康的起码营养要求的条件下，来确定最经济的饮食. 试建立这个问题的数学模型.

解　设 x_j 为购买第 j 种食品的单位数设 S 为购买食品的总费用. 于是，这个问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min\ & S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m, \\
& x_j \geqslant 0, (j = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

以上这些从实际问题中建立起来的数学表达式，如果约束条件是由一些线性不等式或线性方程所组成，而且目标函数是欲求未知变量线性函数的一类条件极值问题，则统称为线性规划问题(简记为 LP).

§1.3　线性规划问题的标准形式

一、线性规划问题的标准形式

上面列举了一些线性规划问题的数学模型，在模型的约束条件中可能是线性等式，也可能是线性不等式；目标函数可能是求最大值，也可能是求最小值；个别具体问题中一些变量甚至没有非负限制，这些形式上的不一致，给我们在研究线性规划问题的性质和求解过程中都会带来困难，所以必须将各种形式的线性规划问题化为下面这种等价的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min\ & S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \\
\text{s. t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\
& x_j \geqslant 0, (j = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}
$$

其中 $x_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 为待定的决策变量，已知的系数 a_{ij} 组成的矩阵

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

称为约束矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列向量记为

$$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})$$

(T 为转置符号）目标函数的系数组成的向量记为

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为价值向量；向量 b

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

称为右端向量.利用向量和矩阵的符号，线性规划可简记为

$$\begin{aligned}&\min\ S=\boldsymbol{cX},\\ &\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\\ &\qquad\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\min\ S=\boldsymbol{cX},\\ &\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b},\\ &\qquad\ \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

也可以用集合形式描述线性规划的标准形式

$$\left\{\min\ \boldsymbol{cX}\,\middle|\,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}.$$

所谓线性规划问题的标准形式（也称标准型），应该具备以下四点：

(1) 目标函数是求最小值（或最大值）；

(2）在约束条件中，除了非负约束用“ $\geqslant$ ”号外，其他所有约束条件均用等式（或称方程）表示；

(3）每个约束方程的常数项均是非负的（ $b_i\geqslant0$）;

(4）所有未知量受非负限制.

另外，如果未知量无非负约束时，称为自由变量，这时，这个未知量可用两个受非负限制的变量 y_1、y_2 之差描述,如 $x=y_1-y_2$,其中 $y_1,y_2\geqslant0$.

若约束条件带有绝对值号时，比如 $|a_1x_1+a_2x_2|\leqslant b$,则可等价地化为

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2\leqslant b,\\ a_1x_1+a_2x_2\geqslant -b;\end{cases}\ \text{即等价于}\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2\leqslant b,\\ -a_1x_1-a_2x_2\leqslant b.\end{cases}$$

二、任一线性规划问题等价地转化为标准形式的方法

1. 引进松弛变量

在约束条件中，除未知量为非负限制外，其余的约束条件全为“ $\leqslant$ ”非严格不等式,那么可以通过增加非负变量的办法，即引进松弛变量，化“ $\leqslant$ ”的情况为“ $=$ ”的情况

如果第 i 个约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b$$

时，则引进松弛变量 $x_{n+1}\geqslant0$ 使

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b$$

成立.

例 1.5 化

$$\begin{aligned} \min S &= 9x_1 + 7x_2 , \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 5x_2 \leqslant 6, \\ & x_1 + 3x_2 \leqslant 4, \\ & 7x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

为标准型.

解 依次引进松弛变量 x_3、x_4、x_5 得标准形式为

$$\begin{aligned} \min S &= 9x_1 + 7x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 , \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 6, \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 4, \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

引进的松弛变量 x_3、x_4、x_5 应与 x_1、x_2 同等看待，将松弛变量纳入目标函数时，其系数均应取零.

2. 引进剩余变量

当将约束条件中‘$\geqslant$’转化为‘$=$’时,在各方程中所附加变量的前面均应取负号,则称这样的附加变量为剩余变量.

如果第 i 个约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b$$

时，则引进剩余变量 $x_{n+1} \geqslant 0$ 使得

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

成立.

将剩余变量纳入目标函数时，其系数也应取零.

例 1.6 若将上例不等号‘$\leqslant$’反向,那么约束条件为

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 5x_2 \geqslant 6, \\ & x_1 + 3x_2 \geqslant 4, \\ & 7x_1 + 2x_2 \geqslant 8, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

引进剩余变量后，显然等价于

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 6, \\ & x_1 + 3x_2 - x_4 = 4, \\ & 7x_1 + 2x_2 - x_5 = 8, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{aligned}$$

从上面例子看出：当引进松弛变量或剩余变量之后，比原约束条件中的变量增加了 m 个,使得总变量数为 $n+m$ 个,一般来讲,对于约束条件 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, (i = 1, 2, \cdots, m)$,引进松弛变量后约束条件的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (A \mid I)$$

当约束条件 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$ 时，引进剩余变量后其约束条件的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (A \mid -I)$$

上面出现的（$A \mid I$)和($A \mid -I$)是一种特殊矩阵，它将矩阵的列分为两部分，前 n 列是原问题的系数矩阵，后 m 列是 $m \times m$ 的单位阵或负单位阵，这种特殊矩阵在今后求解线性规划问题时，将经常要用，应引起重视.

3. 若常数 b_i 为负数时，则可在该约束条件的两边同乘'-1'使常数 b_i 变为正数 $-b_i$. 即

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \, .$$

同乘'-1'则转化为

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i \, .$$

4. 若原问题目标函数是求最大值

$$\max S = cX \, ,$$

则可化成等价问题求最小值，即

$$\max S = -\min(-S)$$

令 $S' = -S$, 于是得到

$$\min S' = -cX \, .$$

5. 含有自由变量

设 x_j 为自由变量，则总可以找到 $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$,使得 $x_j = y_1 - y_2$,代人约束方程,此时约束方程中就不再有不受非负限制的变量了.

例 1.7　化

$$\begin{aligned} \max\ & S = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \, , \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 40 \, , \\ & x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geqslant 50 \, , \\ & 5x_1 + 3x_2 = 20 \, , \\ & |5x_2 + 8x_3| \leqslant 100 \, , \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

为标准型.

解　分别依次化最大为最小，引进松弛变量、剩余变量，$y_1, y_2 \geqslant 0$ 等化为标准型：

$$\begin{aligned} \min S' = & -3x_1 + 3x_2 - 7(y_1 - y_2) + 0 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 3(y_1 - y_2) + x_4 = 40 \, , \\ & x_1 + 9x_2 - 7(y_1 - y_2) - x_5 = 50 \, , \end{aligned}$$

$$5x_1+3x_2=20,$$
$$5x_2+8(y_1-y_2)+x_6=100,$$
$$-5x_2-8(y_1-y_2)+x_7=100,$$
$$x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0,y_1,y_2\geqslant 0$$

§1.4 线性规划问题的基本解和最优解

上节讨论了线性规划问题的标准形式，但未涉及到求解的问题，为了寻求线性规划问题的求解方法，我们先从标准型入手介绍一下有关解的概念.

线性规划问题的标准型为：

$$\min S=cX,$$
$$\text{s.t. } AX=b,$$
$$X\geqslant 0.$$

A 是约束方程的系数矩阵，今后一般都假定矩阵 A 的秩 $R(A)=R(\bar{A})=m(\bar{A}$ 为增广矩阵),现在我们从 A 中任取 m 个线性无关的列向量，并用 B 表示由这些列组成的 $m\times m$ 阵,显然 B 是非奇异的，这时 A 总可以表示为 $A=(B\ \vdots\ N)$. 相应地,$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}$,则约束方程 $AX=b$,记为：

$$(B\ \vdots\ N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b,$$
$$BX_B+NX_N=b,$$

其中 $B=(a_{ij})_{m\times m}$, $N=(a_{ij})_{m\times(n-m)}$.

$$X_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\quad X_N=\begin{pmatrix}x_{m+1}\\x_{m+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

B 称为约束方程 $AX=b$ 的一个基，这类基 B 的选取至多有 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$ 种,它的全体构成了一个基集合，与基 B 相对应的 m 个分量称为基本变量，记为 X_B.其余 $n-m$ 个分量称为非基本变量,记为 X_N 随着基 B 的改变，基本变量和非基本变量也将相互转变，故基本变量和非基本变量都不是固定不变的，而是相对于基 B 而定.

下面介绍关于解的重要概念：

一、基本解

在约束方程 $BX_B+NX_N=b$ 中，若令非基本变量为 0 时,即 $X_N=0$,则

$$BX_B=b.$$

$$X_B = B^{-1}b$$

可表示为 $X = (X_B^{\mathrm{T}}, 0)^{\mathrm{T}}$，$X_B$ 就称为约束方程的一个基本解

例 1.8　当数学模型的约束条件为

$$\text{s.t.}\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

时，可求得　$R(A) = R(\widetilde{A}) = 2$.

这里 $m = 2, n = 4, n > m$，若将

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{分为} \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

则

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

约束条件化为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad X_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

此时 x_1、x_2 是基本变量，x_3、x_4 是非基本变量，如果 $x_3 = x_4 = 0$

$$X_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ 是约束方程的一个基本解，也就是在基 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 下的一个基本解，但在这个约束方程中基 B 的选取不是惟一的，应该有 $C_4^2 = 6$ 种基的情况，详见下页表.

二、可行解与基本可行解

满足约束条件　$\text{s.t.}\ AX = b,$

$$X \geqslant 0$$

的解称为线性规划问题的可行解，当可行解 X 是 $AX = b$ 的基本解时，则称为线性规划问题的基

基 B	基本变量 X_B	非基 N	非基本变量 X_N	基 B 的解	基本可行解 X
B_1 $\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$	$X_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$	$N_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$	$X_{B_1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$	$x^{(1)}=(X_{B_1},0)^T=\left(\frac{3}{2},1,0,0\right)^T$
$B_2=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$	$X_{B_2}=\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}$	$N_2=\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}$	$X_{N_2}=\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$	$X_{B_2}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$x^{(2)}=(2,0,2,0)^T$
$B_3=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$	$X_{B_3}=\begin{pmatrix}x_1\\x_4\end{pmatrix}$	$N_3=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$	$X_{N_3}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$	$X_{B_3}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$	$x^{(3)}=(3,0,0,-2)^T$ (不可行)
$B_4=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$	$X_{B_4}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}$	$N_4=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$	$X_{N_4}=\begin{pmatrix}x_1\\x_4\end{pmatrix}$	$X_{B_4}=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$	$x^{(4)}=(0,-6,4,0)^T$ (不可行)
$B_5=\begin{pmatrix}3&0\\1&1\end{pmatrix}$	$X_{B_5}=\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$	$N_5=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$	$X_{N_5}=\begin{pmatrix}x_1\\x_5\end{pmatrix}$	$X_{B_5}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$x^{(5)}=(0,2,0,2)^T$
$B_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$X_{B_6}=\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$	$N_6=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$	$X_{N_6}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$	$X_{B_6}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$x^{(6)}=(0,0,6,4)^T$

本可行解.

如上表中在基 B_1、B_2、B_5、B_6 下有基本可行解

$$x^{(1)}=\left(\frac{3}{2},1,0,0\right)^T,\qquad x^{(2)}=(2,0,2,0)^T,$$
$$x^{(5)}=(0,2,0,2)^T,\qquad x^{(6)}=(0,0,6,4)^T.$$

而在基 B_3、B_4 下有基本解 $x^{(3)}=(3,0,0,-2)^T$, $x^{(4)}=(0,-6,4,0)^T$,但不是可行解,因为它不满足 $X\geqslant 0$ 的非负约束.

或者设 $x^{(0)}$ 为可行解,若 $x^{(0)}=0$,或 $x^{(0)}$ 的非零分量所对应的系数列向量线性无关时，则称 $x^{(0)}$ 为基本可行解.

三、最优解

最优解包括最优可行解和最优基本可行解；使目标函数达到极值的可行解，称为最优可行解,如果最优可行解又是基本的,则称为最优基本可行解.

四、退化基本解

若在基本解中，有一个或多个基本变量取了 0 值时，则称此基本解为退化基本解.

同样可以定义退化基本可行解与退化最优基本可行解.

显然在非退化基本可行解中，全部分量都是大于等于 0 的，而且大于 0 的分量必为基本变量,等于 0 的分量必为非基本变量.但当出现退化情况时，等于 0 的基本变量与取 0 值的非基本变量就不易区分了.

习 题 一

一、填空题

1. 线性规划的数学模型就是用________描述实际问题.

2．线性规划数学模型的两个组成部分是＿＿＿＿＿和＿＿＿＿.
3．为了避免约束条件中出现多余方程，要求秩（A）=＿＿＿＿＿.
4．线性规划标准形式的四个特点是：
1°＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；2°＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；
3°＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；4°＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.
5．将约束条件中的不等式转化为等式的方法是＿＿＿＿＿.
6．若某个决策变量 x_i 无非负限制，则可令 x_i = ＿＿＿＿＿且＿＿＿＿＿.

二、单项选择题

1．线性规划数学模型的第 i 个约束条件为：$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b$，引入变量 $x_{n+1}\geqslant 0$，使其变为等式，则 x_{n+1} 是 （ ）.

A 人工变量；　　B 剩余变量；

C 松弛变量；　　D 自由变量.

2．线性规划的数学模型的一个约束条件为：$x_1+9x_2-7x_3\geqslant 3$，将它化为标准型后是（ ）.（假定 x_j 非负，$j=1、2、3$）

A $x_1+9x_2-7x_3+x_4=3$ （$x_j,j=1、2、3、4$ 非负）；

B $x_1+9x_2-7x_3+x_4=-3$ （$x_j,j=1、2、3、4$ 非负）；

C $x_1+9x_2-7x_3-x_4=3$ （$x_j,j=1、2、3、4$ 非负）；

D $x_1+9x_2-7x_3-x_4=-3$ （$x_j,j=1、2、3、4$ 非负）.

3．线性规划

$$\begin{aligned}&\min\ S=\boldsymbol{cX}\\&\text{s.t. } \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}.\\&\quad\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{aligned}$$

，必有（ ）.

A 基本解；　　B 基本可行解；

C 最优可行解；　　D 最优基本可行解.

4．线性规划约束条件中，有一个“$\geqslant$”，一个“$\leqslant$”和一个自由变量，则化为标准型后，变量增加的个数是（ ）.

A 1；　B 2；　C 3；　D 4.

5．设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 是约束方程的系数矩阵，则基 $\boldsymbol{B}$ 的选取至多有（）.

A m；　B n；　C C_n^n；　D C_n^m.

三、解答题

写出下列问题的数学模型：

1．有两个煤场 A、B，每月分别进煤不少于 60 t(吨)、100 t，它们担负供应三个居民区用煤任务，这三个居民区每月需用煤分别为 45 t、75 t、40 t，A 场离这三居民区分别为 10 km、5 km、6 km，B 场离这三居民区分别为 4 km、8 km、15 km，问这两煤场如何分配供煤，才能使运输力最小.

2．某工厂生产甲、乙、丙三种铝合金产品，生产每单位产品甲需用铝和铁分别是 3 kg 和 2 kg，生产每单位产品乙需用铝和铁分别是 1 kg 和 3 kg，而生产每单位产品丙需用铝和铁分别是 1 kg 和 2 kg. 已知生产每单位产品分别能获利 5 元、4 元、3 元. 而工厂每天能得到的原料供应为铝：840 kg、铁：700 kg. 试问如何安排三种产品的生产，才能使工厂获得最大利润？

3．某木器厂生产圆桌和衣柜两种产品，现有两种木料，第一种有 72 m^3，第二种有 56 m^3，假设生产每种产品都需要用两种木料. 生产一只圆桌和一个衣柜所需木料如下表所示. 每生产一只桌子可获利润 6 元，生产一个衣柜可获利润 10元，木器厂在现有木料条件下，圆桌和衣柜应各生产多少，才使获得利润最多

产　　品	木料(单位:m^3)	
	第一种	第二种
圆桌	0.18	0.08
衣柜	0.09	0.28

4. 造纸厂用废布、废纸和木纸浆作原料，生产甲、乙、丙三种纸张，生产每种纸 1 t 所需原料和利润及原料限额如下表所示. 问如何安排三种纸的生产，能使总利润最大？

单位：t

单位消耗 产品 / 原料	甲	乙	丙	原料限额
废布	4	1	3	100
废纸	18	15	10	660
木纸浆	3	9	12	270
单位利润（元/t）	50	70	90	

5. 某工厂计划生产甲、乙两种产品，其主要材料有钢 3 600 kg,铜 2 000 kg,专用设备能力为 3 000 台时,材料与设备能力的消耗定额与单位产品所获利润如下表，问如何确定生产计划，才能获得最大利润？

单位消耗 产品 / 原料及设备	甲	乙	限额
钢(kg)	9	4	3 600
铜(kg)	4	5	2 000
专用设备能力(台时)	3	10	3 000
单位利润（元/单位产品）	70	120	

6. 某养鸡场有 10 000 只鸡，用动物饲料及谷类饲料混合喂养. 每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 kg,其中动物饲料占的比例不得少于 $\frac{1}{5}$,动物饲料 0.2 元/kg,谷类饲料 0.16 元/kg，饲料公司每周只保证供应谷类饲料 25 000 kg,问饲料应怎样混合,才能使成本最低.

7. 有一食品加工厂，生产某种食品，由甲、乙两种原料混合制成. 按照有关部门的技术规定，生产该种食品一个单位至少含热量 300 cal(卡路里),但油脂不能超过 21 个单位已知 1 kg 甲原料含热最 150 cal 和 4 个单位油脂，1 kg 乙原料含热量 200 cal 和 4 个单位油脂，1 kg 甲原料市场价格为 3 元,乙原料为 5 元问如何配料，才能使一个单位食品的成本最低？

四、将下列线性规划问题转化为标准形式

1.
$$
\begin{aligned}
&\max S = 4x_1 + 3x_2,\\
&\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6,\\
&\qquad -3x_1 + 2x_2 \leqslant 3,\\
&\qquad 2x_2 \leqslant 5,\\
&\qquad 2x_1 + x_2 \leqslant 4,\\
&\qquad x_1, x_2 \geqslant 0;
\end{aligned}
$$

2.
$$\min S = 2x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1+x_2\geqslant 3,$$
$$4x_1+3x_2\geqslant 6,$$
$$x_1+2x_2\leqslant 3,$$
$$x_1,x_2\geqslant 0;$$

3.
$$\max S=x_1-2x_2+3x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad x_1-x_2+x_3\leqslant 18,$$
$$x_1-x_2-2x_3\geqslant 2,$$
$$2x_1+x_2-2x_3=-5,$$
$x_1,x_2\geqslant 0,x_3$ **符号不受限制；**

4.
$$\min S=-5x_1+20x_2+4x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1-2x_2-x_3\leqslant 100,$$
$$5x_1+4x_2-3x_3\geqslant -150,$$
$$x_1+6x_2+x_3\leqslant 200,$$
$$x_j\geqslant 0,(j=1,2,3);$$

5.
$$\min S=2x_1+3x_2+5x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2-x_3\geqslant -5,$$
$$-6x_1+7x_2-9x_3=15,$$
$$|19x_1-7x_2+5x_3|\leqslant 13,$$
$$x_j\geqslant 0,(j=1,2,3);$$

6.
$$\min S=6x_1+3x_2-4x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+x_2+5x_3\leqslant 20,$$
$$x_1+3x_2-5x_3\geqslant 30,$$
$$5x_1+2x_2=10,$$
$$|3x_2+4x_3|\leqslant 80,$$
$x_1,x_2\geqslant 0,x_3$ **无符号限制**.

五、确定如下线性规划问题 的基、基本解、基本可行解和线性规划问题的最优解

1.
$$\min S=x_1+2x_2+3x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1-x_2=1,$$
$$x_1+x_3=1,$$
$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0;$$

2.
$$\max S=3x_1+x_2,$$
$$\text{s.t.}\quad 3x_1-x_2\leqslant 0,$$
$$x_1+x_2\leqslant 4,$$
$$x_1,x_2\geqslant 0;$$

3.
$$\max S=x_1+2x_2,$$
$$\text{s.t.}\quad x_1\leqslant 4,$$
$$x_2\leqslant 5,$$
$$x_1+x_2\leqslant 6,$$
$$x_1,x_2\geqslant 0.$$

第二章　线性规划问题的解法及原理

§2.1　线性规划问题的图解法

前一章我们研究了线性规划问题的数学模型、标准形式和线性规划问题有关解的概念，但并没有涉及到具体的解法．为了后面讲解基本理论有一个直观的印象，下面我们先介绍用图解法求解线性规划的问题．

一个线性规划问题的可行解集合，也称为可行域．如果只有两个变量，则它的可行区域可在平面上具体画出．这样我们可以方便地利用目标函数与可行域的关系用图解法求解该问题，同时也可直观地了解可行区域 D 的结构由此得出的结论也适用于含有更多变量的线性规划问题．

例 2.1　用图解法求解线性规划问题．

$$
\begin{aligned}
\max\ & S = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \leqslant 5 \\
& x_1 - x_2 \leqslant 3 \\
& x_1 . x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

解　以 x_1 和 x_2 为坐标轴建立直角坐标系，把问题转化在二维平面上，找出满足约束条件的点集，也就是可行解集．

约束条件是由四个不等式组成，据一次不等式的几何意义知：每个不等式对应着一个半平面．因此可行解集是四个半平面的公共部分，即凸多边形 $OADC$ （也称为可行域）（图 2-1）

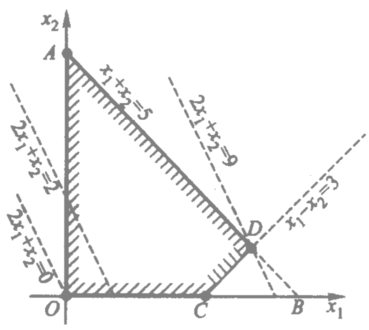

图 2-1

我们要在全体可行解中找出一个最优解，就是目标函数值最大的可行解．为此给定 S 一系列的值，比如令 $S=0,1,2,\cdots$ 变大时,直线

$$x_2 = -2x_1 + S$$

沿其增大的方向平行移动，当移到直线离原点较远的点 D 时,显然 D 点坐标既满足约束条件，又使目标函数取得最大值．

D 点坐标由

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

确定，解得为

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

即点 D 的坐标为 $(4,1)$ ，所以最优解为：$x_1=4, x_2=1$ ，目标函数的最大值为：

$$S=2\times4+1=9.$$

注　如果将例 2.1 中的目标函数改为 $S=2x_1+2x_2$,并求最大值,那么 AD 边上每一点的坐标都是最优解（因为平行直线族中，离原点最远的一条直线 $2x_1+2x_2=10$ 与 AD 重合）,因此，该线性规划问题有无限多个最优解.

例 2.2　用图解法求解线性规划问题.

$$\begin{aligned}\min\ & S=3x_1+2x_2,\\ \text{s.t.}\ & x_1+2x_2\geqslant4,\\ & x_1-x_2\geqslant1,\\ & x_1,x_2\geqslant0.\end{aligned}$$

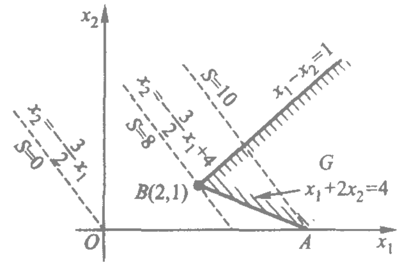

图 2-2

解　如图 2-2 所示,可行解域 G 为无界开区域.

因为目标函数是以 S 为参数的一族平行线,故分别令 S 为 10、8、0 等,可见直线离原点愈近时,目标函数值愈小,由图2-2可以看出最小值在 B 点达到，而 B 点坐标为（2,1),故 $x_1=2,x_2=1$ 为问题的最优解，相应的目标函数最小值为

$$S=3\times2+2=8.$$

若改为求目标函数最大值 $\max S=3x_1+2x_2$,则可行解域无上界,在可行解域中,当平行直线族的直线沿增大方向可以平移至无穷远时，问题有无界解因而不存在最大值，也就没有最优解.

例 2.3　用图解法求解线性规划问题.

$$\begin{aligned}\min\ & S=4x_1-2x_2\ .\\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2\leqslant1.\\ & x_1+2x_2\geqslant4\ .\\ & x_1\ .\ x_2\geqslant0.\end{aligned}$$

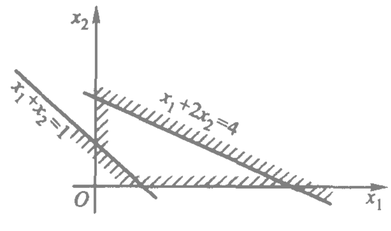

图 2-3

解　从图 2-3 可以看出，同时满足四个不等式的点不存在,所以没有可行解,当然没有最优解.

由以上例子可以看出，只含两个变量的线性规划问题，可以没有解,如例 2.2 中改求目标函数最大值的情况和例 2.3 ;可以有惟一解,或者有无限多个解,如例 2.1 及该题后的注.

还可以看出：

(1) 线性规划问题的任意两个可行解的连线上的点，都是可行解；

(2) 线性规划问题的最优解如果存在，必可在可行解域的某个“顶点”上达到.

这些性质对于 n 个变量的线性规划问题也是正确的.

在用图解法求解两个变量的线性规划问题时，如果已判定存在最优解，则可利用性质（2),直接求得可行解域的所有“顶点”（只有有限个）.然后，将这些点的坐标代入目标函数求值，比较这些顶点对应的目标函数值，取其中最大（或最小）的，就可以求得问题的最优解.这个方法,称作求最优解的穷举法.