# 经 济 数 学

关叶青　张凤林　编写

立 信 会 计 出 版 社

# 前　言

随着我国加入 WTO，市场竞争越来越激烈，世界经济也正向着全球一体化方向发展，管理现代化已是摆在我们面前的一项紧迫任务，而现代化管理的理论和方法的掌握都需要有一定的数学基础．在长期的教学实践中，我们也发现财经类学生的弱点是理性思维不足，学过的数学知识不能灵活运用．为帮助广大从事经济管理的实际工作者较快地掌握现代化管理方法，我们在总结多年教学经验的基础上，编写了《经济数学》一书．

首先，要说明的是，经济数学并不是一个新的数学分支，而是将经济管理中常用的数学方法集中在一起汇编成册，便于学习和应用．本书选编了线性代数、线性规划和概率与数理统计等内容，这些内容分属三个不同的学科分支，在理工类专业中是单独开设的，这方面的教材和教学参考书大都内容较深、较多，强调数学理论的系统性和严谨性．我们在编写教材时希望尽可能多地介绍一些财经类专业所必需的数学方法，在符合教学大纲规定的内容要求的前提下，既考虑财经类学生对数学知识的直接或间接需要，又考虑学习数学对培养学生逻辑思维能力的重要性，及为学习其它经济管理方面的课程打下必要的数学基础．经过认真的分析和研究，我们针对线性等式模型、线性不等式模型和随机模型统一编排这三个数学方法，并通过两个软件的介绍实现这些数学方法的可操作性，力求便于课堂讲授，内容上力求全面系统，工具方法上尽量简单实用．

其次，本书在编写方式上，为使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，尽量采用学生易接受的叙述方法，避免繁琐的理论推导和证明，并选编了相当数量的典型例题和习题，书后附有习题的参考答案．

再次，目前国内出版了不少《经济数学基础》等相关教材，这些教材都是各兄弟院校数学教师在总结实际教学经验的基础上编写而成的，我们编写教材时，希望能将各兄弟院校编写教材的经验反映出来．为此，在编写教材过程中，听取了部分兄弟院校教师对编写教材的意见，参考了不少兄弟院校编写的有关教材．

本书是财经类专业的本科生教材，讲授全书约需 108 学时（线性代数 32 学时，线性规划 24 学时，概率与数理统计 40 学时，软件操作 12 学时）左右；同时也可供企、事业单位从事经济管理工作的人士阅读、参考．

本书由南京航空航天大学经管学院的关叶青、张凤林编写．关叶青负责编写第一篇、第三篇和第四篇；张凤林负责编写第二篇；全书由关叶青拟定编写大纲，

并对全部书稿进行修改和定稿.

在本书的编写过程中,参阅了大量国内外公开发表的文献资料,并得到南京航空航天大学经管学院很多老师和同学的帮助,特别是党耀国教授对本书的编排提出了很多宝贵的意见,在此一并表示衷心的感谢.由于作者水平有限和时间仓促,教材中一定还存在缺点和问题,敬请读者不吝指正,我们将万分感谢.

编 者

2006 年 3 月

# 目　　录

## 第一篇　线 性 代 数



## 第二篇　线 性 规 划

## 第三篇 概率论与数理统计初步

## 第四篇　计算机在经济数学中的应用

# 第一篇

# 线性代数

线性代数是高等院校数学教育中的一门重要的公共基础课，其不仅向学生传授了为学习大多数后续专业课程所必要的数学基础，提高学生的计算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力，而且在大学生素质教育中的重要性也日益显著. 我们知道一次方程叫做线性方程，讨论线性方程及线性运算的代数就叫做线性代数. 本篇主要讨论矩阵及其运算、$n$ 阶行列式、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵和二次型等内容. 由于计算机的飞速发展和广泛应用，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学管理、研究和工程设计的科技管理人员必备的数学基础.

# 第一章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要概念，英文为 matrix，来源于拉丁语，代表一排数. 在生产实践和科学研究中，有许多问题可归结为线性方程组，矩阵是线性方程组线性运算的一种很好的表达方式，并成为处理许多实际问题的有力工具. 本章将介绍矩阵的概念、矩阵的运算、逆矩阵、矩阵的初等变换等基础理论.

## §1.1　矩阵的概念

**例 1.1**　某运输公司的货物要从甲、乙、丙三个产地运往五个销地，其调运计划见表 1-1.

表 1-1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　单位：吨

| 运量　销地<br>产地 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 36 | 30 | 25 | 15 | 40 |
| 乙 | 32 | 42 | 12 | 8 | 7 |
| 丙 | 18 | 10 | 5 | 0 | 29 |

这个货物调运计划描述了这家企业货物从产地到销地的数量，揭示了运量随产地、销地变化的规律，我们可以将这些数据排成如下一个数表，记为

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{array} & \begin{pmatrix} 36 & 30 & 25 & 15 & 40 \\ 32 & 42 & 12 & 8 & 7 \\ 18 & 10 & 5 & 0 & 29 \end{pmatrix} \end{array}.$$

**例 1.2**　某大型超市有 36 家连锁店，每个连锁店有 4 个销售部，列出它们一周的销售额，如表 1-2 所示.

表 1-2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　单位：百元

| 销售额　销售部<br>连锁店 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 567 | 697 | 2 674 | 1 847 |
| 2 | 2 498 | 1 145 | 3 317 | 1 997 |
| 3 | 3 351 | 989 | 4 406 | 2 145 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 36 | 2 243 | 967 | 2 965 | 2 033 |

我们用带有下标的字母 $s_{ij}$ 表示第 $i$ 连锁店第 $j$ 销售部的销售额，于是

$$s_{11}=3\ 567, s_{12}=697, s_{13}=2\ 674, \cdots$$

简洁表示了该超市各连锁店的销售情况.

**例 1.3** 观察下面的线性方程组(linear equations)

$$\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_2-x_3=2 \\ x_3-x_4=3 \\ x_4-x_5=4 \end{cases}.$$

该线性方程组的未知数用 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ 表示，我们知道未知数用何种符号表示是无关紧要的，对于线性方程组的解起决定作用的是未知数的系数和等式右端的常数项，如果把这些系数和常数合列出来，并保持它们在线性方程组中相互的位置不变，则此线性方程组可表示为如下数表，即

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

它是由 $4\times 6=24$ 个数据排成的一个四行六列的矩形表，这张表描述了线性方程组中未知数之间的数量依存关系.

一般的，把上述例中如矩形形状的数表称为矩阵，我们给出矩阵的定义如下.

**定义 1.1** 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

称为一个 $m\times n$ 阶矩阵($m\times n$ matrix).

对每个 $m\times n$ 阶矩阵，横排为行(row)，自上而下依次为第 1 行，第 2 行，…，第 $m$ 行；纵排为列(column)，自左往右依次为第 1 列，第 2 列，…，第 $n$ 列. 数 $a_{ij}$ 称为矩阵第 $i$ 行、第 $j$ 列上的元素(element)，$m\times n$ 称为矩阵的阶(order).

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示矩阵. 为了标明矩阵的行数 $m$ 和列数 $n$，可以用 $A_{m\times n}$ 表示，或记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

注意，一个 $m\times n$ 阶矩阵不仅由组成这个矩阵的 $m\times n$ 个元素决定，而且与元素之间的相互位置有关. 我们说两个矩阵相等(equality of matrices)，是指两矩阵的行数相同、列数相同，而且对应位置上的元素都一一相等，用 $A=B$ 表示.

当 $m=1$ 时，矩阵(1-1)式为只有一行的矩阵

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$

通常把它称为行向量(a row matrix)，$n$ 为该向量的维数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 $n$ 维向量的第 1 个，第 2 个，……，第 $n$ 个分量.

当 $n=1$ 时，矩阵(1-1)式为只有一列的矩阵，即

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列向量(a column matrix)，$m$ 为该列向量的维数(dimension).

**定义 1.2**　如果矩阵 $A$ 的行数和列数都等于 $n$，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

称为 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵(square matrix)，记作 $A_n$.

$n$ 阶方阵 $A$ 中从左上角到右下角的对角线称为矩阵 $A$ 的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为矩阵 $A$ 的副对角线.

规定一阶矩阵 $A=(a)_{1\times 1}=a$ 由一个元素构成. 所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵，记为 $O$(零矩阵)或 $\theta$(零向量)，显然零矩阵的阶数是任意的.

在 $n$ 阶方阵 $A_n$ 中，有一些特殊的方阵在实际中经常用到.

1. 对角矩阵

如果 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的元素满足条件

$$a_{ij}=0,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称方阵 $A_n$ 为 $n$ 阶对角阵(diagonal matrix)，即

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}. \tag{1-3}$$

2. 数量矩阵

如果 $n$ 阶对角阵 $A$ 中的元素满足条件

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a,$$

则称方阵 $A_n$ 为 $n$ 阶数量矩阵(quantity matrix)，即

$$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}. \tag{1-4}$$

3. 单位矩阵

如果 $n$ 阶数量矩阵 $A$ 中的元素满足 $a=1$，则称方阵 $A_n$ 为 $n$ 阶单位矩阵(identity matrix)，记作 $I_n$，即

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1-5}$$

**4. 三角形矩阵**

如果 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的元素满足条件

$$a_{ij}=0,(i>j,i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称方阵 $A_n$ 为 $n$ 阶上三角形矩阵(upper triangular matrix),即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1-6}$$

如果 $n$ 阶方阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足条件

$$b_{ij}=0,(i<j,i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称方阵 $B_n$ 为 $n$ 阶下三角形矩阵(lower triangular matrix),即

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1-7}$$

## §1.2　矩阵的运算

矩阵概念的意义不仅在于将一些数据按一定顺序排成一个矩形表,而且在于对它定义了一些有理论意义和实际意义的运算,从而使矩阵成为进行理论研究和解决实际问题的有力工具.

**1. 矩阵的加法(matrix addition)和减法(matrix subtraction)**

**例 1.4**　设某单位有两种货物 $A$、$B$(单位:吨)要从三个产地运往五个销地,其调运方案分别用矩阵 $A$ 和矩阵 $B$ 表示,即

$$A=\begin{pmatrix} 36 & 30 & 25 & 15 & 40 \\ 32 & 42 & 12 & 8 & 7 \\ 18 & 10 & 5 & 0 & 29 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 18 & 10 & 0 & 5 & 15 \\ 10 & 12 & 7 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

那么从各个产地运往各个销地两种货物的总运量为矩阵 $C$,即

$$C=\begin{pmatrix} 36+18 & 30+10 & 25+0 & 15+5 & 40+15 \\ 32+10 & 42+12 & 12+7 & 8+4 & 7+12 \\ 18+9 & 10+5 & 5+2 & 0+0 & 29+8 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 54 & 40 & 25 & 20 & 55 \\ 42 & 54 & 19 & 12 & 19 \\ 27 & 15 & 7 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

我们规定矩阵 $C$ 是矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 的和矩阵.

**例 1.5**　如果某厂生产甲、乙、丙三种产品,上月的销售收入及生产成本(单位:万元)分别为矩阵 $E$ 和矩阵 $F$,即

$$E=(42\quad 25\quad 40),F=(25\quad 18\quad 22).$$

那么该厂上月生产这三种产品的利润(单位:万元)应为矩阵 $E$ 与矩阵 $F$ 的差,即

$$500\times5+650\times7=7\,050,$$

用矩阵表示这两年的成本总额和销售总额应是

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{成本总额} & \text{销售总额}\end{array} \\ C= & \begin{pmatrix}3\,650 & 4\,800\\ 5\,250 & 7\,050\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{前年}\\ \text{去年}\end{array}.\end{array}$$

显然，矩阵 $C$ 的第 $i$ 行、第 $j$ 列元素 $c_{ij}$ 是矩阵 $A$ 的第 $i$ 行与矩阵 $B$ 的第 $j$ 列对应元素的乘积之和，$i=1,2,j=1,2$，我们把矩阵 $C$ 称为矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 的乘积. 一般情况有

**定义 1.5**　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$，则称他们的乘积为矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{is}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & c_{ij} & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$
$$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n. \tag{1-12}$$

这个定义规定了只有当左边矩阵 $A$ 的列数与右边矩阵 $B$ 的行数相等时，两个矩阵的乘法运算 $AB$ 才有意义. 因此在进行矩阵乘法运算时，先要确定乘积矩阵是否存在，然后逐一计算每一位置上的元素，乘积矩阵 $C=AB$ 的行数为左边矩阵 $A$ 的行数，列数为右边矩阵 $B$ 的列数.

**例 1.9**　设矩阵

$$A=(1\quad 2\quad 3),B=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},$$

计算 $AB$、$BA$.

**解**　$AB=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=32,$

$$BA=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\5 & 10 & 15\\6 & 12 & 18\end{pmatrix}.$$

**例 1.10**　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-2 & 6\\4 & 3\end{pmatrix},$$

求 $AB$、$BA$ 和 $AC$.

**解**　$AB=\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -8\\2 & 4\end{pmatrix},$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-12\\-2&6\end{pmatrix}.$$

**综合起来，我们不难发现：**

(1) **矩阵的乘法一般不满足交换律. 即 $AB$ 有意义，$BA$ 不一定有意义；即使 $AB$ 与 $BA$ 都有意义，$AB$ 与 $BA$ 也不一定相等；**

(2) **矩阵的乘法不满足消去律. 两个非零矩阵之乘积矩阵可能是零矩阵.**

**利用矩阵乘法和矩阵相等概念，可以将一般的线性方程组**

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1-13}$$

**写成矩阵形式**

$$AX=B\ ,\tag{1-14}$$

**其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性方程组的系数矩阵(matrix of coefficients)，$X$ 是 $n$ 维列向量，称为未知数矩阵(unknown matrix)；$B$ 是 $m$ 维列向量，称为线性方程组的常数项矩阵(constant matrix)，即**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

**容易看出，线性方程组可由下列矩阵**

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}\tag{1-14$'$}$$

**完全确定，称此矩阵为线性方程组的增广矩阵(augmented matrix).**

**矩阵的乘法满足以下运算规律.**

**定理 1.3　设矩阵 $A$、$B$、$C$ 及单位矩阵 $I$ 之间加法和乘法均有定义，$k$ 为实数，则**

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$；

(4) $AI=IA=A$.

**证**　(1) **设** $A=(a_{ij})_{r\times m}$，$B=(b_{jk})_{m\times n}$，$C=(k_{kl})_{n\times p}$，**则可以设** $AB=S=(s_{ik})_{r\times n}$，$BC=T=(t_{jl})_{m\times p}$，**且**

$$s_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{im}b_{mk}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}\ ,$$
$$i=1,2,\cdots,r;k=1,2,\cdots,n.$$

$$t_{jl}=b_{j1}c_{1l}+b_{j2}c_{2l}+\cdots+b_{jn}c_{nl}=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}c_{kl}\ ,$$
$$j=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,p.$$

现将 $S$ 与 $C$ 相乘,即$(AB)$与 $C$ 相乘,矩阵$(AB)C$ 的第 $i$ 行的、第 $j$ 列的元素为

$$s_{i1}c_{1l}+s_{i2}c_{2l}+\cdots+s_{in}c_{nl}=\sum_{k=1}^{n}s_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{jk})c_{kl},$$

其中 $i=1,2,\cdots,r,l=1,2,\cdots,p$. 再将 $A$ 与 $T$ 相乘,即 $A$ 与$(BC)$相乘,矩阵 $A(BC)$的第 $i$ 行的、第 $j$ 列的元素为

$$a_{i1}t_{1l}+a_{i2}t_{2l}+\cdots+a_{in}t_{nl}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_{jl}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}(b_{jk}c_{kl}),$$

其中 $i=1,2,\cdots,r,l=1,2,\cdots,p$. 上述两个和式相等. 定理得证.

**例 1.11**　若三阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

求所有与 $A$ 可交换的矩阵(commute matrix).

**解**　设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$与 $A$ 可交换,即满足 $AB=BA$,即

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

等式两边的乘积矩阵为

$$\begin{pmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{11}&b_{12}\\0&b_{21}&b_{22}\\0&b_{31}&b_{32}\end{pmatrix},$$

有

$$\begin{aligned}&b_{21}=b_{31}=b_{32}=0\\&b_{11}=b_{22}=b_{33}=x\\&b_{12}=b_{23}=y\\&b_{13}=z\end{aligned},$$

所求的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{pmatrix},$$

其中 $x,y,z$ 为任意实数.

由于任意阶方阵的列数等于行数,故方阵可以自乘. 为此,我们引入下面方阵的幂运算.

**定理 1.4**　任意阶方阵 **A** 的 $k$ 次幂($k$ copies of **A**)为

$$A^1=A,A^2=AA,\cdots,A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{ 个 }A},\tag{1-15}$$

即 $A^k$ 是 $k$ 个方阵 $A$ 的连乘积,且有如下的指数律成立:对任意正整数 $k,l$,有

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl}.$$

需要注意：由于矩阵乘法不满足交换律，所以$(AB)^k$一般情况下不等于$A^kB^k$. 此外，如果$A^k=O$，也不一定有$A=O$. 如

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\neq O,$$

但是

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

**4. 矩阵的转置**

我们把具有下面特征的矩阵，即

**定义 1.6** 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行与列对应元素互换后所得的矩阵称为 $A$ 的转置矩阵(transpose of matrix)，记作 $A^T$. 即

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}. \tag{1-16}$$

**例 1.12** 设

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&7&9\\5&0&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}11\\21\\31\end{pmatrix}.$$

求：(1) $A^TB$；

(2) $B^TA$.

**解** 首先

$$A^T=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&7&0\\1&9&4\end{pmatrix},B^T=(11\quad 21\quad 31).$$

然后

(1) $A^TB=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&7&0\\1&9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\21\\31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}240\\158\\324\end{pmatrix}$；

(2) $B^TA=(11\quad 21\quad 31)\begin{pmatrix}2&1&1\\3&7&9\\5&0&4\end{pmatrix}=(240\quad 158\quad 324).$