经济类考研数学总复习

高等数学（一）

张玉灿 主编

目录

第一章函数、极限与连续 1
第二章导数、微分及其计算 43
第三章微分中值定理与导数应用 69
第四章不定积分 100
第五章定积分及其应用 130

第一章函数、极限与连续

§1.1 函数

一、熟知考纲考点

1 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

2 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5 会建立简单应用问题中的函数关系式.

二、本节知识串讲

1.函数

函数定义：设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围内任取一值时，变量 y 按一定的法则总有确定的数值和它对应，就称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

复合函数：设函数 $y=f(u)$，而 $u=\phi(x)$，且 $\phi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 成为 x 的函数：$y=f[\phi(x)]$.

这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\phi(x)$ 复合而成的复合函数.

初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的并可用一个式子表示的函数.

分段函数：如果一个函数在其定义域内对应于不同的区间段有不同的表达形式，则该函数称为分段函数.

注：①一般来讲，分段函数不是初等函数.

②读者今后还将遇到隐函数及由参数方程所确定的函数.

③读者在学习“复合函数”时，不但要掌握初等函数的复合及构成复合函数的条件，更应掌握复合函数分解为基本初等函数的方法.此外，还应掌握反函数等概念.

2.函数的二要素

①定义域：使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

②对应法则：给定自变量的值，求函数对应值的方法.

注：当两个函数的二要素相同时，这两个函数相等.

3.求函数的定义域的要点

①分式的分母不等于零；

②偶次根式内的根底式为非负实数；

③对数的真数表示式必须为正数；

④arcsinx 或 arccosx 中，其表达式 x 应满足 $|x|\leq 1$；

⑤tanx 中，其表达式 x 应满足 $x\neq k\pi+\pi 2$，cotx 中，其表达式 x 应满足 $x\neq k\pi$.

4.函数的基本性质

(1)奇偶性：若对于任给的 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是 X 上的偶函数；

若对于任给的 $x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是 X 上的奇函数.

注 X 是关于坐标原点对称的区间，否则在 X 上讨论函数的奇偶性无意义.偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

(2)周期性：若对于任给的 $x\in X$，存在常数 T，使 $f(x+T)=f(x)$，则称 f(x)是以 T 为周期的周期函数，把满足上式的最小正数 T 称为函数 f(x)的周期.

(3)有界性：若 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，且存在常数 $M>0$,使$|f(x)|\leq M$成立,则称 f(x)在 X 上有界；否则，若不存在这样的常数 M，则称 f(x)在 X 上无界.

(4)单调性：若 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，对于任给的 $x1,x2\in X$,当 $x1>x2$ 时,恒有 $f(x1)(<)>f(x2)$,则称 $y=f(x)$在区间 X 上是单调增加(减少)的.

三、典型例题与解题方法和技巧

例 1 设 $f(x)=110-x+\ln(x-1)+\arccos2x-15$.求 f(x)的定义域.

分析先按求函数定义域的要点，建立不等式组，然后解此不等式组，求出 f(x)的定义域.

解因为 $10-x>0$，

$x-1>0$，

$2x-15\leq1$，即 $x<10$，

$x>1$，

$-5\leq2x-1\leq5$，得 $1<x\leq3$.

所以 f(x)的定义域为 $1<x\leq3$.

［解法总结］求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 2 设 $f(x)=x-1$，$0\leq x<2$，

2，$2\leq x\leq4$.求 $f(2x+4)$的定义域.

分析应先求出 $f(2x+4)$的表达式.

解 f(2x+4)=2x+4-1，0≤2x+4＜2，

2，2≤2x+4≤4.

即 f(2x+4)=2x+3，-2≤x＜-1，

2，-1≤x≤0.

所以 f(2x+4)的定义域是［-2，0］.

［应试陷阱］在求 f(2x+4)的过程中，应将 f(x)中的 x 全部换成 2x+4.如果只换等号后的 x,而不换定义域表示中的 x，即犯如下错误：

f(2x+4)=2x+4-1，0≤x＜2，

2，2≤x≤4.

例 3 设 f(x)的定义域为［1，3］，则 f(x2)+f(x)的定义域为()

(A)［1，3］(B)［1，3］

(C)［-3，3］(D)［-3，-1］∪［1，3］

分析函数和的定义域等于各函数定义域之交.

解∵f(x)的定义域为［1，3］，

∴f(x2)+f(x)的定义域为

1≤x2≤3

1≤x≤3，即 1≤x≤3 或-3≤x≤-1，

1≤x≤3.

故为 1≤x≤3，所以正确答案为(B).

例 4 下列各组中 f(x)与 g(x)是相同函数的组是().

(A)f(x)=ln2x，g(x)=ddx∫x0｜lnt｜dt

(B)f(x)=lnx2，g(x)=2lnx

(C)f(x)=｜x｜x，g(x)=1(x≠0)

(D)f(x)=sinarcsinx，g(x)=(x)2

分析由函数的二要素判断两个函数是否相同.

解(A)中 f(x)=ln2x=｜lnx｜，g(x)=ddx∫x0｜

lnt｜dt=｜lnx｜，且定义域都是 x＞0，所以(A)符合题意；

(B)中 f(x)，g(x)的定义域分别为(-∞，0)∪(0，+∞)和(0，+∞)，定义域不同，不符合题意；

(C)中 f(x)=1，x＞0，-1，x＜0.故与 g(x)=1 的对应关系不同，不符合题意；

(D)中 f(x)，g(x)的定义域分别为［-1，1］和［0，+∞]，定义域不同，不符合题意.

例 5 判断 f(x)=(2+1)x+(2-1)x 的奇偶性.

分析为了讨论 f(x)的奇偶性，应先求 f(-x)，再比较 f(-x)与 f(x)的关系.

解因为 f(-x)=(2+1)-x+(2-1)-x=1(2+1)x+1(2-1)x

=(2-1)x［(2+1)(2-1)］x+(2+1)x［(2-1)(2+1)］x

=(2-1)x+(2+1)x=f(x)

所以 f(x)=(2+1)x+(2-1)x 是偶函数.

［解法总结］判定一个函数 f(x)是偶函数，可以用 f(-x)=f(x)，也可以用 f(-x)-f(x)=0；同样，判定一个函数是奇函数，可以用 f(-x)=-f(x)，也可以用 f(-x)+f(x)=0，有时，后者更为简捷.

例 6 证明 f(x)=ln(x+1+x2)是奇函数.

证∵f(-x)=ln(-x+1+x2)，

∴f(x)+f(-x)=ln(x+1+x2)+ln(-x+1+x2)

=ln(x+1+x2)(-x+1+x2)=ln1=0，

从而 f(x)=ln(x+1+x2)是奇函数.

例 7f(x)=sinx，0≤x≤π；是周期函数吗?是奇函数吗?

解 f(x)=sinx，0≤x≤π；不是周期函数.因为判断一个函数是否是周期函数，必须考察这个函数的定义域

是什么；并且在这个定义域上是否存在常数 T，使 f(x+T)=f(x)成立.

又由于 f(x)=sinx，0≤x≤π；的定义域不关于 x=0 对称，所以该函数不是奇函数.

［激活思维］

例 8 证明 f(x)=x1+x 在[0，+∞)上有界，并且在[0，+∞)上单调增加，并由此证明：

｜a+b｜1+｜a+b｜≤｜a｜1+｜a｜+｜b｜1+｜b｜.

分析讨论单调性，应考察 f(x2)-f(x1)的符号，其中 x2＞x1≥0.

证∵x∈［0，+∞)，∴0≤x1+x=(1+x)-11+x=1-11+x＜1.

故 f(x)=x1+x 在［0，+∞)上有界.

任给 x1，x2 满足 0≤x1＜x2＜+∞，

因为

f(x2)-f(x1)=x21+x2-x11+x1=x2-x1(1+x2)(1+x1)＞0，

所以 f(x)=x1+x 在［0，+∞)上单调增加.

取 x1=｜a+b｜，x2=｜a｜+｜b｜，由于 0≤x1≤x2，

所以 f(x1)≤f(x2).即

｜a+b｜1+｜a+b｜≤｜a｜+｜b｜1+｜a｜+｜b｜=｜a｜1+｜a｜+｜b｜+｜b｜1+｜a｜+｜b｜

≤｜a｜1+｜a｜+｜b｜1+｜b｜.

［解法总结］在证明函数的有界性与单调性时，往往需要利用不等式的放大缩小法.

例 9 求 y=1+x-11+x+1 的反函数.

分析求反函数的步骤：

(1)将方程 y=f(x)改写为以 y 表示 x 的形式，即把 x

从方程 y=f(x)中解出来.

(2)在所得到的以 y 表示 x 的表达式中,对换 x 与 y，所得的表达式就是所要求的反函数 f-1(x).

解 由 y=1+x-11+x+1 ，得 (y-1)1+x=-(y+1) ，即 1+x=1+y1-y，

∴x=1+y1-y2-1，得 x=4y(1-y)2，

所以所求的反函数为 y=4x(1-x)2.

例 10 设 y=f(x)=1+x，x＜2，x2-1，x≥2，则其反函数 y=f-1(x)为().

(A)1-x，x＜3，(x+1)2，x≥3；(B)x-1，x＜3，

x+1，x≥3；(C)1-x，x＜2，

(x+1)2，x≥2；(D)x-1，x＜2，x+1，x≥2.

分析求分段函数的反函数，必须分别求出各区间段的反函数及定义域.

解由 y=1+x，x＜2，得 x=y-1，y＜3；

由 y=x2-1，x≥2，得 x=y+1(∵x≥2)，y≥3.

所以 y=f-1(x)=x-1，x＜3，

x+1，x≥3.

故答案应选(B).

例 11 设 f(x)=11-x，求 f(f(x))，f(f(f(x))).

分析初等函数的复合，往往直接代入，并注意化简及定义域.

解 f(f(x))=11-f(x)=11-11-x=x-1x=1-1x(x≠0，x≠1).

f(f(f(x)))=11-f(f(x))=11-(1-1x)=x(x≠0，x≠1).

例 12 设 f(x)=1，｜x｜＜1，0，｜x｜=1，-1，｜x｜＞1，g(x)=ex，求 f［g(x)]，g［f(x)］.

分析在讨论初等函数与分段函数的复合，或分段函数与分段函数的复合时，应注意内层函数的函数值应使外层函数有意义.

解当 x＜0 时，｜g(x)｜=ex＜1，故 f［g(x)］=1；

当 x=0 时，g(0)=e0=1，故 f［g(0)］=0；

当 x＞0 时，｜g(x)｜=ex＞1，故 f［g(x)］=-1.

综上可得：f［g(x)］=-1，x＞0，

0，x=0，

1，x＜0.

又因为 g［f(x)］=ef(x)，

所以 g［f(x)］=e，｜x｜＜1，

1，｜x｜=1，

e-1，｜x｜＞1.

例 13 设 f(x)=ex，x＜1，

x，x≥1，g(x)=x+1，x＜0，

x2-1，x≥0.，求 f［g(x)］.

解因为 f［g(x)］=eg(x)，g(x)＜1

g(x)，g(x)≥1.

当 g(x)＜1 时：

或 x＜0，g(x)=x+1＜1，即 x＜0，

或 x≥0，g(x)=x2-1＜1，即 x≥0，

x2＜2，有 0≤x＜2；

当 g(x)≥1 时：

或 x＜0，g(x)=x+1≥1，即 x＜0，

x≥0.矛盾.

或 x≥0，g(x)=x2-1≥1.即 x≥0

x2≥2，即 x≥2.

综上所述：

f(g(x))=ex+1，x＜0，

ex2-1，0≤x＜2，

x2-1，x≥2.

初等函数是微积分研究的主要对象，读者必须熟练掌握将初等函数分解成由基本初等函数和四则运算而成的形式.

例 14 将下列函数分解成基本初等函数的复合及四则运算的形式.

(1)y=arctan32x1-x2；(2)y=(x3+ex)cos1x-1.

分析将初等函数分解为基本初等函数的复合函数时，应牢固掌握基本初等函数的类型，采取由外层函数向内层函数进行分解的顺序，将函数分解.

解(1)注意到幂函数是基本初等函数，

令 u=arctanv，v=2x1-x2，

所以 y=arctan32x1-x2 由下列各函数复合而成：

y=u3，u=arctanv，v=2x1-x2.

(2)令 u=(x3+ex)cos1x，则 y=u-1，

又令 v=x3+ex，w=cost，t=1x，

则有 y=u-1，u=vw，v=x3+ex，

w=cost，t=1x.

下面我们讨论用初等方法求解函数方程.

例 15 设 f(0)=0，且 x≠0 时，f(x)满足：af(x)+bf(1x)=cx(a，b，c 为常数，｜a｜≠｜b｜)证明：f(x)为奇函数.

分析要证明 f(x)是奇函数，最直接的方法是求出 f(x)的解析表达式.

证当 x≠0 时，令 x=1t，有 af(1t)+bf(t)=ct，

即 af(1x)+bf(x)=cx.将其与 af(x)+bf(1x)=cx 联

立，消去 f(1x)，有：f(x)=1a2-b2(acx-bcx)

显然 x≠0 时，f(-x)=-f(x)，又 f(0)=0，

所以 f(x)是奇函数.

例 16 若 f(x)满足 f(x+T)=kf(x)，x∈(-∞，+∞)，(k，T 为正常数)，证明：f(x)=axφ(x)，其中 a 为常数，φ(x)以 T 为周期.

分析欲证 f(x)=axφ(x)，只需证明存在常数 a，使 f(x)ax(=φ(x))是周期函数.由条件 f(x+T)=kf(x)可以看出 a 应取：k=aT.

证取 k=aT，即 a=k1T.

由 f(x+T)=kf(x)，有 f(x+T)=aTf(x).

即 f(x+T)ax+T=f(x)ax.

所以φ(x)=f(x)ax 是以 T 为周期的周期函数.

［真题在线］

例 17(99 年，数学一，数学二，数学三，数学四)设 f(x)是连续函数，F(x)是 f(x)的原函数，则

(A)当 f(x)是奇函数时，F(x)必是偶函数

(B)当 f(x)是偶函数时，F(x)必是奇函数

(C)当 f(x)周期函数时，F(x)必是周期函数

(D)当 f(x)是单调增函数时，F(x)必是单调增函数

证令 f(x)＝csox+1,F(x)＝sinx+x+1,

显然，f(x)是偶函数和周期函数，但 F(x)不是奇函数，也不是周期函数，则(B)、(C)均不正确。

若令 f(x)＝x,F(x)＝12x2，则 f(x)单调增加，但 F(x)不是单调增加，因此，(D)也不正确，所以选(A)。

例 18(92 年)已知 f(x)＝sin,f［Φ(x)］＝1－x2，则Φ(x)＝的定义域为。

应填 arcsin(1-x2)，－2≤x≤2

解由 f(x)＝sinx 知，f［Φ(x)］＝sinΦ(x)＝1-x2，则Φ＝rcsin(1-x2)，而-1≤1-x2≤1，所以-2≤x2

［知识掌握］

四、预测试题测试

掌握函数概念及函数的几种基本特性；熟练掌握复合函数及其复合过程；掌握分段函数及分段函数的变形或复合.

习题 11

一、单项选择题

1 下列各组中 f(x)与 g(x)是相同函数的组是().

(A)f(x)=x2，g(x)=x(B)f(x)=x+1，g(x)=x2-1x-1

(C)f(x)=lnx2，g(x)=2ln｜x｜(D)f(x)=1，x≥0

-1，x＜0g(x)=｜x｜x

2 设 f(x)=1，1e＜x＜1；

x，1≤x＜e；g(x)=ex，则 f［g(x)］=().

(A)1，1e＜x＜1

ex，1≤x＜e(B)1，-1＜x＜0

ex，0≤x＜1

(C)ex，-1＜x＜0

x，0≤x＜1(D)x，-1≤x＜0

ex，0≤x＜1

3 若 f(1x)=x+1x2，则 f(x)=().

(A)xx+12(B)x+1x2

(C)(1+x)2(D)(1-x)2

4 若 f(x)的定义域为［1，2]，则 f(1-lnx)的定义域为().

(A)［1，1-ln2］(B)(0，1]

(C)［1，e］(D)［1e，1]

5 下列函数中，是奇函数的为().

(A)y=x4-x2(B)y=x+x2

(C)y=ex+e-x2(D)y=ex-e-x2

6 函数 y=sinx1+x2 是().

(A)奇函数(B)单调函数

(C)无界函数(D)周期函数

二、填空题

1 若 f(x)的定义域为(1，2)，则 f(x2+1)的定义域为.

2 设 f(x2+1)=x4+5x2+3，则 f(x2-1)=.

3 设 f(x)与 f-1(x)互为反函数，则 f［f-1(x)］=.

4y=ln(1+x2)的单调递减区间是.

5 函数 y=cos22x 的周期为.

［能力提高］

三、计算题

1 求 y=arccos2x-17x2-x-6 的定义域.

2 求 y=x-1，-∞＜x＜0，

x3，0≤x＜1，

1，1≤x＜+∞的反函数.

3 设 f(x)+f(x-1x)=2x，且 x≠0，x≠1，求 f(x).

［延伸拓展］

四、(90 年)设函数 f(x)＝xtanxesinx，则 f(x)是

(A)偶函数(B)无界函数

(C)周期函数(D)单调函数

答案与提示

一、单项选择题

1(C)2(B)3(C)4(D)5(D)6(A)二、填空题

1(-1，0)∪(0，1)

2x4+x2-3 提示：x4+5x2+3=(x2+1)2+3(x2+1)-1.

3x4.(-∞，0)5π2

三、计算题

1 [-3，-2)∪(3，4]

2f-1(x)=x+1，-∞<x<-1；

3x，0≤x<1；

1，1≤x<+∞.

3 提示：令 t=x-1x，原方程为 f(x)+f(11-x)=21-x，再令 11-x=u-1u，上述方程变为 f(11-x)+f(x-1x)=2(x-1)x，将这三个方程联立，求得 f(x)=x+1x+11-x-1.

四、应选(B)

§1.2 极限与连续

一、熟知考纲考点

1 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

2 了解无穷小的概念和基本性质.掌握无穷小的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

3 了解极限的性质与极限存在的两个准则.掌握极限的性质及四则运算法则，会应两个重要极限.

4 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续).

5 了解连续函数的性质和初等函述的连续性.了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用

二、本节知识串讲

(一)基本概念

1.数列极限

limn→∞xn=A：ε>0，□正整数 N，当 n>N 时，

恒有｜x_n-A｜＜ε.

2.函数极限

$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$：ε＞0，□正数 X，当｜x｜＞X 时，恒有｜$f(x)-A$｜＜ε.

类似可定义 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$.

$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$：□ε＞0，□正数δ，当 0＜｜$x-x_0$｜＜δ时，恒有｜$f(x)-A$｜＜ε.

并且，$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$□ $\lim_{x\to+\infty}f(x)$与 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$存在且相等(等于 A).

类似可定义左、右极限：$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$，$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A$.

3.无穷小

在某一极限过程中，以 0 为极限的变量称为无穷小量.即若 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)=0$,则称当 $x\to x_0(x\to\infty)$时，f(x)是无穷小量.

4.无穷大

若在自变量的某一变化过程中，｜f(x)｜无限增大，则称函数 f(x)为无穷大量.记为 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}f(x)=\infty$.

类似可定义正(负)无穷大.

注意(1)无穷大实际上是极限不存在的一种情况.

(2)无穷大与无界变量的区别:无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.例如：$y=x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量.

5.无穷大与无穷小的关系

在同一极限过程中，若 f(x)为无穷小，且 f(x)≠0，则 1f(x)为无穷大；若 f(x)为无穷大，则 1f(x)为无穷小.

6.无穷小的阶(无穷小的比较)

设在同一极限过程中，α(x)，β(x)为无穷小，且limα(x)β(x)=l 存在.

(1)若 l≠0，则称α(x)与β(x)在该极限过程中为同阶无穷小；

(2)若 l=1，则称α(x)与β(x)在该极限过程中为等价无穷小，记为α(x)～β(x)；

(3)若 l=0，则称在此极限过程中α(x)是β(x)高阶的无穷小，记为α(x)=o(β(x)).

注意常用的等价无穷小，当 x→0 时，

sinx～□x，arcsinx□x，tanx□x，

arctanx□x，ln(1+x)□x，ex-1□x，

ax-1□xlna，1-cosx□12x2，(1+x)α-1□αx.

7.函数的连续性

定义 1 设 f(x)在 x0 及其邻域内有定义，记Δy=f(x0+Δx)-f(x0)，若 limΔx→0Δy=0，则称 f(x)在 x=x0 处连续.

定义 2 若 f(x)满足：

(1)f(x)在 x0 及其邻域内有定义；

(2)limx→x0f(x)存在；

(3)limx→x0f(x)=f(x0)，

则称 f(x)在 x=x0 处连续.

定义 3 设 f(x)在 x0 及其右(左)邻域内有定义，且limx→x0+0(x→x0-0)f(x)=f(x0)，则称 f(x)在 x=x0 处右(左)连续.

定义 4 若 f(x)在开区间(a,b)内处处连续，则称 f(x)在(a，b)内连续.

定义 5 若 f(x)在 x=a 处右连续，在 x=b 处左连续，