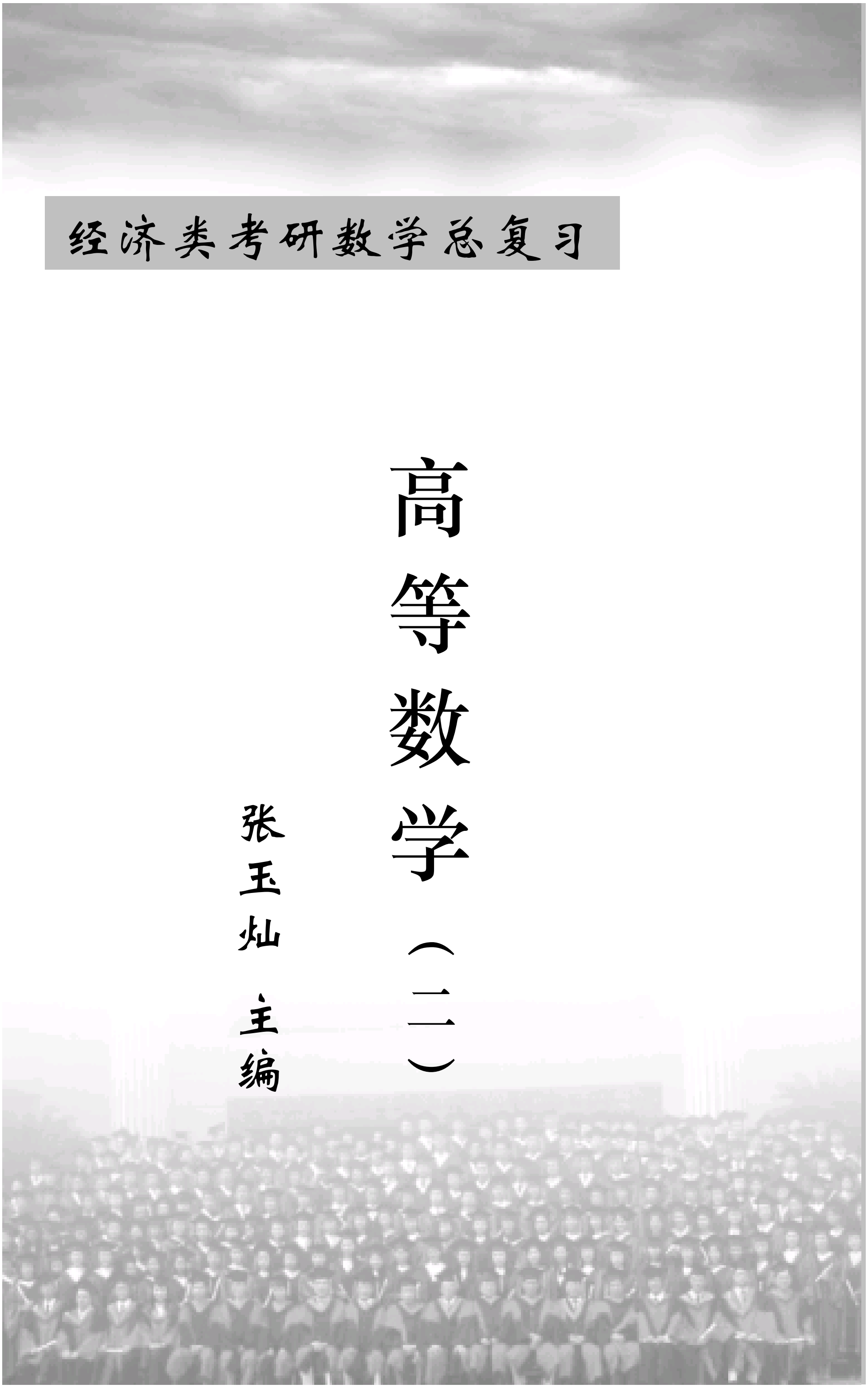

经济类考研数学总复习

高等数学（二）

张玉灿 主编

目录

第六章常微分方程

§61 常微分方程的概念及一阶微分方程

一、熟知考纲考点

1 了解微分方程的阶及其解、通解、初始条件和特解等概念.

2 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.

二、本节知识串讲

1 微分方程

含有自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的关系式，其中未知函数的导数或微分不可或缺，称为微分方程.如果微分方程中的未知函数是一元函数,则称为常微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶.

微分方程的一般形式为

$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$(6-1)

或 $y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$.(6-2)

2 微分方程的解与通解

若将函数 $y=\varphi(x)$代入方程(6-1)或方程(6-2)，使方程(6-1)或(6-2)成为恒等式，则 $y=\varphi(x)$称为该微分方程(6-1)或(6-2)的显式解.

若由关系式$\Phi(x, y)=0$所确定的隐函数$y=\varphi(x)$是微分方程(6-1)或(6-2)的解，则称$\Phi(x, y)=0$是该微分方程的隐式解.

如果 n 阶微分方程的解中含有 n 个相互独立的任意常数，则称此解为该微分方程的通解.

3 初始条件与微分方程的特解

n 阶微分方程 y(n)=f(x，y，y′，…，y(n-1))的初始条件是指下述 n 个条件：

y(x0)=y0,y′(x0)=y′0,…,y(n-1)(x0)=y(n-1)0，其中 x0，y0，y′0，…，y(n-1)0 是给定的 n+1 个实常数.

由所给的初始条件(或其他定解条件)从通解中定出所有任意常数而得到的解，称为微分方程的特解.

4 一阶常微分方程的基本类型与通解形式

(1)可分离变量方程：

f(x)dx=g(y)dy，两边积分求出通解为

∫f(x)dx=∫g(x)dy+C.

(2)齐次方程：

dydx=f′yx，令 u=yx，可将原方程化为

duf(u)-u=dxx，积分得通解∫1f(u)-udu=lnx+C，

其中 u=yx 要回代.

(3)可化为齐次型的微分方程：

dydx=fax+by+ca1x+b1y+c1.

当 a1a=b1b=λ时，令 v=ax+by，可将方程化为 1bdvdx-a=fv+cλv+c1，即化为可分离变量的微分方程，由形式(1)之解法可以求出其通解；

当 a1a≠b1b 时，令 x=X+h，y=Y+k，其中 h，k 满足 ah+bk+c=0，

a1h+b1k+c1=0，可将方程化为 dYdX=faX+bYa1X+b1Y，即化为齐次方程，由形式(2)之解法可求出其通解.

(4)一阶线性微分方程：

dydx+p(x)y=q(x)用常数变易法求其通解为

y=e-∫p(x)dxC+∫q(x)e∫p(x)dxdx.

(5)贝努里方程：

y′+p(x)y=q(x)yn，其中n≠0，1.

令z=y1-n，则将其化为一阶线性方程

dzdx+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x).即由(4)之解法可求出其通解.

(6)全微分方程：

P(x，y)dx+Q(x，y)dy=0……()

其中 Py=Qx 成立.其通解为∫xx0P(x，y0)dx+∫yy0Q(x，y)dy=C.

［解法总结］若用函数μ(x，y)≠0 乘方程 P(x，y)dx+Q(x，y)dy=0，所得到的方程μ(x，y)P(x，y)dx+μ(x，y)Q(x，y)dy=0.是全微分方程，则称μ(x，y)为方程P(x，y)dx+Q(x，y)dy=0的积分因子.

微分方程()具备形如μ=μ(z(x，y))的积分因子的充要条件是 Qx-PyZyP-ZxQ，并是 Z 的连续函数，记为f(z)，此时，方程()的积分因子为μ(x)=e∫f(x)dx.

三、能力、思维、方法

［能力素质］

例1判别下列一阶微分方程的类型，并求其通解：

(1)y′sinx-ycosx=0；(2)2x(yex2-1)dx+ex2dy=0；

(3)eydx+(xey-2y)dy=0；(4)(2x-y)dx+(2y-x)dy=0.

解(1)原式是可分离变量型微分方程，其分离变量，有dyy=cotxdx.积分，得lny=lnsinx+C1，通解为

y=Csinx，其中C=eC1.

(2)解法一因为［2x(yex2-1)］y=ex2x=2xex2，

所以原方程是全微分方程，其中

P(x，y)=2x(yex2-1)，Q(x，y)=ex2.

所以 u(x，y)=∫x0P(x，y)dx+∫y0Q(0，y)dy

=∫x02x(yex2-1)dx+∫y0dy

=yex2-x2-y+y=yex2-x2，

故通解为 yex2-x2=C.

解法二将方程变形为

2xyex2dx+ex2dy-2xdx=0，即(ydex2+ex2dy)-dx2=0

d(yex2-x2)=0，其通解为 yex2-x2=C.

(3)将 x 看作未知函数，y 看作自变量，则可将原方程化为一阶非齐次线性方程：

dxdy+x=2ye-y

故通解为(这里 p(x)=1，q(x)=2ye-y)：

x=e- ∫ dy(∫ 2ye-y.e ∫ dy · dy+c)=e-y ∫ 2ydy+c=e-y(y2+c).

另解，此方程亦可看作全微分方程，变形有(eydx+xdey)-dy2=0，即

d(xey-y2)=0.故通解为 xey-y2=C.

(4)本方程是齐次型方程，变形有

dydx=2x-yx-2y，即 dydx=2-yx1-2yx，令 u=yx，则

dydx=u+x·dudx.故原方程为

u+x·dudx=2-u1-2u，即 1-2u2u2-2u+2du=1xdx，且为

-d(u2-u+1)2(u2-u+1)=dxx，解得

-12ln(u2-u+1)=lnx+lnc，将 u=yx 代入，得通解为

y2-xy+x2=C1，C1=1C2.

另解，本方程也是全微分方程，其中 P(x，y)=2x-y，Q(x，y)=2y-x，

∴u(x，y)=∫x0(2x-y)dx+∫y02ydy=x2-xy+y2，

故通解为 x2-xy+y2=C.

例 2 求下列方程满足初始条件的特解：

(1)2y′lnx+yx=cosxy，y(e)=0；

(2)(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0，y(1)=2.

解(1)方程为 n=-1 的贝努里方程，令 z=y2，

方程化为一阶非齐次线性方程 dzdx+1xlnxz=cosxlnx，

通解为 z=e-∫dxxlnx∫cosxlnxe-∫dxxlnxdx+C=1lnxsinx+C.

代入初始条件，得 C=-sine.

所以满足初始条件的特解为 y2=1lnx(sinx-sine).

(2)本方程为

dydx=-7x+3y+73x-7y-3 且可化为齐次的微分方程.

由于 aa1=-73≠bb1=-37，所以令 x=X+h，y=Y+k，则

-7x+3y+7=-7X-7h+3Y+3k+7，整理得

3x-7y-3=3X+3h-7Y-7k-3.

令-7h+3k+7=0；

3h-7k-3=0，得 h=1，k=0.

这时 x=X+1，y=Y，原方程为

dYdX=-7X+3Y3X-7Y. 再作变换 Z=YX，得 3-7Z7(Z2-1)dZ=dXX，即

17-5Z+1-2Z-1dZ=1XdX.积分，得

-57ln(Z+1)-27ln(Z-1)=ln(XC1)，

(Z+1)57(Z-1)27=1XC1，

因此(Y+X)5(Y-X)2=1C71.

所以原方程通解为(x+y-1)5(x-y-1)2=C，

代入初始条件 y(1)=2，得 C=27，

所以满足初始条件的特解为(x+y-1)5(x-y-1)2=27.

有时，微分方程需要通过变形或变量代换化为熟知的类型.

例 3 求解方程 y′+siny+xcosy+x=0.

解将方程变形为

y′+2siny2cosy2+x·2cos2y2=0，即 12sec2y2·y′+tany2+x=0.

令 u=tany2，则有 dudx=12sec2y2·y′.

原方程化为 dudx+u=-x.

这是一阶线性非齐次方程，解之得原方程的通解为 tany2=1-x+Ce-x.

例 4 解方程(xy5-x2y2)dy+(x2-y6)dx=0.

解原方程可变形为

xy2(y3-x)dy+(x-y3)(x+y3)dx=0.

设 y3-x≠0(x=y3 是所给方程的一奇解)，得

xy2dy-(x+y3)dx=0.

令 y3=u，得 13xdu-(x+u)dx=0，

即 dudx-3xu=3.这是一个线性方程，因而有

u=e∫3xdx∫3e-∫3xdxdx+C=e3lnx∫3e-3lnxdx+C

=x3-32x-2+C=-32x+Cx3，

故原方程的通解为 y3+32x+Cx3=0.

例 5 求 2x(yex2-1)dx+ex2dy=0 满足条件 x=0 时,y=1 的特解.

解注意到本题的特点，令 u=x2，则当 u=0 时，y=1，且原方程化为

(yeu-1)du+eudy=0.即 dydu+y=e-u，因此

y=(C+u)e-u.代入初始条件 y

u=0=1，得 C=1.

故原方程满足初始条件的特解为 y=(1+x2)e-x2.

例 6 求方程 sinydydx=(1+xcosy)cosy 的通解.

解以 1cos2y 乘方程两端得

sinycos2y·dydx=1cosy+x.

作代换 u=1cosy，dudx=sinycos2y·dydx，原方程为 dudx-u=x，

解得 u=ex(∫xe-xdx+C)=ex(-xex-e-x+C).

故原方程通解为 1cosy=Cex-x-1.

有时，需通过仔细的观察，求出积分因子，将一阶方程化为全微分方程.

例 7 找出下列方程的积分因子，并求解：

(1)y(2xy+ex)dx-exdy=0；

(2)(2x3y2+4x2y+2xy2+xy4+2y)dx+2(y3+x2y+x)dy=0.

解(1)原方程为 2xy2dx+yexdx-exdy=0.

经观察，得积分积子 μ=1y2，则有 2xdx+yexdx-exdyy2=0，

即 dx2+exy=0

故原方程通解为 x2+exy=C.

(2) 设 P=2x3y2+4x2y+2xy2+xy4+2y；Q=2(y3+x2y+x)，且有

Py=4x3y+4x2+4xy+4xy3+2，Qx=4xy+2，

1QPy-Qx=4x(x2y+x+y3)2(y3+x2y+x)=2x，

故积分因子为 μ=e∫2xdx=ex2.

于是原方程化可为

ex2(2x3y2+4x2y+2xy2+xy4+2y)dx+2ex2y3+x2y+xdy=0.

所以积分得 u(x，y)≡∫x00dx+2∫

y0ex2(y3+x2y+x)dy

=ex2y42+x2y2+2xy.

因此原方程的通解为 ex212y4+x2y2+2xy=C.

［激活思维］

当不易直接求出积分因子时,可考虑分组求解方程.

例 8 求解方程(x3+xy2-y)dx+(x2y+y3+x)dy=0.

解 将 方 程 变 形 并 分 组 ， 有 (xdy-ydx)+(x2+y2)(xdx+ydy)=0.

以(x2+y2)除上式，得 xdy-ydxx2+y2+(xdx+ydy)=0，

即 dyx1+yx2+dx22+y22=0，

故原方程的通解为 arctanyx+x22+y22=C.

例 9 求方程 ydx+(-x+2y3)dy=0 的通解.

解将方程左边分组 ydx-xdy+2y3dy=0,以 y2 除上式，得

ydx-xdyy2+2ydy=0，即 dxy+dy2=0.

故原方程的通解为 xy+y2=C.

另解；方程变形为 dxdy-1yx=-2y2.

这是一阶线性非齐次方程，其通解为

x=e∫1ydy∫-2y2e-∫1ydydy+C=y(-y2+C).

下面的微分方程是未知函数的一阶导数未解出的方程.

例 10 求下列各微分方程的通解：

(1)y′2-(x+y)y′+xy=0；(2)y=y′x+1y′；

(3)x=2y′+lny′；(4)x2y′2+xyy′-2y2=0.

解(1)析因式(y′-x)(y′-y)=0.

由 y′-x=0，即 dydx=x，解得 y=12x2+C；

由 y′-y=0，即 dydx=y，解得 y=Cex.

显然，包括在 y=12x2+C 及 y=Cex 之内的一切解，都

满足原来的方程.

(2)原方程 y=y′x+1y′再对 x 求导,有 y′=y′+xdy′dx-1y′2·dy′dx，

化简，有 x-1y′2dy′dx=0.

由 dy′dx=0 得 y′=C.代入原方程，所求通解为 y=Cx+1C.

［解法总结］若由 x-1y′2=0 求出 y′=±1x，代入原方程，得 y=±2x 或 y2=4x，也是原方程的解.显然，它不包含在通解 y=Cx+1C 之内，称为原方程的奇解.

(3)此处已解出 x，对 y 求导数，得

1y′=2+1y′dy′dy 或 dy=(2y′+1)dy′.

积分，有 y=y′2+y′+C，令 y′=P，则原方程的通解可表示为以 P 为参数的参数方程为：

x=2P+lnP,

y=P2+P+C.

(4)此处可解出 x(或 y)为

x=-y′y±y′2y2+8y′2y22y′2=-y′y±3y′y2y′2.

由 x=-y′y+3y′y2y′2=yy′，对 y 微分，得

1y′=1y′-yy′2·dy′dy 或 dy′dy=0.

由 dy′dy=0 得 y′=C，代入 x=yy′有 y=Cx；

由 x=-y′y-3y′y2y′2=-2yy′对 y 微分有

1y′=-2y′+2yy′2·dy′dy 或 32dyy=dy′y′.

积分得 y′=1C1y32,代入 x=-2yy′,得 x2y=4C21=C.

于是原方程的通解为 y=Cx 或 x2y=C.

例 11 确定 p 的值,使 1(x2+y2)p(x-y)dx+(x+y)dy=0 为全微分方程，并求其解.

解∵P=x-y(x2+y2)p，Q=x+y(x2+y2)p，

∴

Py=-(x2+y2)-(x-y)2yp(x2+y2)p+1=(2p-1)y2-x2-2pxy(x2+y2)p+1，

Qx=x2+y2-(x+y)2xp(x2+y2)p+1=(1-2p)x2+y2-2pxy(x2+y2)p+1.

由于 Py=Qx，∴p=1.

∵x2+y2≠0，故取不经过原点的积分路径.因此

u(x，y)=∫x0x-1(x2+1)dx+∫y1x+y(x2+y2)dy

=12ln(1+x2)-arctanx+arctanyx-arctan1x+12ln(x2+y2)-12ln(x2+1).

=arctanyx+12ln(x2+y2)-π2，

所以原方程之通解为 arctanyx+12ln(x2+y2)=C.

所以，原方程之通解为 arctanyx+12ln(x2+y2)＝C.

［真题在线]

例 12(97 年)设函数 f(x)在［0,+∞］上连续，且满足方程

f(x)＝e4m2＋x2+y2≤4t212x2+y2dxdy 求 f(x).

分析二重积分 x2+y2f(12x2+y2)dxdy 的积分域是一个圆域，其半径 2t，是 t 的函数，被积函数 f(12x2+y2)是关于 x2+y2 的函数.因此本题应在极坐标下化为累次积分.从而可使原方程化为含变上限积分的方程.

解显然，f(0)＝1，由于

x2+y2≤4t2f(12x2+y2)dxdy

＝∫2x0dθ∫2t0f(12r)rdr

＝2π∫2t0rf(12r)dr

从而有 f(t)＝e4πt2+2π∫2t0rf(12f)dr

上式两边对 t 求导得

f′(t)＝8πte4πt2＋8πtf(t)

解上述关于 f(t)的一阶线性微分方程得

f(t)＝e∫8πtdt[∫8πte4πt2e－∫8πtdtdt+C]

＝e4πt2［8π∫tdt+C]

＝(4πt2+C)e4πt2

代入 f(0)＝1，得 C＝1，因此

f(t)＝(4πt2+1)e4πt2

例 13(98 年)设函数 f(x)在［1，+∞）上连续，若由曲线 y＝f(x)直线 x＝1,x＝t(t＞1)与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成旋转体体积为

V(t)＝π3［t2f(t)-f(1)]

试求 f(x)所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 yx＝2＝29 的解.

解析首选应根据题意求出旋转体体积 v(t)，然后就可得到微分方程，最后求解散分方程即可.

解 V(t)＝π∫t1f2(x)dx＝π3［t2f(t)-f(1)]

即 3∫t1f2(x)dx＝t2f(t)－f(1)

两边对 t 求导得

3f2(t)＝2tf(t)+t2f′(t)

即 dydx＝3(yx)2－2yx

令 yx＝u,则有

xdudx＝3u(u-1)

duu(u-1)＝3dxx

两边积分得 u-1u＝cx3

从而有 y－x＝cx3y

由已知条件求得 c＝－1，从而所求的解为

y－x＝-x3y

例 14(99 年)设有微分方程 y′-2y＝φ(x)，其中φ(x)＝2,x＜1

0x＞1.试求在(-∞,＋∞)内的连续函数 y＝y(x)，使之在(-∞，1)和(1，+∞)内都满足所给方程，且满足条件 y(0)＝0

分析这是一道求解微分方程的题，其特点也就是难点在于非齐次项是一个分段函数.因此需求解两个一阶线性方程,显然该方程的解 y(x)也是分段函数,为使 y(x)连续，需调整 y(x)中的任意常数.

解当 x＜1 时，有 y′－2y＝2，其通解为

y＝C1e2x-1(x＜1)

由 y(0)＝0 知，C1＝1，所以 y＝e2x-1,(x＜1)

当 x＞1 时，有 y′－2y＝0，其通解为 y＝C2e2x(x＞1)

由 limx→1+C2e2x＝limx→1-(e2x-1)＝e2x-1 得 C2＝1-e－2，所以

y＝(1-e－2)2x(x＞1)

因此 y(x)＝e2x-1 若 x≤1

(1-e-2)e2x 若 x＞1

§6.2 可降阶的微分方程

一、熟知考纲考点

用简单的变量代换求解可降阶的高阶微分方程

二、本节知识串讲

1y(n)=f(x)型的微分方程该微分方程的通解形式为 y=∫…∫n 重 f(x)dx…dxn 重+C1xn-1+C2xn-2+…+Cn-1x+Cn.

2y″=f(x，y′)，即不显含变量 y 型的微分方程

令 y′=P，则 y″=P′，原方程降为一阶方程 P′=f(x，P).设其通解为 P=φ(x，C)，即 y′=φ(x，C1)，则原方程的通解为 y=∫φ(x，C1)dx+C2.

3y″=f(y，y′)型的微分方程

该微分方程不显含变量 x，令 y′=P，则 y″=dPdx=dPdy·dydx=P·dPdy，原方程化为一阶方程 PdPdy=f(y,P).设其通解为 P=φ(y,C1).即 dydx=φ(y,C1)，则原方程通解为

∫dyφ(y，C1)=x+C2.

三、能力、思维、方法

［能力素质］

例 1 求解下列微分方程：

(1)y□=xe-x；(2)x2y″=(y′)2+2xy′；

(3)y″lny+1y(y′)2=1；(4)y″-(y′)2=1.

解(1)对所给方程接连积分三次，得

y″=-xe-x-e-x+C1,

y′=(x+2)e-x+C1x+C2,

y=(x+1)e-x+12C1x2+C2x+C3.

这就是所求的通解.

(2)所给方程不显含 y，所以令 y′=P，有 y″=P′，P′-2xP=1x2P2.

这是 n=2 的贝努里方程，令 z=P-1，得 dzdx+2xz=-1x2.

所以 z=e-∫2xdx∫-1x2e∫2xdxdx+C1=1x2(-x+C1),

即 P=x2C1-x，因而 y=∫x2C1-xdx,

所以 y=-x22-C1x-C21lnC1-x+C2.

(3)所给方程是不显含变量 x 的，设 y′=P.代入方程并化简有

dPdy+1ylnyP=1lnyP-1.

这是 n=-1 的贝努里方程，令 Z=P2，得

dZdy+2ylnyZ=2lny，

所以 P2=1(lny)2(2ylny-2y+C1)，且

dydx=±2lnyylny-y+C2C2=C12.

分离变量后得±lnydy2ylny-y+C2=dx.

注意到 lnydy=d(ylny-y+C2)，故±2·ylny-y+C2=x+C3.

两边平方后得 ylny-y+C2=12(x+C3)2.

另解，用凑微分法解此方程.注意到(y′lny)′=y″lny+1y(y′)2，

原方程可化为(y′lny)′=1，即 y′lny=x+C3.

分离变量后得通解为 ylny-y=12x+C32-C2.

(4)所给方程既是 y″=f(x，y′)型，也是 y″=f(y，y′)型，令 y′=P，得 P′-P2=1.

分离变量后,解得 arctanP=x+C,即 y′=tan(x+C1).

故原方程的通解为 y=-lncos(x+C1)+C2.

［激活思维］

例 2 解下列方程：

(1)yy″+y′2+yy′+x+1=0；

(2)xyy″+x(y′)2-yy′=0.

分析这两个方程都显含 x，y，y′，y″，属于二阶方程 F(x，y，y′，y″)=0 的一般情况，故不能用前述变换 y′=P(x)或 y′=P(y)求解.这时，应着重分析方程特点，寻求新的变换，达到降阶、求解的目的.

解(1)事实上，此方程可改写成

(yy′)′+12y2′+12x2′+x′=0，即 ddx(yy′+12y2+12x2+x)=0.

积分有 ydydx+12y2+12x2+x=C.

所以 2ydy+(y2+x2+2x)dx=C1dx，其中 C1=2C.

注意到 ex(y2dx+dy2)=y2dex+exdy2=d(y2ex)，ex(x2+2x)dx=d(x2ex)，可知此方程有积分因子μ(x)=ex，以μ(x)=ex乘此方程两边，

则由 d(y2ex)+d(x2ex)=C1exdx，得

y2ex+x2ex=C1ex+C2，

即原方程通解为 y2+x=C1+C2e-x.

(2)将方程改写成 x［yy″+(y′)2］=yy′.

注意到 yy″+(y′)2=(yy′)′，故方程可化为 xd(yy′)dx=yy′.

令 yy′=u,则 xdudx=u,分离变量并积分,得 u=C1x，yy′=C1x.

即 2ydy=2C1xdx.

再积分，便得原方程通解为 C1x2-y2=C2.

另解注意到方程左端函数是关于 y，y′，y″的二次齐次函数.故若作变换 y=eu，则

xeueuu″+(u′)2+xeuu′2-eu·eu·u′=0.

消去(eu)2，得 xu″+2x(u′)2-u′=0.

此方程不显含 u，再令 u′=P(x).则得贝努里方程 dPdx-1xP=-2P2.

易得其通解为 dudx=P=xx2+C1，故原方程通解为

y=eu=e∫xx2+C1dx=eln(C2x2+C1)=C2x2+C1，

并可化为 Ax2-y2=B(A=C22，B=-C1C22).

［解法总结］另解的方法具有一般性，当 n 阶方程 F(x，y，y′，…，y(n))=0 的左端函数 F 是关于 y，y′，…，y(n)的 k 次齐次函数时，均可令 y=eu，将方程化为不显含未知函数 u 的方程；再令 u′=P(x)，即可降低一阶.特别地，此方法适用于 n 阶齐次线性方程(k=1)为