普通高等教育规划教材

经济管理数学

彭玉芳　靳小钊　杜本峰　编

机械工业出版社

本书是一本专为经济、管理类各专业编写的应用数学教程，涉及微积分、级性代数和应用数理统计。全书从经济管理实际原型问题入手，将数学分析的基本思想和经济管理的实际问题有机地结合在一起，融为一体；在内容编排上，删繁就简，精选了经济管理专业必备的知识，特别注意到经济管理实践中常用的分析手段的数学背景和基本专业素质的训练。本书的重点放在了现代应用数学方法在社会经济中的应用。

本书作为普通高等教育规划教材，尽可能适合多方面不同层次读者的需要，内容通俗简明，但又有适当的深度。可作为普通高等院校经济、管理专业教材和教学参考书，也可用于成人高校或在职岗位培训和自学。

图书在版编目（CIP）数据

经济管理数学/彭玉芳，靳小钊，杜本峰编．—北京：机械工业出版社，2000.9

普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-08190-0

Ⅰ．经…　Ⅱ．①彭…②靳…③杜…　Ⅲ．经济管理-经济数学-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 65961 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：冯　铁　曹俊玲　版式设计：冉晓华　责任校对：魏俊云

封面设计：方　芬　责任印制：郭景龙

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2000 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·10 印张·387 千字

0 001—3 500 册

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前　言

《经济管理数学》是一本专为经济、管理各专业编写的应用数学教材。它涉及微积分、线性代数、应用数理统计的基础知识，又从社会经济、管理现象的原型出发，结合经济、管理实践的基本要求，把应用数学知识融入了分析问题、解决问题的过程，较好地解决了专业基础和工具学科相衔接的难题。

《经济管理数学》本着将知识融于实践能力，着眼于运用数学知识分析、解决经济管理问题，培养数学思维能力和运算技能，提高专业素质的目的，至少在以下几方面不同于国内同类书籍，这也是本书编者孜孜追求的目标：第一，《经济管理数学》将数学分析的基本思想和原理与经济管理的普遍现象和基本分析方法有机地相结合，融为一体，在体例和篇目上删繁就简，突出应用和实践原型的引入；第二，《经济管理数学》在较小的篇幅内精选了经济、管理专业适用的内容，特别注意到经济、管理实践中常用的分析手段的数学背景和基本专业素质训练的循序渐进问题，着力将现代应用数理统计方法用通俗语言介绍给读者，第三《经济管理数学》注意到国内同类书籍偏重、偏好抽象推理，讲究公理体系完整，片面追求理论严整的倾向，精简过于烦琐的推理过程，同时注意用精炼的数学语言向读者描述现代应用数学的经济、管理原型；第四《经济管理数学》在内容安排上兼顾不同层次、不同需要经济、管理各专业的特点，兼顾学科前沿和传统内容的相融性，涵盖宽，容量大，能适应更广读者群的需要。本书对基本知识的建构和要领性介绍，为读者进一步学习奠定了基础，同时给教师以较大的选择空间。

全书分三篇共十六章。第一篇微积分，介绍了极限、导数、微分、积分、微分方程和差分方程的基本概念和方法，着重结合经济管理现象介绍了导数的应用和方程的求解，简要介绍了多元函数的微分与积分。本篇共六章。第二篇线性代数，概要介绍了行列式、矩阵、n 维向量和线性方程组导线性代数的核心内容，着重培养用现代代数方法解决经济管理问题的实践能力。本篇共三章。第三篇应用数理统计，主要介绍随机事件与概率、随机变量及其分布和数字特征、抽样分布与参数估计、统计假设检验、方差分析和回归分析等现代应用数理统计的基本概念和方法，着重培养运用概率和数理统计思考方法，分析、解决问题的能力。本篇共七章。

本书为普通高等教育“九五”规划教材。由数学教育专家和经济、管理专业的教授编写，可作为经济、管理类各专业教材，也可作为各类成人高校和在职岗位培训教材。

本书由彭玉芳、靳小钊、杜本峰共同编写。宣立新、陈秉正审阅了全书，并提出了自己的见解，朱卓宇参加了部分审阅工作。彭玉芳主持厘定了全书的写作提纲并撰写本书第二篇第七章。靳小钊撰写本书第一篇第一至第六章。杜本峰撰写第二篇第八章、第九章、第三篇第七至第十六章。本书最后由彭玉芳、靳小钊、杜本峰共同讨论定稿。

在本书撰写过程中，编者参考了国内有关专著，教材和公开发表的文章，有些案例内容和结论为本书所引用，在此向有关作者表示深切的谢意。

由于本书成书锤炼周期较短，编者水平有限，书中难免存在错误和缺点，恳请读者批评指正。

编者

2000 年 5 月

目　　录

第二篇　线性代数

第三篇　应用数理统计

第一篇　微　积　分

对经济管理现象进行定量分析的基础是研究变量及变量的变化规律。微积分正是以变量研究为对象，展开变量与变量之间相互关系的讨论。

第一章　函数与极限

集合、函数以及极限等概念，在中学数学中已经涉及，作为经济管理数学的导入，有必要对这些概念进行整理和充实。

第一节　集　　合

在观察、研究、分析经济管理现象时，常常要遇到各种各样的变量，如价格、需求量、市场容量等等。如果舍弃这些变量的经济属性，它们的共性是：通过一系列的数值来表达，这些数值按照某种相互关系组成一个整体，这个整体可以称为数的集合。

集合是数学中一个重要的基础概念，它在现代数学中起着非常重要的作用。

把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体就是一个集合（简称为集），这些事物叫做该集合的元素。

例如，市场中进行交易的蔬菜品种；企业的客户；1990 年以来的银行存贷款利率；深圳股市某日股票涨幅等等，这些都组成集合。

通常用大写字母 A、B、C、…表示集合。集合的元素用小写字母 a、b、c、…表示。

某个元素 a 是集合 A 的一个元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$。$a\in A$，$b\in A$，…则可记为 $A=\{a, b, \cdots\}$。元素 b 不是集合 B 的元素，则称 b 不属于 B，记为 $b\overline{\in} B$。

如果任给 $a\in A$，$a\in B$，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$（或称 B 包含 A）。

例如，用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合，显然有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$；$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$。

如果 A、B 两集合，$A\supset B$ 同时 $B\supset A$，则称 A 集合与 B 集合相等，记作 $A=B$。

为研究方便，规定所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U；不包含任

何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

例如，$x^2+1=0$ 的实数根集合为空集，记作$\varnothing=\{x|x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}$。

由 A 集合和 B 集合的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

集合的并有下列性质：

(1) $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$。

(2) $A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$。

由集合 A 和集合 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

集合的交有下列性质：

(1) $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$。

由属于 A 集而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$。

全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 C_vA，即 $C_vA=\{x|x\in U$ 且 $x\overline{\in} A\}$。补集可以看作集合的差的特殊情形。

补集有下列性质：

(1) $A\cup C_vA=U$。

(2) $A\cap C_vA=\varnothing$。

(3) $C_vA=U-A$。

集合的各种关系可用图表示，如图 1-1 所示。

集合的各种关系可以看作集合间的运算，它们满足下列运算律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cap C)$。

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

(4) 摩根律　$(A\cup B)'=A'\cap B'$，$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

将两个元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x, y)，称为有序元素组。

对于有序元素组(x_1,y_1)和(x_2,y_2)，当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$ 时，称(x_1,y_1)与(x_2,y_2)相等。

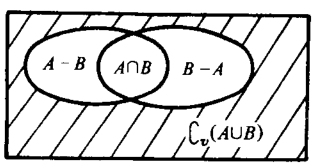

图 1-1
图中外框的矩形表示全集 U，图中阴影部分为全集 U 下 $A\cup B$ 的补集，记作 $C_v(A\cup B)$。

由二个元素组成的有序数组（x_1，x_2）称为二元有序数组，由 n 个元素组成的有序数组（x_1，$x_2\cdots$，x_n）称为 n 元有序数组。

对于集合 A 和 B，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组（x，y）构成的集合，称为 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$。

例 1 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3\}$，则

$A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)\}$

例 2 设 $A=\{a,b\}$，则

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

例 3 设 $\mathbf{R}$ 表示实数集合，则直角坐标系下的坐标平面可记作

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$$

类似地可推及 $A\times B\times C=\{(x,y,z)\mid x\in A,y\in B,z\in C\}$。

如果 $a>0$，则下面两个集合相等

$$\{x\mid |x|<a\}=\{x\mid -a<x<a\}$$

如果 $b>0$，则下面两个集合相等

$$\{x\mid |x|>b\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}$$

设 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为区间，记为(a,b)。

类似地有$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

实数集合 $\{x\mid |x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 在数轴上是一个以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的区间（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$），称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。如图 1-2 所示。

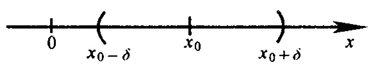

图 1-2

例 4 邻域$\{x\mid |x-5|<\frac{1}{2}\}=(4.5,5.5)$。

例 5 数集$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，这是在 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 后由其余的点所组成的集合，称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的空心邻域，如图 1-3 所示。

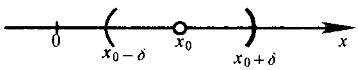

图 1-3

例 6 $\{x\mid 0<|x-1|<2\}=(-1,1)\cup(1,3)$。

第二节　函　　数

函数概念是数学分析中最基本的概念，它的实质是反映现实世界中量与量之间确定的对应关系。实数与实数之间的对应关系为一元函数，记为

$$y=f(x)\quad x\in X\subset\mathbf{R},y\in Y\subset\mathbf{R}$$

其中　x 称为自变量，y 称为因变量，集合 X 称为函数的定义域，f 为对应规则，即对每一个 $x\in X$，按规则 f 有一个确定的 y 值与之对应。

对于 $x_0\in X$ 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值。全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域。

确定一个函数有两个要素，一个是变量之间的对应关系（它可以用多种方式表示）；第二个是表示自变量变化范围的定义域。对应关系和定义域给定以后，函数及其值域也就完全被确定了。要判断两个及两个以上的函数是否相同，只要看它们各自的对应关系和定义域是否相同。

不同的对应规则常用 φ,h,g,F 来表示。给定函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$，$h(x)=x$，显然，$f(x)\equiv g(x)$，而 $f(x)\not\equiv h(x)$。给定函数 $f(x)=2\lg x$，$g(x)=\lg x^2$，显然它们也不是同一个函数。

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集

$$\{(x,y)|y=f(x),x\in X\}$$

即为定义在 X 上的函数 $y=f(x)$ 的图形。

例 1　$y=\arcsin(2+x^2)$。

对于任何实数 x，都没有按给定规则与之对应的 y 值，函数定义域不能是空集，因此 $y=\arcsin(2+x^2)$ 不是函数关系。

例 2　$x>y$。

按这个规则，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应。而函数概念中的对应规则要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应，所以此例也不是函数关系。

例 3　根据利率的定义，实际年利率 i 为

$$i=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1\qquad \text{其中 } r \text{ 为名义利率，常量}$$

$$=i(m)\qquad m \text{ 为一年中计息次数，变量}$$

$i=i(m)$　表达了实际年利率与一年中计息次数间的确定的对应关系。$m\in\mathbf{N}$。

例 4　某汽车配件销售公司 1 月至 12 月的化油器销售量如表 1-1 所示。表中表示了该化油器销售量 S 随月份 t 变化的函数关系，它的定义域（$t\in T$）

$$T=\{1,2,3,\cdots,11,12\}$$

表 1-1

月 份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销 售 量 S	423	358	434	445	527	429	426	502	480	384	427	446

例 5 某城市大气中漂尘量自动监测记录如图 1-4 所示。图形表示漂尘量 y 随时间 x 变化的函数关系。

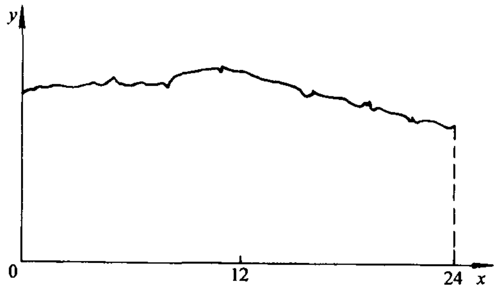

图 1-4

经济管理活动中，变量与变量间的相互关系一般是错综复杂的，通常表示为解析公式，表格和图形，有些函数对于其定义域内变量 x 不同的值不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数。

例 6 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 K 元，超过 a 公里，超过部分每公里为 $\frac{4}{5}K$ 元，则运价 y 与里程 x 之间的函数关系可表达为分段函数

$$y=\begin{cases} Kx & 0<x\leqslant a \\ Ka+\frac{4}{5}K(x-a) & a<x \end{cases}$$

函数定义域为 $(0,+\infty)$

例 7 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，也记作 $y=\mathrm{sgn}(x)$，函数图形如图 1-5 所示。

例 8 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$。

解 当 $x-1<0$，即 $x<1$ 时，$|x-1|=1-x$

当 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$

因此 $y=\begin{cases} 2+x & x<1 \\ 4-x & x\geqslant 1 \end{cases}$

其图形如图 1-6 所示。

例 9 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2 & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$，求 $f(x-1)$。

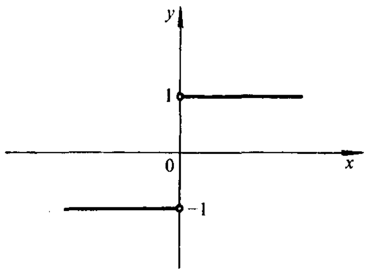

图 1-5

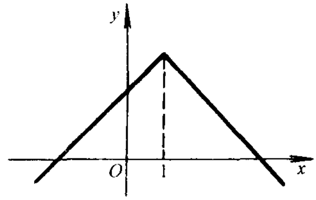

图 1-6

解 $f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2 & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$

即 $f(x-1)=\begin{cases}x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3\\ (x-1)^2 & 3<x\leqslant 5\end{cases}$

有些函数的因变量是用自变量表达式表示出来的，称为显函数。例如：$y=x^2$；$y=\sqrt{r^2-x^2}$；$y=\log_a(3x+1)$等。而有些函数，它的因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的，称为隐函数。例如：$Ax+By+C=0$；$xy=1$；$x^2+y^2=r^2$ 等。

变量之间的相互关系还表现为链锁式的依赖关系，即变量甲依赖于变量乙，而变量乙又依赖于变量丙，等等。

例如，一个单摆的振动周期 T 是摆长 l 的函数，① $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 g 为重力加速度；另一方面，又知道摆长 l 是温度 τ 的函数。② $l=l_0(1+\alpha\tau)$，其中 l_0 为 0℃时摆的长度，α 是线胀系数。由此，单摆周期 T 对温度的依赖关系是③ $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0(1+\alpha\tau)}{g}}$

这样，通过一个中间变量 l，由已知函数①和②得出新函数③的做法，称为函数的复合。由函数 $y=f(x)$和 $x=\varphi(t)$复合得到的函数可写作 $y=f(\varphi(t))$。

有时也可以适当地引进一些中间变量，把一个本来是直接给出的函数看成为复合函数。

例如函数 $y=\sin(t^2+1)$，就可以看作是由函数 $y=\sin x$，$x=t^2+1$ 复合得来的。

在有关函数关系的前述中，我们着眼于变量 y 的值是如何随着 x 的值而确定的。其实也可以反过来考虑 x 的值是如何随着 y 的值而确定的。这时 y 处于自变量的地位。如果对于 y 的每一个值由 $y=f(x)$恰可反解出 x 的一个值的话，那么按照前述定义，x 就是 y 的函数，记作

$x=g(y)$或者 $x=f^{-1}(y)$

$y\in Y\subset \mathbf{R}, x\in X\subset \mathbf{R}$

函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数。习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此将 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$,这时我们说,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数。

例如,函数 $y=x^2 \quad x\in \mathbf{R} \quad y\in \mathbf{R}^+\cup\{0\}$($\mathbf{R}^+$表示正实数的集合)。

反解 $x=\pm\sqrt{y}$,即相应于 y 的一个值可以反解出 x 的多个值,在这种情况下,我们说 $y=x^2$ 的反函数有两个分支:$x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$,其中每个分支都是上述意义下的函数 $y=x^2$ 的反函数。

下列函数称为基本初等函数:

(1) 常函数 $y=C$(C 为常数)

(2) 幂函数 $y=x^a(a\in \mathbf{R})$

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$

(5) 三角函数 $y=\sin x \quad y=\cos x$

$y=\tan x \quad y=\cot x$

(6) 反三角函数 $y=\mathrm{arc}\sin x \quad y=\mathrm{arc}\cos x$

$y=\mathrm{arc}\tan x \quad y=\mathrm{arc}\cot x$

由以上六类基本初等函数作有限次加、减、乘、除四则运算和函数复合所得到可由一个解析式表达的一切函数,统称为初等函数。

初等函数中某些函数具有以下简单性质:

(1) 函数的奇偶性 对于函数 $y=f(x), x\in X$(X 关于原点对称)

1) $\forall$ (读作任意给定)$x\in X$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数。

2) $\forall\ x\in X$ 有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于原点。

(2) 函数的周期性 对于函数 $y=f(x), x\in X$,如果存在正的常数 a,使得 $f(x)=f(x+a)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数。满足这个等式的最小正数 a,称为函数的周期。

(3) 函数的单调增减性 如果函数 $y=f(x)$对(a,b)内$\forall\ x_1$ 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称此函数在区间(a,b)内是单调递增的;当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称此函数在区间(a,b)内是单调递减的。

(4) 函数的有界性 对于函数 $y=f(x), x\in X$ 在(a,b)内有定义,($(a,b)\subset X$),如果存在一个正数 M,对于$\forall\ x\in(a,b)$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内有界;如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在(a,b)内无界。

第三节 极　　限

经济管理活动中，经常要观察、研究变量的变化趋势，涉及到变量的极限。极限概念是微积分中最重要的基本概念。在微积分中，研究问题所采用的基本方法就是极限法。

一、极限的概念

所谓极限，简单明了地讲是指两个相关变量中的一个变量按一定规律变化时，另一个变量变化的趋势。若它的变化趋势是无限趋近于一个常量，则称极根存在；若它的变化趋势是其绝对值无限变大，或者本身就没有一个确定的趋势，不趋向于任何一个常量，则称极限不存在。

例 1　数列 $S_n=\frac{1}{2^n}$，当项数 n 无限变大时，S_n 无限趋近于常数 0。

数列 $S_n=1+\frac{1}{n}$，当项数 n 无限变大时，S_n 无限趋近于常数 1。

数列 $S_n=2n$，当项数 n 无限变大时，S_n 的绝对值无限变大。

数列 $S_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$，当项数 n 无限变大时，S_n 没有一个确定的趋势。

例 2　函数 $y=1+\frac{1}{x}$，当 x 取正值无限变大时，y 无限趋向于常数 1。

函数 $y=\sin x$，当 x 取负值而绝对值无限变大时，y 不趋向于一个常数。

函数 $y=2x+1$，当 x 无限趋近于 $\frac{1}{2}$ 时，y 无限趋近于常数 2。

数学分析方法中，变量的变化趋势采用精确的"$\varepsilon—\delta$"或"$\varepsilon—N$"语言进行描述，着重刻划"无限趋近"和无限趋近过程中两个变量变化趋势的关系。

数列 S_n 的极限的描述中，S_n 无限趋近于常数 A，可以表达为：不论事先指定一个多么小的正数（简记为$\forall\ \varepsilon>0$），在 n 的无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以后（简记为$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时），总有 $|S_n-A|$ 小于事先指定的正数 ε_0，这样我们就称"数列 S_n 以常数 A 为极限"。因此可以定义数列的极限。

定义 1　如果对于任意给定的正数 ε 总存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，$|S_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 n 趋于无穷大时，数列 S_n 以常数 A 为极限。记作　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$ 或 $S_n\to A(n\to\infty)$。定义还可简述如下：

对于$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|S_n-A|<\varepsilon$，则称 $n\to\infty$ 时，S_n 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$，$A$ 称为 $n\to\infty$ 时 S_n 的极限值。

如果一个数列有极限，就称这个数列是收敛的，否则就称它是发散的。S_n 以 A 为极限，就称 S_n 收敛于 A。

例 3　$S_n=\frac{1}{2^n}$，$n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}$ 收敛于 0，即 $\lim\frac{1}{2^n}=0$。

$S_n=1+\frac{1}{n}$，$n\to\infty$时，$1+\frac{1}{n}$收敛于1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$。

$n\to\infty$时，$S_n=2n$无限变大，无极限，$2n$是发散的。

$n\to\infty$时，$S_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$时而取0，时而取1，$\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$也是发散的。

以上定义不仅精确刻画了数列"n无限增大时，$|S_n-A|$可以任意小"，同时提供了一个精确的工具，证明S_n确定收敛于A（而不是其他常数），对于任意事先确定的充分小的正数ε，充分大的正数（或正整数）是存在的。

例 4 对于数列$S_n=1+\frac{1}{n}$

$$|S_n-1|=\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

事实上，要使$|S_n-1|<\varepsilon$，即$\frac{1}{n}<\varepsilon$，因为$n>0$，$\varepsilon>0$即有$n>\frac{1}{\varepsilon}$。如果指定$\varepsilon=0.1$，只需$n>10$，也就是说，数列从第11项开始，以后各项都满足$|S_n-1|<\frac{1}{10}$。

如果指定$\varepsilon=0.01$，只需$n>\frac{1}{0.01}$，即$n>100$，也就是说，数列从第101项开始以后各项都满足$|S_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon(=0.01)$。

由此可见，对于数列S_n，$\forall\ \varepsilon>0$（不论多么小），$\exists\ N=\frac{1}{\varepsilon}$，当$n>N$时，$|S_n-1|<\varepsilon$。

数列可以看作整标函数$f(n)$，当$n\to\infty$时$f(n)$收敛于A的几何意义是：

对于任意给定的小正数ε，在$f(n)=A-\varepsilon$与$f(n)=A+\varepsilon$之间形成一个带形区域，不论ε多么小，即不论带形区域多么狭窄，总可以找到N，从第$N+1$项起，以后的一切项S_{N+1}，S_{N+2}，…的数值均在$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内，即当$n>N$时，其对应点$(n,S_n)$都落在带形区域内，带形区域外只会有有限个点，如图1-7所示。

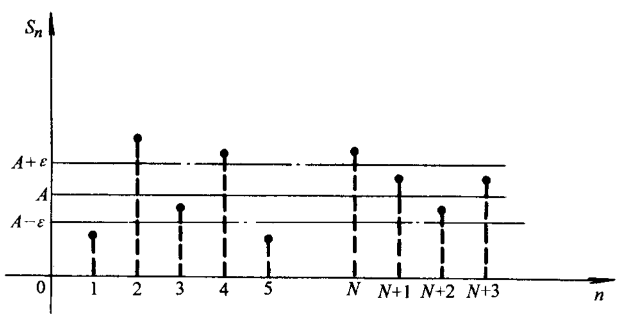

图 1-7