金融数学与分析技术

蔡明超　孙培源　编著

復旦大學出版社

内 容 提 要

本书主要内容包括：股价行为的 Brown 运动模型；效用函数与风险态度；离散金融系统；资产组合问题与资本资产定价模型及其检验方法；衍生资产定价的模型——二叉树模型与 Black-Scholes 模型；金融市场的数据分析；金融资产收益率的分布特征；事件研究法；有效市场假设的理论与检验；风险价值系统；资产分配策略；投资基金及资产组合管理的评估技术；证券市场的流动性与微观结构理论.

本书侧重于介绍统计学和数学在金融理论前沿中的应用，因此有助于非数学类金融理论工作者及硕士生、博士生迅速掌握定量研究方法，同时也有助于数学类专业的学者迅速了解数学理论在金融领域的应用. 本书的读者还可以包括：基金经理、资产组合管理人员及其他机构投资者、证券从业人员.

出版说明

科学技术是第一生产力。21世纪，科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略，上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于2000年设立“上海科技专著出版资金”，资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

前　　言

21 世纪数学技术将和计算机技术一样成为任何一门学科发展过程中的必备工具. 美国花旗银行副总裁柯林斯(Collins)1995 年 3 月 6 日在英国剑桥大学牛顿数学科学研究所的讲演中叙述道:“在 18 世纪初,和牛顿(Newton)同时代的著名数学家伯努里(J·Bernoulli)曾宣称:‘从事物理学研究而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西’. 那时候,这样的说法对物理学而言是正确的,但对银行业而言一定不对. 在 18 世纪,你可以没有任何数学训练而很好地运作银行. 过去对物理学而言是正确的说法现在对银行业也正确了. 现在可以这样说:‘从事银行业工作而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西’. ”他指出:花旗银行 70%的业务依赖于数学,他还特别强调‘如果没有利用数学发展起来的工具和技术,许多事情我们是一点也没法做的……没有数学我们不可能生存. ’银行家用他的经验描述了数学的重要性. 在冷战结束后,美国原先在军事系统工作的数以千计的科学家进入了华尔街,大规模的基金管理公司纷纷开始雇佣数学博士或物理学博士. 这是一个重要信号:金融市场不是战场,却远胜战场. 但市场和战场都离不开复杂艰深、迅速的计算工作.

然而在国内不能回避这样一个事实:受过高等教育的专业人士都可以读懂国内经济类、金融类核心期刊,但国内金融学专业的本科毕业生却难以读懂本专业的国际核心期刊《Journal of Finance》,证券投资基金经理少有人去阅读《Journal of Portfolio Management》,其原因不在于外语的熟练程度,而在于内容和研究方法上的差异. 目前国内较多停留在以描述性分析为主,着重描述

金融的定义、市场的划分及金融组织等，或称为描述金融；而国外学术界以及实务界则以数量性分析为主，比如资本资产定价原理、衍生资产的复制方法等，或称为分析金融. 即使在国内金融学的教材中，虽然涉及到了标的资产(Underlying asset)和衍生资产(Derivative asset)定价，但对公式提出的原文证明也予以回避. 这种现象是不合理的. 产生这种现象的原因有如下几个方面：首先，根据研究方法的不同，我国金融学科既可以归口到我国哲学社会科学规划办公室，也可以归口到国家自然科学基金委员会管理科学部，前者占主导地位，且这支队伍大多来自经济转轨前的哲学和政治学队伍，因此研究方法多为定性的方法. 而西方却正好相反，金融研究方向的队伍具有很好的数理功底. 其次是由我国金融市场的实际环境所决定. 我国证券市场刚起步，也没有一个统一的货币市场，投资者队伍主要由中小投资者构成，市场投机成分高，因此不会产生对现代投资理论的需求，相应地，学术界也难以对此产生研究的热情.

然而数学技术以其精确的描述、严密的推导已经不容争辩地走进了金融领域. 自从 1952 年马科维茨(Markowitz)提出了用随机变量的特征变量来描述金融资产的收益性、不确定性和流动性以来，已经很难分清世界一流的金融杂志是在分析金融市场还是在撰写一篇数学论文. 再回到 Collins 的讲话，在金融证券化的趋势中，无论是我们采用统计学的方法分析历史数据、寻找价格波动规律，还是用数学分析的方法去复制金融产品，谁最先发现了内在规律，谁就能率先在瞬息万变的金融市场中获取高额利润. 尽管由于森严的进入壁垒，数学进入金融领域受到了一定的排斥和漠视，然而为了追求利润，未知的恐惧显得不堪一击. 根据竞争战略的游戏规则，我们可以建立一个产业链：金融市场——金融数学——计算机技术. 金融市场存在巨大的利润和高风险，需要计算机技术帮助分析，然而计算机不可能识别大概、左右等描述性语言，它本质

上只能识别由 0，1 构成的空间. 金融数学在这个过程中正好扮演了一个中介角色，它可以用精确语言描述随机波动的市场. 比如，通过收益率状态矩阵在无套利的情形下找到无风险贴现因子. 因此，金融数学能帮助 IT 产业向金融产业延伸，并获取自己的利润空间.

可喜的是近几年来，尤其是伴随着资本市场的建立与发展以及利率的市场化进程，我国许多有识之士越来越意识到了数学技术的重要性. 国家自然科学基金委员会数理科学部于 1995 年 2 月 20 日召开了金融数学研讨会，探讨在我国经济发展的新形势下，解决金融及相关经济领域重要科学问题的途径与方法. 会议结合我国实际情况，提出应在金融问题上开展三个层次的研究工作，即：(1)金融经济学中的数学理论与方法研究. 具体内容包括：随机分析、随机控制、非线性分析、数理统计方法及其他现代数学方法研究等. (2)数理金融学中的若干问题研究. 主要包括：公司融资、资产定价、期权与期货、不完全市场和不完全信息情况下的一般均衡理论、非套利理论、金融机构的深化与经济发展的关系、国际市场中的利率与汇率研究等. (3)当前金融领域里几个急需解决的热门问题研究. 诸如利率结构与国债发行、通货膨胀、利率与资产持有之间的关系；中国(境外)外汇储备的管理、投资组合与风险控制、国际资本市场、金融市场对外开放的策略、证券市场中的风险与控制等. 为了促进金融数学的教学与科研，国家自然科学基金设立了“九五”重大项目——“金融数学、金融工程和金融管理”(项目编号 79790130).

首届诺贝尔经济学奖获得者弗里施(Frisch，1933)在《Econometrics》创刊号上曾作如下陈述：研究经济学的定量方法有几个方面，但单独的任何一方面都不应与计量经济学相混淆. 计量经济学决不等同于经济统计，它和所谓的一般经济理论也不同，虽然后者的许多部分都具有明确的定量特征. 计量经济学也不应看作是

数学在经济中应用的同义语. 经验表明，统计学、经济理论和数学对理解现代经济生活的定量关系都是必需的，但其中任何单独一种都是不够的，三者的结合才是强有力的，且正是这三者的结合构成了计量经济学. 金融数学是一门交叉性学科，从研究方法来看，金融数学可以根据弗里施的描述勾画体系：(1)金融理论与数学的结合，即数理金融. 现代金融理论中的大多数正是以数理金融为工具展开阐述的. (2)金融理论与计量经济学的结合，即计量金融学(Financial Econometrics). 坎贝尔(Cambell，1996)指出，与所有的社会科学一样，金融学不可能是基于实验的，因此计量金融对于以描述不确定性过程为核心的金融理论来说扮演着重要的角色. 本书正是根据计量金融和数理金融的分界来构筑框架的.

本书主要内容包括：股价行为的布朗(Brown)运动模型；效用函数与风险态度(序数效用、基数效用、风险态度)；离散金融系统(金融系统中的价格向量、冗余资产与套利、优势组合). 接下来引入现代金融理论的基石，即资产组合问题与资本资产定价模型(典型的资产组合问题、资产组合的性质、均值方差问题、资本资产定价模型的推导)，然后在金融市场根本资产定价的基础上引入衍生资产定价的模型——二叉树模型与布莱克—修斯(Black-Scholes，B-S)模型以及二叉树模型与 B-S 模型的比较.

第六章开始以实证分析为主，具体内容包括：金融市场的数据分析(数据分析、线性趋势预测、成长趋势的预测方法)；金融资产收益率的分布特征(金融资产收益率序列、收益率时间序列)；事件研究法(事件研究法的基本方法、确定正常收益率的模型、异常收益率的测量与分析、事件研究法在公司金融中的应用)；有效市场假设的理论与检验(随机游走假设的三种形式、各类随机游走的检验)；风险价值系统(VAR 产生的背景、VAR 的定义与基本特征、资产组合 VAR 计算中的假设、非对称型金融衍生工具的 VAR 计算、VAR 作为风险度量工具的比较分析)；资产分配策略；投资基

金及资产组合管理的评估技术;证券市场的流动性与微观结构理论.

由于金融数学是一门跨学科课程,所涵盖的内容非常广泛.金融原理在投资学、公司金融等课程中均已包含,本书侧重于介绍统计学和数学在金融理论前沿中的应用,因此有助于非数学类金融理论工作者及硕士生、博士生迅速掌握定量研究方法,同时也有助于数学类专业的学者迅速了解数学理论在金融领域的应用.本书的读者还可以包括:基金经理、资产组合管理人员及其他机构投资者、证券从业人员.书中大多数内容与市场实际相比都有一定的超前性,但顺应了我国超常规发展机构投资者的趋势.相信随着市场投资者结构的改变,书中所介绍的内容将会得到越来越广泛的应用.本书既有作者在给上海交大金融学专业硕士生讲授‘金融数学与分析技术’时的心得,也有作者在参加杨朝军教授领导下的国家自然科学基金课题‘中国证券市场收益与风险的实证研究’和‘中国证券投资基金绩效评估与风险控制’的工作体会.

孙培源博士撰写了第二章到第五章的内容,刘波博士撰写了第九章的部分内容,其余部分由蔡明超撰写.

在撰写的过程中,多次得到杨朝军教授的细心指点.朱国梅女士、郝校军同学在文章的排版过程中花费了大量心血,借此机会向他们深表谢意.范仁梅编辑在本书出版过程中的专业水准和严谨作风令作者十分钦佩.

由于作者的水平和精力有限,书中错误之处在所难免,衷心希望广大读者批评指正,错误责任均由作者承担.

作者

2002 年 4 月

目　　录

第1章 Brown运动与股票价格行为

在概率论中，我们非常关心随机变量的特征值，如均值和方差. 对于随机过程，在每个时刻 t，随机变量 X_t 都有对应的均值 $\mathrm{E}(X_t)=u(t)$ 和方差 $\mathrm{var}[X_t]$，不同时刻有相应的协方差 $\mathrm{E}(X_{t+\Delta t}-u)(X_t-u)$. 因此随机过程的均值和协方差都是关于 t 的函数，称为特征函数. 如果一个时间序列的均值函数 u 与时间无关，协方差函数只与时间间隔有关，则我们称这个序列为平稳时间序列，写成表达式如下：

$$\mathrm{E}(X_t)=u\ (\text{与 } t \text{ 无关}),$$

$$\mathrm{E}(X_{t+k}-u)(X_t-u)=\mathrm{cov}(X_{t+k},X_t)=r_k$$
$$(\text{与 } t \text{ 无关，只与时间间隔 } k \text{ 有关}).$$

在随机过程中，平稳过程是一类很广泛的过程，这里介绍的 Brown 运动通过差分可转化为平稳过程.

在金融市场中我们经常对一系列随机变量感兴趣. 随机过程是指一族随机变量 $\{X(t)\}$，$t\in T$，其中 t 是参数，它属于某个指标集或参数集 T. 当 $T=\{0,1,2,\cdots\}$ 时，称为离散时间序列. 当 $t\in[a,b]$ 时（a，b 可分别取 $-\infty$ 和 $+\infty$），称为连续时间序列. 随机过程是定义在时间参数 $t\in T$ 和空间 $\omega\in\Omega$ 上的. 当给定空间参数 ω_0 而让时间 t 变化时 $X(t,\omega_0)$ 称为随机过程的一个路径或一个实现.

1.1 Brown 运动的定义

英国植物学家 Brown(1827 年)在观察中发现,悬浮在液体中的花粉小颗粒的运动是非常不规则的,这种运动后来称为 Brown 运动. 自 Brown 运动发现以来,这个过程在数理统计、量子力学、生物学以及经济和金融领域得到了大量研究. Einstein(1905 年)应用物理原理证明了 Brown 运动满足的微分方程. Wiener(1918 年)在他的博士论文及以后的一系列论文中得到了 Brown 运动精确的数学公式.

设 $X(t)$表示一个作 Brown 运动的粒子在时刻 t 的位置. X_0 为粒子在时刻 t_0 的位置,即 $X(t_0)=X_0$, $f(X, t \mid X_0)$ 表示在给定 $X(t_0)=X_0$ 的条件下 $X(t+t_0)$ 的条件概率密度,这也是在给定初始条件下,Brown 粒子扩散运动的反映. 我们再假设所给的转移概率是平稳的,即 $f(X, t \mid X_0)$ 不依赖于起始时刻 t_0,因为 $f(X, t \mid X_0)$ 是 X 的密度函数,故

$$f(X, t \mid X_0) \geqslant 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(X, t \mid X_0)\,\mathrm{d}X = 1.$$

当间隔 $[t_0, t_0+t]$ 充分小时,由于 Brown 粒子的运动速度总是有限的,$X(t+t_0)$ 与 X_0 非常接近,即 $\lim\limits_{t\to 0} f(X, t \mid X_0)=0$, $X \neq X_0$.

Einstein 证明了 $f(X, t \mid X_0)$必定满足偏微分方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}.$$

其中 D 是常数,称为扩散系数. 选取 $D=1/2$,我们可以验证满足上述方程的解为

$$f(X, t \mid X_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(X-X_0)^2\right\}.$$

即 X 的条件分布正好服从均值为 X_0. 标准差为 $\sqrt{t}$ 的正态分布.

考虑最简单的一维随机游动,即对象每个单位时间等概率地向左或向右走一个单位(在以后的分析中,我们有时会假设股票的价格服从这样的运动,上涨或下跌某一个幅度). 设对象每隔 Δt 时间等概率地向左或向右走一步,步长为 Δx,在初始时刻处于原点位置,那么若 X_i 表示对象第 i 步时的方向,则 X_i 是随机变量;若第 i 步向右,则记 $X_i = 1$,否则 $X_i = -1$. 再记 $X(t)$ 表示时刻 t 的位置,显然当 $t = \Delta t$ 时,$X(\Delta t) = X_1 \Delta x$. 一般地,有

$$X(t) = \Delta x (X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}). \tag{1.1}$$

在随机游动的假设下 X_i 之间相互独立,若

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = 1/2,$$

则

$$\mathrm{E}(X_i) = 0,\ \mathrm{var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) = 1.$$

由(1.1)式可知 $\mathrm{E}[X(t)] = 0$, $\mathrm{var}[X(t)] = (\Delta x)^2 [t/\Delta t]$.

现在我们考虑 Δx 和 Δt 趋于 0 的情况. 第一种情况是:$\Delta x \propto \Delta t$,即 Δx 与 Δt 以同样的速度趋于 0,再令 $\Delta t \to 0$,则 $\mathrm{E}[X(t)] = 0$, $\mathrm{var}[X(t)] \to 0$,即 $X(t)$ 以概率 1 等于 0. 第二种情况是:$\Delta x \propto \sqrt[3]{\Delta t}$,这样 $\mathrm{var}[X(t)] \to \infty$,这样,在很短的时间内对象可能运动到无穷远处. 这两种情况都与实际不符. 因此,最合理的假设是 $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ 或 $(\Delta x)^2 = c^2 \Delta t$,这时 $\mathrm{var}[X(t)] \to c^2 t$. 由于 X_i 是独立同分布,因此由中心极限定理可知,$X(t)$ 服从正态分布,更进一步地,服从 $N(0, c^2 t)$.

随机过程 $\{X(t): t \geqslant 0\}$ 称为 Brown 运动,如果它满足如下的条件:

(1) $X(0) = 0$ (如果 $X(0)$ 不在原点处,这个条件可以通过平移得到);

(2) 随机过程有平稳独立增量；

(3) 对每个 $t>0$，$X(t)\sim N(0,c^2t)$.

如果 $c=1$，我们称为标准 Brown 运动，对于非标准 Brown 运动，我们可以通过

$$X'(t)=[X(t)-X(0)]/c$$

变换得到.

1.2 Brown 运动的性质与股票价格行为

下面我们研究 Brown 运动的轨道($X(t)$在$[0,t]$上的一个实现过程)性质和联合分布等概率性质.

首先 Brown 运动的几乎每条样本轨道都是连续的. 但 $X(t)$ 的样本轨道不是通常我们见到的函数，而是一个几乎处处不可导的函数，其物理意义是对象在每一瞬间受到净碰撞的方向都是任意的.

下面给出 Brown 运动的一些概率特性.

定理 在给定现在状态 $X(s)$的条件下，过去 $X(\nu)$ $(0\leqslant\nu<s)$ 与将来 $X(s+t)$ $(t>0)$ 独立.

证明

$$\begin{aligned}
&P(X(s+t)\leqslant a\mid X(s)=x,\ X(\nu)=x_\nu,\ 0\leqslant\nu<s)\\
=&P(X(s+t)-X(s)\leqslant a-x\mid X(s)=x,\ X(\nu)=x_\nu,\ 0\leqslant\nu<s)\\
=&P(X(s+t)-X(s)\leqslant a-x\mid X(s)-X(\nu)=x-x_\nu)\\
=&P(X(s+t)-X(s)\leqslant a-x)=P(X(s+t)\leqslant a\mid X(s)=x).
\end{aligned}$$ 证毕.

由 Brown 运动的定义知道，当 $X(0)=0$ 时，$X(t)$ 的密度函数可写成 $f_t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/2t}$. 任给 n 个时刻 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

记 $f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$为 n 个时刻的位置 $X(t_1),\cdots,X(t_n)$的联合分布密度函数. 利用 Brown 运动的平移不变性,我们可以得到 Brown 运动的联合分布密度函数 $f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 的性质.

定理 $f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdot\cdots\cdot f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$.

假定给定 $X(T)=B$, $X(0)=x_0$,求 $X(s)$的条件分布(其中 $s<T$),则 $X(s)$ 的条件密度函数是

$$
\begin{aligned}
f_{s|T}(x\mid B)&=\frac{f_{sT}(x,B)}{f_T(B)}=\frac{f_s(x)f_{T-s}(B-x)}{f_T(B)}\\
&=\frac{\sqrt{2\pi T}}{\sqrt{2\pi s 2\pi(T-s)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}-\frac{(B-x)^2}{2(T-s)}+\frac{B^2}{2T}\right\}\\
&=\sqrt{\frac{T}{2\pi s(T-s)}}\exp\left\{-\frac{T(x-Bs/T)^2}{2s(T-s)}\right\},
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X(s)\mid X(T)=B]=Bs/T,\\
&\mathrm{var}[X(s)\mid X(T)=B]=s(T-s)/T.
\end{aligned}
$$

不难发现,约定 $X(T)=B$ 时 $X(s)$的条件方差 $(s<T)$ 不依赖于 B 的具体位置. 若令 $s/T=\alpha$, $0<\alpha<1$,则给定 $X(T)$时 $X(s)$ 的条件分布是正态的,均值为 $\alpha X(T)$,方差为 $\alpha(1-\alpha)T$.

定义 随机过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 若对一切 $t_1,\cdots,t_n$, $\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$为多元正态分布,则称为 Gauss 过程.

Brown 运动也是一个 Gauss 过程,其均值和协方差函数如下:

当 $s<t$ 时, $\mathrm{E}X(t)=0$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X(s),X(t))&=\mathrm{cov}(X(s),X(s)+X(t)-X(s))\\
&=\mathrm{cov}(X(s),X(s))+\mathrm{cov}(X(s),X(t)-X(s))\\
&=\mathrm{cov}(X(s),X(s))=s;
\end{aligned}
$$

当 $t<s$ 时, $X(s)$和 $X(t)$的协方差为 t,故 $\mathrm{cov}(X(s),X(t))$