曼哈顿岛 =24 美元？

1626 年，荷兰东印度公司从曼哈顿的土著居民手中购买该岛主 权，所用金额为 24 美元。24 美元买一座海岛，现在看来，简直不可想像——太便宜了！

果真如此吗？当年的 24 美元现在价值是多少？

第一章 现值理论及应用

第一节 资金的时间价值

一、资金的时间价值

在投资应用中,人们常说“钱能生钱。”现在的 1 元钱在将来不止 1 元钱，即指资金具有时间价值。

资金的时间价值是指资金随时间推移而发生的增值。

在投资决策中，考察资金的时间价值，正是考察使用该资金进行投资所须放弃的利益，即机会成本。机会成本是所放弃诸方案中盈利最大方案的利润值。例如某资金若投资于某工程，就放弃了将其存入银行或贷给他人的机会。若现有资金 100 万元，银行年利率为 10%，贷给他人年利率为 12%，则从机会成本的角度计算，这笔资金的时间价值应为 12%（或者说 12 万元）。

一笔资金如果不用于投资则不会有资金增值，如资金不存入银行，不购买股票，而只是锁在自己的抽屉里，随着时间的推移，不仅不会增值，或许还要贬值。资金拥有者应当把资金投入到创造增值的活动中去，并有权获得资金时间价值带来的回报。

资金的价值随时间的变化而变化，其原因有如下几种：

①通货膨胀：在通货膨胀情况下，用商品和劳务购买力所表示的货币价值不断下降。

②风险 现在手头的 100 元是确定的，而明天是否仍是 100 元是不确定的，这种不确定性就是风险。风险对于投资者而言，是非常重要的。

③个人消费偏好：不同的人有不同消费习惯（或不同的消费偏好),许多人偏好眼前的消费,而不是将来的消费。

④投资的机会：货币（或资金）正如其他商品一样，也具有价值,如现在得到的 1 万元现金与一年后得到的 1 万元相比,人们都会选择前者,因为现在的 1 万元存在投资的机会，如存入银行，假若年利率为 6% ,则一年后将得到 10600 元。

二、资金增值过程

西方经济学者分析货币的时间价值提出流动偏好说和时间偏好说两种理论，所谓流动偏好说是认为支付利息（代表货币的时间价值）是使用资金的报酬，而时间偏好说则认为利息是补偿时间的损失。

马克思的资金循环理论认为：资金不仅在时间上是连续的，而且在价值上是不断增值的。资金经过一段时间后，由 G 变为 G',

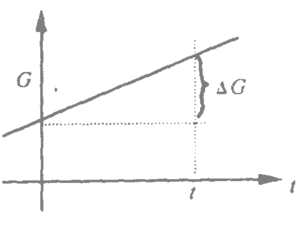

图 1-1　资金的时间价值

两者之间的差值 $G' - G = \Delta G$ 即为货币资金的时间价值。货币资金的时间价值具有三个特点：

(1) 增量 ΔG 的大小是时间的函数，即：$\Delta G = f(t)$，如图 1-1。其中 t 为时间，ΔG 表示资金的增量（货币的时间价值）。

(2) ΔG 可能是正值也可能是负值。正值表示经营有效，负值表示发生亏损。

(3) ΔG 的大小反映出效率的高低。

效率就是单位时间的利用价值 $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)$，效率高表示单位时间内的资金利用价值增大。

第二节　复利与现值理论

一、单利与复利

利息是资金的时间价值的一种表现形式，是使用资金应付出的代价。利率是利息所占本金的百分比，即：

$$利率 = \frac{利息}{本金} \times 100\%$$

商业银行的利率分存款利率与贷款利率。存款利率高，对投资者有利，但是银行因为负债成本高，为了获利，它必须以更高的贷款利率贷出。而企业可能因为利息太高借不起钱，银行获利机会相应减少。因此，过高的银行利率不利于经济的发展。利率是宏观控制信贷的重要手段，中央银行的放款利率若增加（或减少）一个百分点，都会对社会发展产生重大影响。

计算利息的方式有两种：单利与复利。

(1) 单利：仅按本金计算利息，利息本身不再支付利息的计息方式。假定一笔存款本金为 1 000 元，年利率为 10%，期限为 3 年，求 3 年后的本利和为多少。

分析：

3 年后的利息（单利）：$1000 \times 10\% \times 3 = 300$

本金：1000

本利和为：$1000 + 300 = 1300$（元）

即 $1000 \times (1 + 3 \times 10\%) = 1300$。

一般地，设本金为 P，年利率为 r，n 年后的本利和 A 为：$p(1 + nr)$。即单利模型：

$$A = P \cdot (1 + n \cdot r)$$

单利计算方便，但不能反映资金周转的规律与扩大再生产的现实。在国外单利很少使用，一般仅用来与复利进行对比。

(2) 复利：即本金要逐年计息，利息也要逐年生息。它具有重复计利的效应，因此俗称“利滚利”。复利是现值理论中一个非常重要的概念。

二、复利计算

复利的计算方式有许多，下面介绍几种常见情形：

1. 基本公式

一次投资，一次回收，即一次支付复利公式。假定本金为 P，利率为 r，计算 n 年后的本利和 F。

分析：

第一期本利和 $P + Pr = P(1 + r)$

第二期本利和 $P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)^2$

…………

第 n 期本利和：$P(1 + r)^{n-1} + P(1 + r)^{n-1}r = P(1 + r)^n$

复利公式：$F = P(1 + r)^n$

例 1-1 某企业进行技术改造向银行借款 10 万元，年利率 5%，第 2 年年末还清。按复利计算，第 2 年年末需向银行偿还本利共多少？

解 由复利公式 $F = P(1 + r)^n$

$$F = 10(1 + 5\%)^2 = 11.025 \text{（万元）}$$

即第 2 年年末向银行偿还的本利和共 11.025 万元。

例 1-2　曼哈顿问题：

1626 年 24 美元，按 6% 的复利计算，本利和如下表：

表 1-1　　　　单位：美元

年份	价值
1626	24.00
1676	442.08
1726	3143.25
1776	14999.92
1826	2763021.69
1876	50893285.76
1926	937499015.11
1976	17268876484.38

说明 当年 24 美元，350 年后价值近 172.68 亿美元。由此可见，当年的投资，物有所值。

2. 连续复利公式

假定本金为 P、年利率为 r、每满 $1/m$ 年计息一次，按复利计算，求 n 年后的本利和。

分析：一年计 m 次利息，n 年共计息 mn 次，年息为 r，则每次计息为 r/m，按基本复利公式，n 年后的本利和为：

$$P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

又假定 m 无限增大、即在越来越短的时间内将利息计入本金，其极限情况意味着随时将利息计入本金里。则满 n 年后的本利和为：

$$P_n = \lim_{m \to \infty} P(1 + \frac{r}{m})^{mn} = Pe^{nr}$$

以上计算利用了极限基本公式： $\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$, 其中 e 为自然底数。

连续复利公式： $P_n = Pe^{nr}$

公式含义 本金为 P,年利率为 r,利息及时计入本金，n 年后的本利和为 Pe^{nr}。

3.复利计算的查表法

由于按复利公式计算比较麻烦，为方便计，将公式的系数值编成复利表（见附录 1)。当利率为 r,期数为 n时,由 P 求F 的复利系数记为($F/P, r, n$)。查复利表可直接计算复利。

例 1-3　某方案投资 100 万元，投产后的资金收益率为 6%，计算第 5 年年末的本利和。

解：查表法步骤如下：

(1) 列出查表公式：$F = P(F/P, r, n) = 100(F/P, 6\%, 5)$

该式表示为"本金 100万元,年利率为 6%，5 年复利,求本利和。"

(2)从普通复利表中查到 6% 利率的页上，再查(F/P)栏与 $n = 5$ 的交叉格内的数值,得 1.3382。

(3)代入计算：$F = 100 \times 1.3382 = 133.82$（万元）

三、名义利率与实际利率

贷款不仅可以具有固定的年利率，也可以在一年中具有月利率，按月进行复利计算，这样一年就要进行几次复利计算，这种投资过程称为具有复利频率的投资。

特别指出，对于具有复利频率的贷款活动或投资活动，有两种年利率,即名义年利率和实际年利率(有效年利率)。

例 1-4　一张 100 元的信用卡，标明利率为月息 1.5%，由于

利息结算总在年末,所以用 12 乘以 $1.5\% = 18\%$，称为名义年利率 r，这并不是实际结算的利率，因为在这 1 年中 12 个月是按复利计算的。

假如这张信用卡在 1 年内没有花过,那么在年末结算时,按复利计算应当支付：

$$F = 100 \times (1 + 0.015)^{12} = 119.56(\text{元})$$

总利息为 19.56 元,即年利率为 19.56% ,高于 18% 的名义利率。

一般来说,若求复利的频率 m(上例为 12) 以及名义年利率 r 为已知，则实际年利率 i 由下式决定：

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = 1 + i$$

故

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

上式说明名义利率与实际利率之间的关系。

如名义年利率为 8% ，每半年复利一次($m = 2$) ,则实际年利率为：$i = (1 + 0.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\%$ 。

一般实际年利率均大于名义年利率。

四、现值理论

现值理论讨论资金的现在价值、终值及折现，它是价格理论的基础。

现值 —— 未来的货币收入的现在价值，或未来的某一时刻的货币资金按某种利率折算到现在的值。

终值 —— 将来值,或称期望值。在现在时刻看,发生在未来某时刻一次支付（或收入）的货币资金。

现值公式 —— 将终值按一定利率折算成现值的表达式。

设 P 表示本金(现值),利率为 r, n 年后的本利和(终值)记为

等额偿还，每期应偿还多少？

分析：考虑资金的时间价值，不能简单地平均处理。应考虑偿还数值的折现。一般以一个月为一期，月末偿还，年息为 r，月息 $i = r/12$，设每期偿还 A 元，则 n 期还款折现为现在价值的总和应等于贷款总额（不考虑手续费及中间交易税等项）。

由现值公式可知：

第一期还款 A 的折现值为 $\frac{A}{1+i}$

第二期还款 A 的折现值为 $\frac{A}{(1+i)^2}$

第 n 期还款 A 的折现值为 $\frac{A}{(1+i)^n}$

所以
$$P = \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} = \frac{A}{i}\left[1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]$$

故
$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

上述公式即银行按揭的数学模型，又称资金还原公式（已知 P 求 A）。$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ 称为资金还原系数，常用$(A/P, i, n)$表示，可查复利表计算。

例 1-6　某人贷款金额为 20 万元，年利息为 6%，计划办理 5 年银行按揭，每个月月末应向银行存款多少钱？

解 已知 $P = 200000$ 元，$i = 6\%/12 = 0.5\%$，$n = 5 \times 12 = 60$（月）。

由银行按揭数学模型可知，每月偿还数额 A 为：

$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = P(A/P, i, n)$$

$$= 200000(A/P, 0.5\%, 60)$$
$$= 200000 \times 0.01934 = 3868(元)$$

按 5 年银行按揭方式，每月月末应还贷款 3868 元。

上例中：

①客户 5 年实际还款总数为 $3868 \times 60 = 232080$（元）。差额即所付利息总额：$232080 - 200000 = 32080$（元），即 5 年累计付息 32080 元。

②按揭时间越长，每个月偿还数量越少，减轻客户的偿还压力，但按揭时间越长，付出的利息越高。

③上述模型中，没有考虑年息的变化，即假定年利率是不变的。实际生活中，银行的利率随着经济情况经常变化（降息或加息），相应的每月偿还资金随利率作一些调整。

④大型商品的分期付款方式，类似于银行按揭。

第四节　　证券价格的评估模型

“天下熙熙，皆为利来 天下攘攘，皆为利往。”

——司马迁《史记·货殖列传》

投资可以获利。人们之所以愿意购买证券，是因为它能够带来预期收入（差价与利息）。证券一般常指股票、债券等有价证券。证券的价格受多种因素的影响，如政治、经济、心理等，但决定性因素是股息（债息）及银行利率。而证券的价格也有许多形式，大体可分为 理论价格与市场价格。理论价格，又称内在价值。在理性市场中，市场价格总是围绕内在价值上下波动。

人们持有股票，是为了从中获取收益。从理论上说，股票的价格可以看作是股票投资者对未来各期每股预期收益的现值之和，是一种适当利率的贴现。

设第 t 期每股预期股息收入为 D_t,贴现率为 r(或股东要求的实际收益率),n 期后股票的理论价格记为 W,则:

$$W = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_n}{(1+r)^n}$$

设 $t-1$ 时刻的股利为 D_{t-1},t 时刻的股利为 D_t,从 $t-1$ 到 t 时间内,股利增长 $\Delta D = D_t - D_{t-1}$,股利增长率 g_t 为:

$$g_t = \frac{D_t - D_{t-1}}{D_{t-1}}$$

一、零成长模型

假定未来各期预期股息不增长（或增长率为 0),即各期股息固定为 D,或 $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = D$,则:

$$W = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D}{(1+r)^n} + \cdots$$

前 n 项的和为:

$$W_n = \frac{D}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right]$$

当投资者持有期很长时，即 $n \to \infty$,有

$$W = \frac{D}{r}$$

上述公式即零成长模型。

当贴现率 r 为银行利率时，上述公式变为:

$$\text{股票价格} = \frac{\text{股息}}{\text{银行利率}}$$

上述公式具有非常重要的意义：它表明股价与股息成正比，与银行利息成反比。它反映降息促使股价上扬这种股市现象。

假如 A 公司每年派发现金股利 2 元,贴现率为 10% ,用零成长模型公式可计算出该公司股票价格（内在价值）为 $2/0.10 = 20$ 元。若该股票市场价格是 18 元,则该股票被估价过低,仍有投资价

值。

二、固定成长模型

假设股利以恒定的增长率 g增长，设第一年股利为 D ,则第二年股利为 $D(1+g)$,第三年股利为 $D(1+g)^2$……

股票的价格 W 则为各期股利的折现之和，即：

$$W = \frac{D}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n} + \cdots$$

$$= \frac{D}{r-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \cdots$$

（若 $g > r$,当 $n \to \infty, W \to \infty$ 。这不大可能。）

在永久持有股票且 $g < r$ 时,上式可简化为

$$W_{g<r} = \frac{D}{r-g}$$

将上式与零成长模型比较：

$$\Delta W = \frac{D}{r-g} - \frac{D}{r} = \frac{gD}{r(r-g)} > 0$$

这就是前景看好、增长潜力较大的公司股票市价较高的理论依据。ΔW 被称为增长机会现值（Present Valule of Growth Oportunities, PVGO）,根据 PVGO 的值可将股票分为三种：

$$\text{PVGO}\begin{cases} > 0 & \text{增长型股票，} g > 0 \\ = 0 & \text{稳定型股票，} g = 0 \\ < 0 & \text{负增长型股票，} g < 0 \end{cases}$$

可见，股利恒定增长评估模型也适用股利恒定减少的情况，此时 $g < 0$。

零成长模型实际上是固定成长模型的一个特例。当固定成长率为零时，固定成长模型变为零成长模型。

三、三阶段模型

股利长期不变，或永久以固定增长率增长模型都是不现实的。任何公司的发展都是阶段性的，很多公司在起步阶段发展快，经过一段时间调整，才进入稳定的发展阶段。为此，我们设想股利变化经过三个阶段。这种模型也许更接近现实。

第一阶段：股利以固定比率 g_0 增长,持续 k 年；

第二阶段 从 $k+1$ 到 n 年，经历一个转换时期，在这一时期，股利增长率以直线形状变化；

第三阶段：进入持续稳定状态，股利以新的比率 g_n 恒定增长。如图 1-2。

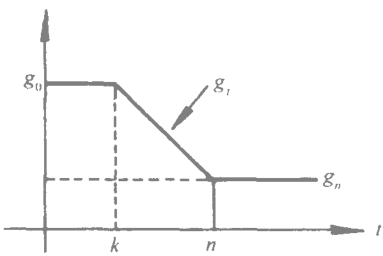

图 1-2　三阶段模型

第二阶段中增长率由直线方程决定：

$$g_t = g_0 - (g_0 - g_n)\frac{t-k}{n-k}$$

当 $t=n$ 时，正是过渡期的末尾。由直线方程可知，给定 g_0，k，n 及 g_n 和最近一年的股利 D_0，就可以计算出任何将来时间的股利，然后再给定一个合适的折现率，可以计算出预期股利的现在价值 。

其股票价格可由下式估计得到：

$$W = D_0\sum_{t=1}^{k}(\frac{1+g_0}{1+r})^t + \sum_{t=k+1}^{n}(\frac{D_{t-1}(1+g_t)}{(1+r)^t}) + \frac{D_{n+1}}{(1+r)^n(r-g_n)}$$

其中 D_0 为最近一年的股利，$D_{n+1} = D_n(1+g_n)$为第 $n+1$年的股利。

例 1-7　某种股票股利在最近两年内将以 6% 的比率增长，而在之后的 3 年中增长率以每年递减 1% 的速度减至 3% ,并保持不变。经估计，适当的折现率为 8% 。假定股票前一年的股利为 1 元，计算每一年的增长率与股利估计，并求出预期股利的现在价值。

解 对于每一年的增长率与股利估计,结果如表 1-2 所示。

表 1-2　股利增长变动资料

年份		增长率(%)	股利
一阶段	1	6	$1 \times 1.06 = 1.06$
	2	6	$1.06 \times 1.06 = 1.124$
二阶段	3	5	$1.124 \times 1.05 = 1.18$
	4	4	$1.18 \times 1.04 = 1.227$
	5	3	$1.227 \times 1.03 = 1.264$
三阶段	6	3	$1.264 \times 1.03 = 1.302$

预期股利的现在价值（即股价）为：

$$W = \frac{1.06}{1.08} + \cdots + \frac{1.264}{(1.08)^5} + \frac{1.302}{(1.08)^5(0.08-0.03)} = 22.36$$

三阶段股利折扣模型的最后一部分，实际上是固定成长模型，即前两阶段退化(不存在,或 $n=0$)时,三阶段模型变为固定成长模型。

三阶段模型计算比较麻烦，且无法利用模型直接求折现率，为此，有人已提出了改进模型如 H 模型,P/E 模型等,限于篇幅,其他情况略。

四、债券价 格的评估模型

债券价格的评估与股票相似，也以其收益的现值作为该种债券的评估价。债券价格的评估根据付息方式不同有两种情况。

1.每年支付利息到期还本的债券

记 PV 为债券的价格，C 为年利息收入，D 为债券面值，n 为债券尚存的偿还期，r_i 为各年的贴现率。则：

$$PV = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r_n)^n} + \frac{D}{(1+r_n)^n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{D}{(1+r_n)^n}$$

若将各年的贴现率近似地用一个平均的贴现率 r 代替，则上式可简化为：

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{D}{(1+r)^n} = C\,\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{D}{(1+r)^n}$$

2．到期一次还本付息的债券

这类债券的评估模型比较简单，如下式所示：

$$PV = \frac{nC + D}{(1+r)^n}$$

由于债券的面值、期限、发行利率在发行时已经确定，债券价格的高低完全由贴现率决定。如果银行利率上调，贴现率增大，债券的价格就会下跌，甚至跌破面值 相反，贴现率下降，债券价格上升。

本章小结

本章的基础是复利公式和现值公式。它们是金融领域中最基本的数学模型，由此可推出许多有意义的金融数学模型。

复利计算常用复利系数表查表计算。关于复利计算，重点介绍两种情况：简单复利与连续复利。复利公式还有许多其他形式，如定差序列和几何序列的复利计算等，但它们均可转化为基本复利公式进行计算。(参见贾春霖的《技术经济学》[2])

银行按揭的数学模型的实质是一个贴现公式，又称资金还原公式，它在市场经济社会中应用很广。

关于证券价格的评估模型，重点介绍股票价格的几种常见模型：零成长模型、固定成长模型及三阶段模型。其他一些模型如留利固定模型、P/E模型等都非常有意义。限于篇幅，只得舍去。(参见刘婵的《投资学》[27])

二叉树模型是确定金融产品价格的一种典型模型，将在以后的章节(第七章、第九章)中介绍。

第二章　收益与风险

"世界上没有免费的午餐。"

——华尔街名言

金融市场的基本职能不仅在于分配资金，而且也分散风险。收益和风险是投资学中的中心问题，其他问题都围绕这个中心而展开。本章主要介绍投资收益与风险的概念及测定方法。

第一节　收益与收益率

一、收益与收益率

投资者进行投资的目的是获取一定的收益。

收益(报酬，return)，即收入或资本的增益。

收益率（报酬率）：收益总额占投资总额的百分比。

$$收益率=\frac{总收益}{投资总额}\times 100\%$$

收益率的计算方法因投资期间的不同而不同。投入的本金在现在，而将得到的收益发生在未来，这便涉及到货币的时间价值及现值理论。下面以股票为例，说明证券投资的收益率。

1.单期收益率

单期收益率是指某一期间股票价值变动额加上当期股利收入与买入价格的比率。它可以衡量投资者财富增加或减少的速度。

证券投资的收益有两种：买卖差价与息（现金股利或债息）。