

# The Mathematics of Finance

Modeling and Hedging

# 金融数学

(美) Joseph Stampfli 著  
Victor Goodman

蔡明超 译



The  
Mathematics  
of  
Finance

Modeling and Hedging

金 融 数 学

(美) Joseph Stampfli 著  
Victor Goodman

蔡明超 译



本书主要讲解建模和对冲中使用的金融概念和数学模型。从金融方面的相关概念、术语和策略开始，逐步讨论了其中的离散模型和计算方法、以 Black-Scholes 公式为中心的连续模型和解析方法，以及金融市场的风险分析及对冲策略等方面的内容。

本书作为金融数学的基础教材，适用于相关专业的本科生和研究生课程。

Joseph Stampfli and Victor Goodman

The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging

ISBN: 0-534-37776-9

Copyright © 2001 by Brooks/Cole, a division of Thomson Learning

Original language published by Thomson Learning (a division of Thomson Learning Asia Pte Ltd). All rights reserved. 本书原版由汤姆森学习出版集团出版。版权所有，盗印必究。

China Machine Press is authorized by Thomson Learning to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体字翻译版由汤姆森学习出版集团授权机械工业出版社独家出版发行。此版本仅限在中华人民共和国境内（不包括中国香港、澳门特别行政区及中国台湾）销售。未经授权的本书出口将被视为违反版权法的行为。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

981-254-401-1

**本书版权登记号：图字：01-2003-6969**

### 图书在版编目 (CIP) 数据

金融数学 / (美) 斯塔夫里 (Stampfli, J.), (美) 古德曼 (Goodman, V.) 著; 蔡明超译. —北京: 机械工业出版社, 2004. 3

(华章数学译丛)

书名原文: The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging

ISBN 7-111-13816-3

I. 金… II. ①斯…②古…③蔡… III. ①金融—经济数学—高等学校—教材②金融—经济数学—研究生—教材 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 003159 号

机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 蒋 祎

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·15 印张

印数: 0 001~4000 册

定价: 26.00 元

凡购本书, 如有倒页、脱页、缺页, 由本社发行部调换

本社购书热线: (010) 68326294

谨以此书怀念 Harrison “Harry” Roth  
(1932—1997)

——Joseph Stampfli

他一生善良，交织在他身上的各种美德，  
可以使造物主肃然起敬，并向全世界宣告：  
“这是一个男子汉！”

献给我深爱的盖尔

——Victor Goodman

# 译者序

金融数学是指采用高等数学的方法研究金融资产及其衍生资产定价、复杂投资技术与公司金融政策的一门交叉科学。21世纪中国经济与金融领域研究的一个重大转变，就是数量方法的研究被越来越广泛地应用，这也已经成为一个共识。数量方法在金融中的大量应用使得数学与金融的联系变得密不可分，由此产生了金融数学这门交叉学科。研究方式的转变也带来了教学方式的变革，我国高校金融学科普遍加强了数量方法类课程的设置，金融数学往往是被优先考虑的课程。同时我国很多综合性大学的数学系也纷纷增设金融数学专业。

金融数学在我国的发展不仅是我国开展金融理论研究的需求，在实践方面，我国工商企业以及居民的投资、避险要求也进一步推动了金融数学学科的发展。早在1997年中国银行首先获准开办企业经常项目下的远期外汇结售汇业务，2002年和2003年又分别面向居民推出了“外汇两得宝”业务和“外汇期权宝”业务，其实质分别是外汇卖出期权和买入期权。2000年中国工商银行外汇衍生产品的业务量只有5亿美元，2001年有13亿美元，2002年达到了23亿美元，2003年头四个月就达到了26亿美元。这些统计数据表明，金融衍生产品在我国有巨大的发展空间。要想灵活运用金融衍生产品帮助企业 and 居民进行投资或者规避风险，必须从理论上掌握这些产品的定价方法。金融数学正是连接数学与金融定价模型及其他金融问题的一座桥梁。

金融与数学的交叉使得金融数学与金融工程等学科的界限不能完全确定，金融数学的范畴也没有统一的界定，译者在拙著《金融数学与分析技术》中提出，依研究方法，金融数学包括两个分支：规范金融数学和实证金融数学。规范金融数学强调运用高等数学、最优化、概率论、微分方程等知识对金融原理进行推导，比如第一次华尔街革命即资产组合问题与资本资产定价模型和第二次华尔街革命即期权定价公式；而实证金融数学强调运用统计学、计量经济学、时间序列分析等知识对金融原理进行假设检验，并得出一些经验性结论，比如资产定价模型的检验、行为金融学的检验等等。

Joseph Stampfli 和 Victor Goodman 撰写的《金融数学》是一本以规范金融数学为主的书，集中介绍了衍生产品定价模型的推导，本书的特点表现在以下几个方面：

第一，对读者数学知识的要求定位合理。不管是从美国还是从国内来看，金融数学专业大多数设置在数学系，因此许多金融数学教材对数学知识的起点定位太高，而更大的读者群应该是大学经济管理学院的师生，他们的基础是大学公共高等数学知识，因此很多金融数学教材难以读懂。本书的最大特点就是以大学公

共高等数学的知识为起点展开对模型的推导和应用，特别适合于非数学类学生学习和应用。

第二，金融模型的应用建立在通用软件的基础上。本书部分章节集中介绍了如何采用软件来对金融模型进行应用分析，比如模拟股票价格游走的路径，并得到期权定价结果。该书采用的计算机方法主要以读者能够接受的 Excel 表单为界面，使得读者在通过计算机深入掌握金融理论的同时，不必专门学习一门计算机语言，从而降低了学习难度。

第三，丰富的案例分析。为了让读者能够掌握金融期货期权理论的具体运用，作者在每章都安排了相当数量的实例展开分析，并且配以图表。同时为了检验读者是否真正掌握了书中知识，每章都配有一定量的习题，部分附有答案。

第四，内容精简且重点突出。正如前面所言，金融数学的内容很广，一些教材往往希望面面俱到，总希望读者读完后能够掌握所有的金融数学方法。但金融数学的复杂性使得这些想法不可能成为现实，洋洋洒洒也会带来读者学习的心理压力。该书集中讲述普通衍生期权定价的方法，并以这些方法为线索进行展开和深入，因此读者学完后能够在这一领域做到运用自如，而不是多而不精。

在翻译过程中，译者力求忠实于原文，同时也兼顾中文表达的流畅。书中首次出现的术语在书后都有中英文对照。尽管译者多年从事研究生和本科生金融数学的教学工作，但译文中仍可能有不当之处。欢迎读者予以指正。李凯、樊炆参加了本书的翻译工作，杨艳、胡瑶、王洁也参与了本书部分章节的初稿翻译。但所有错误之处，均由译者本人承担。

在翻译过程中，机械工业出版社华章分社的蒋祎先生给予了细心帮助，在此表示谢意。

蔡明超

2004年1月于上海交通大学安泰管理学院

# 前 言

20 世纪 90 年代以来，数学、金融、计算机及全球经济呈现融合趋势。货币市场每天的交易量达到 2 万亿美元，诸如期权、互换、交叉货币证券等复杂金融工具的交易非常普遍。

可以讲，自 1973 年 Black-Scholes 公式出现以来，金融界被大量丰富的数学工具和模型所包围。高校开设的金融数学类课程受到普遍欢迎。这当然与利润的驱使以及巨大的就业前景有关。可以预见，21 世纪金融数学领域将如 Kurzweil 加速回报定律所描述的那样增长更为迅速。从业人士们也开始运用金融数学的思考模式来对大量的市场交易活动进行应用分析。

这本教材解释了模型与套利中的金融和数学的基本概念。每个主题在展开时并不要求读者熟知金融市场或者证券市场的常识。在练习与例题中会对这些内容加以说明，并且经常会采用实际的市场数据。

## 教师需知

完整的本科生层次的教学内容应包括：第 2、3、5、6、7、8、9 章。教师可以简要地介绍第 1 章，作为介绍金融术语和证券交易中策略的导论；也可以在讲课过程中需要时再回到第 1 章，这一章非常便于学生了解市场交易中的知识。

大多数本科生能够熟练运用计算机，对于 Maple、Mathematica 和 Microsoft Excel 的各种命令也很熟悉。老师们应该充分发挥学生在该领域的才能。比如我们发现在印第安那大学校园，学生们随时都可以采用 Excel 软件来准备数据，并完成答案。

## 致谢

我们非常感谢国家科学基金 (National Science Foundation) 为本书提供了很多资料，特别要感谢国家自然科学基金的主要评审员 Dan Maki 和 Bart Ng，他们用“数学贯穿于课程之中”来激励我们写作，并在全书的创作过程中一直给予包括经济方面的帮助。我们还要感谢本书的评阅人：伊利诺斯大学的 Rich Sowers，La Grange 学院的 William Yin 和匹兹堡大学的 John Chadam。

1999 年 11 月在马黑德尔 (Mahidol) 大学的资助下，Joseph Stamofli 在泰国曼谷就金融数学专题面向一个工作小组做了几场演讲。非常感谢马黑德尔大学以及 Yongwemon 教授和时任系主任及现任校长 Ponchai Matangkasombut，他们细致热忱的接待使得那一次学术活动令人十分难忘。

我们也要感谢在 Brooks/Cole 工作的编辑和出版人员持之以恒并且及时的帮

助。特别是 Gary Ostedt 和 Carol Benedict 做了他们能做的一切甚至更多。本书呈现在读者面前之前，遇到了好几次预料之外的麻烦，Gary 用她的细心、聪明和幽默帮我们将这些问题化解了。我们还要感谢在 Brooks/Cole 团队的其他成员：出版协调员 Mary Vezilich、市场经理 Karin Sandberg、编辑 Sue Ewing 和市场联络 Samantha Cabaluna。我们还想感谢出版服务公司的 Kris Engberg，他帮助我们解决了大大小小许多问题。文稿编辑 Jerome Colburn 的润色使本书顿时熠熠生辉。一并致谢的还有 Jason Brown 和他的出版团队。

Victor Goodman 要感谢 Devrai Basu 在书稿早期的输入工作。此外，Joseph Stamofli 要感谢印第安那大学经济系的研究生 Jeff Gerlach，第 11 章的内容应主要归功于他，此外他还完成了本书中的大部分练习。

### 作者联系方式

希望读者能就本书的错误及建议与我们进行联系，E-mail 是最好的方式，我们的地址是：

goodmanv@indiana. edu

stampfli@indiana. edu

本书的网址是 <http://www.indiana.edu/~iubmtc/mathfinance>

Victor Goodman

Joseph Stampfli

# 目 录

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 译者序                                |    |
| 前言                                 |    |
| 第 1 章 金融市场                         | 1  |
| 1.1 金融市场与数学                        | 1  |
| 1.2 股票及其衍生产品                       | 2  |
| 1.2.1 股票的远期合约                      | 2  |
| 1.2.2 看涨期权                         | 6  |
| 1.2.3 看跌期权                         | 8  |
| 1.2.4 卖空                           | 10 |
| 1.3 期货合同约定价                        | 10 |
| 1.4 债券市场                           | 13 |
| 1.4.1 收益率                          | 14 |
| 1.4.2 美国债券市场                       | 15 |
| 1.4.3 利率和远期利率                      | 16 |
| 1.4.4 收益率曲线                        | 16 |
| 1.5 利率期货                           | 17 |
| 1.5.1 期货价格的决定                      | 18 |
| 1.5.2 短期国库券期货                      | 18 |
| 1.6 外汇                             | 19 |
| 1.6.1 货币套期保值                       | 19 |
| 1.6.2 计算货币期货价格                     | 20 |
| 第 2 章 二叉树、资产组合复制<br>和套利            | 23 |
| 2.1 衍生产品定价的三种方法                    | 23 |
| 2.2 博弈论方法                          | 24 |
| 2.2.1 约减随机项                        | 24 |
| 2.2.2 期权定价                         | 24 |
| 2.2.3 套利                           | 25 |
| 2.2.4 博弈论方法——一般公式                  | 25 |
| 2.3 资产组合复制                         | 27 |
| 2.3.1 背景                           | 27 |
| 2.3.2 资产组合匹配                       | 27 |
| 2.3.3 期望价值定价方法                     | 29 |
| 2.3.4 如何记忆用来定价的概率                  | 29 |
| 2.4 概率方法                           | 31 |
| 2.5 风险                             | 33 |
| 2.6 多期二叉树和套利                       | 35 |
| 2.7 附录: 套利方法的局限性                   | 37 |
| 第 3 章 股票与期权的二叉树<br>模型              | 41 |
| 3.1 股票价格模型                         | 41 |
| 3.1.1 二叉树图的重新安排                    | 42 |
| 3.1.2 连锁法和期望值                      | 43 |
| 3.2 用二叉树模型进行看涨<br>期权定价             | 46 |
| 3.3 美式期权定价                         | 49 |
| 3.4 一类奇异期权——敲出期权的<br>定价            | 52 |
| 3.5 奇异期权——回望期权定价                   | 56 |
| 3.6 实证数据下二叉树模型分析                   | 58 |
| 3.7 $N$ 期二叉树模型的定价和<br>对冲风险         | 63 |
| 第 4 章 用表单计算股票和期权的<br>价格二叉树         | 67 |
| 4.1 表单的基本概念                        | 67 |
| 4.2 计算欧式期权二叉树                      | 70 |
| 4.3 计算美式期权价格二叉树                    | 72 |
| 4.4 计算障碍期权二叉树                      | 73 |
| 4.5 计算 $N$ 期二叉树                    | 74 |
| 第 5 章 连续时间模型和 Black-<br>Scholes 公式 | 75 |
| 5.1 连续时间股票模型                       | 75 |
| 5.2 离散模型                           | 75 |
| 5.3 连续模型的分析                        | 80 |
| 5.4 Black-Scholes 公式               | 82 |
| 5.5 Black-Scholes 公式的推导            | 84 |
| 5.5.1 修正的模型                        | 84 |
| 5.5.2 期望值                          | 86 |
| 5.5.3 两个积分                         | 86 |
| 5.5.4 推导总结                         | 87 |

|   |     |  |     |
|---|-----|--|-----|
| 5.6 看涨期权与看跌期权平价 .....                           | 88  | 7.3.2 波动率微笑 .....  | 117 |
| 5.7 二叉树模型和连续时间模型 .....                          | 89  | 7.4 参数 $\Delta$ 、 $\Gamma$ 和 $\Theta$ .....              | 118 |
| 5.7.1 二项式分布 .....                               | 89  | 7.4.1 参数 $\Gamma$ 的意义 .....                              | 119 |
| 5.7.2 多期二叉树的近似 .....                            | 91  | 7.4.2 参数 $\Delta$ 、 $\Gamma$ 和 $\Theta$ 的进一步<br>分析 ..... | 120 |
| 5.7.3 符合几何布朗运动的二叉树<br>构造 .....                  | 93  | 7.5 德尔塔对冲法则的推导 .....                                     | 121 |
| 5.8 几何布朗运动股价模型应用的<br>注意事项 .....                 | 94  | 7.6 购买股票后的德尔塔对冲 .....                                    | 122 |
| 5.9 附录: 布朗运动路径的构造 .....                         | 96  | 第8章 债券模型和利率期权 .....                                      | 125 |
| 第6章 Black-Scholes 模型的解析<br>方法 .....             | 99  | 8.1 利率和远期利率 .....  | 125 |
| 6.1 微分方程推导的思路 .....                             | 99  | 8.1.1 市场规模 .....   | 125 |
| 6.2 $V(S, t)$ 的扩展 .....                         | 99  | 8.1.2 收益率曲线 .....  | 125 |
| 6.3 $V(S, t)$ 的扩展与简化 .....                      | 100 | 8.1.3 如何确定收益率曲线 .....                                    | 126 |
| 6.4 投资组合的构造方法 .....                             | 101 | 8.1.4 远期利率 .....   | 126 |
| 6.5 Black-Scholes 微分方程求解<br>方法 .....            | 103 | 8.2 零息券 .....  | 127 |
| 6.5.1 现金 0-1 期权 .....                           | 103 | 8.2.1 远期利率和零息券 .....                                     | 128 |
| 6.5.2 股票 0-1 期权 .....                           | 104 | 8.2.2 基于 $Y(t)$ 或 $P(t)$ 的<br>计算 .....                   | 129 |
| 6.5.3 欧式看涨期权 .....                              | 105 | 8.3 互换 .....   | 131 |
| 6.6 期货期权 .....                                  | 105 | 8.3.1 简单的互换方法 .....                                      | 134 |
| 6.6.1 期货合约的看涨期权 .....                           | 106 | 8.3.2 互换的实际情形 .....                                      | 135 |
| 6.6.2 期货期权的偏微分方程 .....                          | 107 | 8.3.3 债券价格模型 .....                                       | 136 |
| 6.7 附录: 资产组合的微分 .....                           | 108 | 8.3.4 套利 .....   | 137 |
| 第7章 对冲 .....                                    | 111 | 8.4 互换的定价与对冲 .....                                       | 139 |
| 7.1 德尔塔对冲 .....                                 | 111 | 8.4.1 算术利率 .....   | 140 |
| 7.1.1 对冲、动态规划与理想条件下<br>Black-Scholes 运作机制 ..... | 112 | 8.4.2 几何利率 .....   | 142 |
| 7.1.2 Black-Scholes 模型与现实<br>世界的差距 .....        | 113 | 8.5 利率模型 .....   | 144 |
| 7.1.3 早期的德尔塔对冲 .....                            | 113 | 8.5.1 离散利率模型 .....                                       | 145 |
| 7.2 股票或资产组合的对冲方法 .....                          | 115 | 8.5.2 用利率模型为零息券<br>定价 .....                              | 149 |
| 7.2.1 采用看跌期权对冲 .....                            | 115 | 8.5.3 债券价格悖论 .....                                       | 152 |
| 7.2.2 采用双限对冲 .....                              | 115 | 8.5.4 期望值定价法能套利吗 .....                                   | 153 |
| 7.2.3 采用成对交易对冲 .....                            | 115 | 8.5.5 连续时间模型 .....                                       | 158 |
| 7.2.4 基于相关关系的对冲 .....                           | 115 | 8.5.6 债券价格模型 .....                                       | 158 |
| 7.2.5 现实中的对冲 .....                              | 116 | 8.5.7 一个简单的例子 .....                                      | 160 |
| 7.3 隐含波动率 .....                                 | 116 | 8.5.8 Vasicek 模型 .....                                   | 165 |
| 7.3.1 采用 Maple 软件计算<br>波动率 $\sigma_1$ .....     | 116 | 8.6 债券动态价格 .....   | 166 |
|   |     | 8.7 债券价格公式 .....   | 168 |
|   |     | 8.8 债券价格、即期利率和 HJM<br>模型 .....                           | 169 |
|   |     | 8.9 HJM 之谜的推导 .....                                      | 172 |

|                                       |     |   |     |
|---------------------------------------|-----|---|-----|
| 8.10 附录: 远期利率漂移 .....                 | 174 | 10.5 是否套期保值与套期保值<br>数量的决定 .....           | 203 |
| 第9章 债券价格计算方法 .....                    | 177 | 第11章 国际政治风险分析 .....                       | 205 |
| 9.1 债券价格的二叉树模型 .....                  | 177 | 11.1 介绍 .....                             | 205 |
| 9.1.1 公平游戏与不公平游戏 .....                | 177 | 11.2 国际风险的种类 .....                        | 205 |
| 9.1.2 Ho-Lee 模型 .....                 | 179 | 11.2.1 政治风险 .....                         | 206 |
| 9.2 二项式的 Vasicek 模型: 均值<br>反转模型 ..... | 187 | 11.2.2 国际风险管理 .....                       | 206 |
| 9.2.1 基本例子 .....                      | 187 | 11.2.3 分散化 .....                          | 206 |
| 9.2.2 一般推导步骤 .....                    | 189 | 11.2.4 政治风险保险与出口信用<br>保险 .....            | 207 |
| 第10章 货币市场和外汇风险 .....                  | 193 | 11.3 信用衍生产品与政治风险<br>管理 .....              | 208 |
| 10.1 交易机制 .....                       | 193 | 11.3.1 外汇及其衍生产品 .....                     | 208 |
| 10.2 远期货币: 利率平价 .....                 | 194 | 11.3.2 信用违约风险及其衍生<br>产品 .....             | 208 |
| 10.3 外汇期权 .....                       | 196 | 11.4 国际政治风险的定价 .....                      | 210 |
| 10.3.1 Garman-Kohlhagen<br>公式 .....   | 196 | 11.5 决定风险溢价的两个模型 .....                    | 212 |
| 10.3.2 看跌看涨货币期权平价<br>公式 .....         | 198 | 11.5.1 风险债务定价的 Black-<br>Scholes 方法 ..... | 212 |
| 10.4 保证汇率 (GER) 和交叉货币<br>证券 .....     | 199 | 11.5.2 风险债务定价的其他<br>方法 .....              | 215 |
| 10.4.1 债券套期保值 .....                   | 200 | 11.6 一个 JLT 模型的假想例子 .....                 | 219 |
| 10.4.2 股票的远期保证汇率<br>(GER) 定价 .....    | 200 | 习题选解 .....                                | 221 |
| 10.4.3 保证汇率的看跌看涨<br>期权的定价 .....       | 203 | 索引 .....                                  | 225 |

# 第1章 金融市场

如果你能洞穿时间的种子，并且知道那一粒会发芽，那一粒不会，那么请告诉我吧！

——莎士比亚，《麦克白》，第一场，第二幕

注意 本章的目的是介绍一些术语，其中包括一些必须要掌握的概念、思想和定义。我们并不建议把本章作为一个单元通读，你可以根据需要有选择地阅读本章内容。

## 1.1 金融市场与数学

几乎人人都听说过纽约、伦敦和东京证券交易所。这些市场的交易活动经常成为报纸的头版，并且在晚间新闻的专题节目中播报。此外还有许多其他金融市场，每一个市场的特点取决于交易的金融资产的种类。

本书将要讨论的最重要的市场包括股票市场、债券市场、货币市场以及期货和期权市场。这些金融术语稍后解释。但是，首先必须注意的是，在某一市场交换或交易的每一品种必定是以下两种类型中的一种。

交易品种可以是基本资产(basic equity)，例如，股票、债券或一种货币。交易品种也可以是价格可从其他基本资产的价格间接衍生出的资产。此时，该交易品种的资产即为金融衍生产品，它所涉及的资产则称为标的资产。

本章包含很多金融衍生产品的例子。为了使读者弄清衍生产品的概念，每个例子都会给出透彻的解释。我们的例子将会是基于股票、债券和货币的期权。同时，我们也会谈及期货和基于期货的期权。

1

当我们试图把衍生产品的价格和标的资产的价格联系起来的时候，数学是能够表达这些关系的最严密的方法。基于数学的证明能对于这些价值做出相当精确的估计。

本书的主要目的就是解释根据标的资产的价格计算衍生产品价格的过程。

我们也希望向读者提供完成这一过程的数学工具和技巧。通过对这一过程的认识，你将了解如何使用这些衍生产品，并且理解设计和交易金融资产过程中所伴随的风险。这些关于衍生产品交易的认识也将提供给你现代资本市场如何运作的更多知识。

本书里的数学知识将强调过去二十多年中金融业衍生产品交易发展的道路上，具有举足轻重影响的两大金融概念。

我们将强调的第一个概念是投资学中复制(replicate)资产的概念。其次将研

究在无套利条件(absence of arbitrage opportunity)下资产行为的数学模型。

将这两大概念的结合可以提供一种发现价格的强大工具。关于这一点，用一个例子足以说明问题。在下一节中，我们将给出一个复制投资组合和无套利机会条件下衍生产品定价的例子。该例值得仔细阅读。

## 1.2 股票及其衍生产品

一家公司可以通过将其股份出售给投资者的方式筹集资金。该公司为股东所拥有(owned)。这些所有者持有股票或股权证明，他们是否可以取得股利，取决于公司的赢利情况以及公司是否决定和所有者分享股利。

公司股票的价值是什么？其价值反映出投资者对于可能的股利支付、未来利润以及公司控制资源的观点和预测。这些不确定性由该股票的买卖双方来解决（在每个交易日）。他们的观点通过拍卖市场，例如，在纽约、伦敦和东京证券交易所上买卖股票来执行。亦即，一个股票在某一时刻的价格在很多时候由其他人愿意为其支付的金额来判断。

什么是股票衍生产品呢？它是一个特定的合约，其在未来某一天的价值完全由股票的未来价值决定。制定并出售该合约的个人或公司称为卖方(writer)。购买该合约的个人或公司称为买方(holder)。该合约所基于的股票称为标的资产。

衍生产品的价值是多少呢？这样一个合约的条款对于其价值的任何估计都是至关重要的。我们的第一个例子选择一个结构简单的衍生产品，以便方便地解释我们主要的金融概念(复制资产和无套利机会)。这些概念将帮助我们给定一个衍生产品的价格。

我们在该例中也会解释一些交易机制，这对于理解以后将遇到的相关概念非常重要。

### 1.2.1 股票的远期合约

如果我们能够保证，在未来的某一天，某人将保证以某一价格买入一股股票，则事情有时会变得很方便。这种在未来买入的义务就称为远期合约。

以下是合约的一些条款：

- 在确定的日期(即到期日)，合约的买方必须支付规定数量的钱(即执行价格)给合约的卖方。
- 合约的卖方必须在到期日转让一股股票给买方。

图 1-1 是远期合约中股票以及现金交易的图示。这种远期合约通常简称为远期。

该合约在到期日对于买方来说可以是一担好买卖，也可能是亏本生意。结果取决于到期日的股价。

**到期时的利润或损失**

下面从定量角度来分析，我们用  $S_T$  表示到期时的价格，用  $X$  表示要求的执

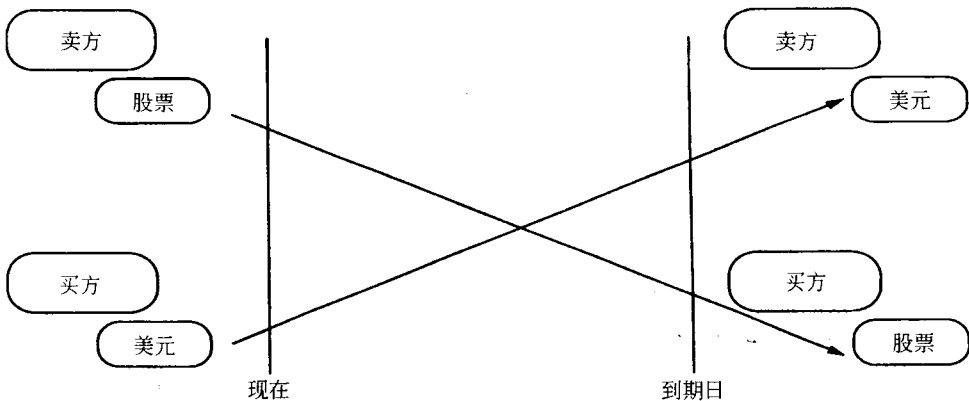


图 1-1 远期合约

行价格。执行价格  $X$  是已知量。在英文中也可以将执行价格 (exercise price) 称为交易价 (strike price)。而且通常将“到期日”称为“执行日期” (strike date)。

在  $T$  时刻买方的利润或损失表示为：

$$S_T - X$$

是否可以找到用以计算远期合约到期之前利润或损失的价格公式呢？合约应该值多少并非一个学术问题。现代金融市场允许合约买方在任何交易日在市场上出售合约或者购买新合约。换句话说，这些工具可以交易。

3

你可以想像如果当天价格远高于执行价格  $X$ ，并且到期日为期不远，则合约具有较高价值。另一方面，如果今天的股价非常低，那么合约几乎没有价值。我们可以通过复制其他资产的方式得到远期合约价值的定价公式。

**复制投资**

首先构造一个资产组合，包括一个远期合约 (价值  $f$  美元) 和如下数量的现金：

$$Xe^{-r(T-t)}$$

该组合现在的净价值为

$$f + Xe^{-r(T-t)} \tag{1-1}$$

其中的指数项将随现金流的利息收入而抵消。

资产组合中的任何现金量从现在起至到期日按照  $e^{r(T-t)}$  因子增长。因为现金可以安全地投资，这一假设是合理的。这里，“安全地”意味着现金资产不会因为市场价格变化而产生风险，并且如果有更好的投资选择可以立刻变现。 $r$  表示该项投资的即期利率回报。在 2000 年春短期货币投资的利息  $r$  是年利率 0.055。

现金量在远期合约到期时的值正好达到与资产组合相应的目标值。

在到期日，资产组合的收支包括得到一股股票同时支付执行价格，但是资产组合中的现金投资部分刚好增长到与执行价格相等的值。实际上，投资的现金部

分抵消执行价的支出。

我们可以说在到期日这项资产组合复制了一股股票。当然价格正好一致，因为

$$\text{合约价值} + \text{现金量} = \text{一股股票}$$

### 资产组合的交易

现代金融市场的发展速度令人叹为观止。市场制度允许资产组合可以像一项资产一样在到期日之前进行交易。事实上，某人可以在任何时间购买这种合约同时支付一部分现金，这相当于购买一个单位的资产组合。

另一方面，即使某人并不持有合约，它通常也可以在市场上出售该合约。投资者成为合约的卖方并且承担卖方的责任。如果某人并不持有诸如股票之类的根本资产而出售该资产，之后再购买股票用于交付，这种活动被称为卖空资产。几乎所有的股票都可以卖空。毫无疑问，某人可以仅通过以短期利率  $r$  借钱而卖空在资产组合中一定量现金。实际上，即使我们一开始就并不持有该项资产组合，我们也可以出售。

4

我们刚解释了某人可以购买或出售一项投资或资产组合，该资产可以用来在未来某天复制一股股票。这也引出一个问题，复制以前资产组合与股票的价格关系如何。我们将应用前面介绍的第二项重要的金融原理，即无套利机会，把各资产的价格等同起来。

#### 第一套利机会

假设今天价格和其未来价值不一致。事实上，让我们看当

$$\text{合约价格} + \text{现金量} < \text{一股股票}$$

时的情形。

这简直是发掘了一个金矿，投资者今天可以卖空大量股票。对于那些有勇气出售他们并不持有的东西的投资者，会立即得到大量现金。这些投资者可以使用得到的现金的一部分购买相应数量的资产组合单位，用以弥补先前的卖空。

也就是说，当到期日来到，投资者可以利用复制资产组合弥补所有的买空股票。因为抵消卖空需要的资金更少一些，不论未来市场如何变化，你可以看到他（她）在最初有多余现金。

#### 第二套利机会

如果相反的情形发生了，即

$$\text{合约价格} + \text{现金量} > \text{股价}$$

正如我们对资产组合的交易的解释，投资者可以卖空资产组合。类似的计算表明那些用便宜的股票抵消这些卖空的投资者，在卖空资产组合后立即买进股票，照样可以高枕无忧。

因为投资者知道每一单位的卖空资产组合在到期日恰巧就是卖空一单位股票，所以他（她）并不因为到期日的临近而感到不安。同样，不论未来市场如何变

化，投资者一开始就赚到一定现金。

这两种赚钱计划在实物的金融市场决不会发生。我们稍后会讨论其中原因，现在如果假设市场上不存在上述两种价格不相等的情形，我们可以得到如下结论：

### 无套利定价公式

今天远期合约的价值 + 现金量 = 今天股票的价格

我们用净价公式(1-1)代替上式中的各价格得到公式

$$f + Xe^{-r(T-t)} = S_t$$

5

公式可以重新写成：

$$f = S_t - Xe^{-r(T-t)} \quad (1-2)$$

公式(1-2)表明我们已经得到了  $f$  的解，即要得到该合约今天的价值，需要知道今天股价的报价和短期利率。只要将这些因素代入上面公式，就得到了从今天起始的股票远期合约的价格。

随着股价的变化和距离到期日时间的减少，远期合约的价格每天都要重新计算。因为远期合约通常 90 天内到期，所以在实践中  $r$  值不太可能变化。因为时间间隔非常短，资金的收益率对于距离到期日的剩余时间远远比对于一个月或三个月现金投资利率敏感。

**例** 假设我们有一个 Eli Lilly 股票的远期合约，从现在起 40 天后到期。如果执行价格是 65 美元，今天股票价格为  $64\frac{3}{4}$  美元，今天合约的价格是多少？

我们使用每年 0.055 的  $r$  值。我们代入公式(1-2)的时间长度是

$$T-t = 40/365 = 0.1096 \text{ (因此 } e^{-r(T-t)} = 0.994 \text{)}$$

两个报价分别为：

$$S_t = 64.75 \text{ 以及 } X = 65$$

最终结果是

$$f = 64.75 - 65(0.994) = 64.75 - 64.61 = 0.14 \text{ (美元)}$$

该公式给出的另一个启示是：在本例中，相同的执行价和股票价格下，合约期限越长(例如，6 个月)，价格越高，因为  $e^{-r(T-t)}$  项变为 0.974。这表明公式(1-2)非常有用。它使我们能比较不同到期日和不同执行价下的远期合约的价格。

为什么说复制和无套利的观点成立？

由公式(1-2)给出的理论价格公式和远期合约的市场价格不会有明显的差异。任何明显的价格差异将导致投资者采用我们前面讨论的两种投资策略之一。确定性的盈利将促使他们在其中一种计划中大量投资。他们的行为会改变价格，并直到标的股票的价格发生变动使得套利机会不再存在。例如，如果卖空大量的某种股票，因为市场上这么多股票待售，股票的现价会下降。

也就是说，确定性盈利机会的存在使一些投资者在市场上进行买卖，使得股票和远期合约的价格回到均衡状态，并最终导致套利机会消失。

6

### 1.2.2 看涨期权

某人可以购买一种机会，在未来以约定的价格购买一股股票。这种不附带义务的未来购买的权利被称为

#### 看涨期权

下面是期权中的一些条款：

- 期权的购买者向出售者支付费用，即为升水。
- 在到期日，合约的买方以执行价向合约卖方支付。
- 如果合约卖方收到买方以交易价支付，在到期日他必须交付一股股票给买方。

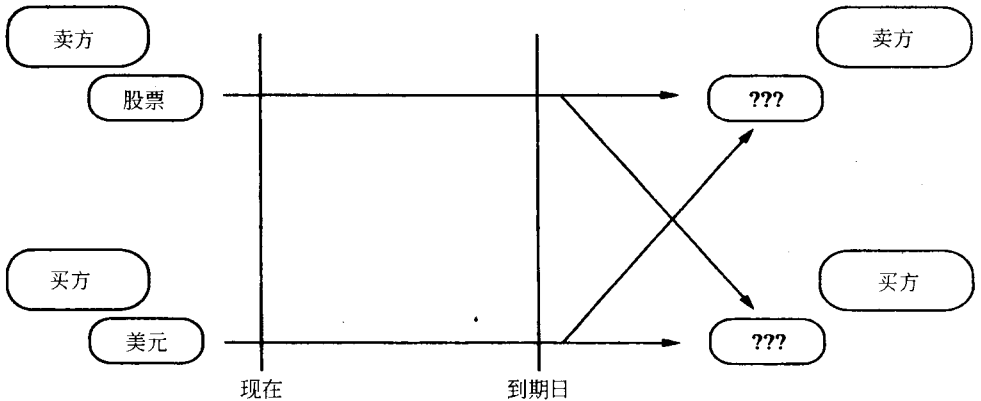


图 1-2 看涨期权

图 1-2 是股票和现金可能交易的图示。注意到合约的买方有购买的选择权。如果他（她）不想买股票，则可以拒绝支付执行价。很明显这种情形在到期日股票价格低于执行价的时候发生。另一方面，如果买方看到到期日股价较高，那么他（她）一定会选择支付执行价同时获得高价格的股票。我们称这种情形为期权被执行了。

#### 到期时的利润或损失

在期权合约中，要么交易不发生，要么合约的卖方向买方支付股票价格与执行价之间的价差。因此我们能够用到期的股票价格  $S_T$  和执行价  $X$  描述买方未来可能的支付量，即：

7

看涨期权的现金流  $= \max\{S_T - X, 0\}$

如果  $S_T - X$  为正，该“最大值”公式等于  $S_T - X$ ；否则结果为 0。我们可以把