

目录 Content

金融资产的价值

第一章 分散风险	1
一、概述	1
二、风险的正式衡量	4
三、决定投资组合风险的变数	9
四、分散风险理论推导	11
五、风险分散的极致：有效边界	14
习题	17

个案研究	20
投资组合理论与谨慎人规则	20
第二章 资产定价模型	23
一、资本资产定价模型	23
(一) 投资决策法则	24
(二) 资产配置	27
(三) 两基金分离理论	33
(四) 资本资产定价模型的均衡	33
(五) β 系数及要求收益率	39
(六) β 的妙用	42
二、CAPM 推广模型	44
(一) 零贝塔 CAPM 模型	44
(二) 多要素 CAPM	47
(三) 套利定价模型	49
(四) 普遍原则	57
习题	58
个案研究	62
系统风险的来源：详细介绍	62

第三章 资产价值评价	67
一、贴现法	67
(一) 评估资产价值的基本观念	69
(二) 固定收益证券的评价	71
(三) 优先股价值的评估	73
(四) 普通股的评价	75
二、相对评价法	101
(一) 本益比	101
(二) 市价净值比	106
(三) 市价营收比	108
习题	110

第一章 分散风险

一、概述

“不要将鸡蛋放在一个篮子里”是投资界的至理名言，但将其数据化及模型化，成为现代投资分析基础的是马柯威茨。马柯威茨所谓的分散风险 (risk diversification) 是在投资总金额不变动的前提下，增加投资组合中证券的种类，种类愈多，风险即愈分散。马柯威茨证明风险愈分散，可以在期望收益不变的情形下使投资组合的风险愈小（即标准差愈小）。

当投资组合只有一种证券时，该证券的标准差就是这个投资组合的风险，但如果加进一种证券，投资组合的风险自然会受到这新增证券的影响，而不仅等于原来证券的风险。新增证券对投资组合风险的影响来自两个方向：第一为新增证券本身的风险对投资组合的影响，可以想像，假设您原来的投资组合只有一家公司的股票，则风险颇高，但如将股票卖掉一部分，转而投资国库券，投资组合的风险一定会因此而减少。我们以表 4.1.1 中的数据为例，假设投资

表 4.1.1 投资组合的收益率与风险（年收益率）

经济情况	概率	甲公司	乙公司	丙公司	甲、乙各 50% 的投资组合	甲 70%，乙 30% 的投资组合
超级	1/3	30	-20	40	5	15
平平	1/3	10	10	10	10	10
失望	1/3	-10	50	-20	20	8
期望收益		10	13.33	10	11.67	11
标准差		16.3	28.67	24.49	6.24	2.94
甲、乙共变异数		-4.67				
甲、乙相关系数		-99.67				

组合中原本只有乙公司，那么其风险就是 28.67%。但如果将乙卖掉一部分，转而投资甲，那么投资组合的风险除了受原来乙的影响外，也开始受甲控制。如果组合中绝大多数的金额都投资在乙，组合的风险应该还是非常接近乙的标准差 28.67%，但如果渐渐减少乙的投资而增加甲的投资，则投资组合的风险就会愈来愈受甲来决定，而当乙的投资为 0，也就是整个投资转为甲时，投资组合的风险就是甲的标准差了。本例的启发是：投资组合的风险会受新增证券的影响，其风险除了受个别证券的风险影响外，也受组合中不同证券的投资权数（即投资于不同证券的百分比）的影响。

第二个影响投资组合风险的因素是股票与股票间的相关性 (correlation)，相关性指的是两种证券涨跌的互动关系。当甲股票涨而乙股票也一起涨时，我们说甲与乙有正相关性 (positive correlation)；当甲与乙价格变动的方向相反时，它们有负相关性 (negative correlation)；当两个证券的价格变动没有关系时，它们是相互独立的 (independent)，相关性为 0。

以表 4.1.1 中的甲、乙二公司为例，它们的相关性是负的，因为经济情况超级好时甲公司的表现好，但乙公司的表现差，而当经济情况恶劣时，甲、乙的风水即轮流转了。由表 4.1.1 看来，负相关的意思是甲和乙的表现刚好会相互抵消一部分，如果投资组合只包含甲，经济超级好时收益率是 30%，令人失望时是负 10%。但如果投资于甲、乙各 50%，甲、乙的投资收益会相互抵消，在经济状况好时，投资组合赚 5%，但经济情况差时赚 20%，结果是投资组合的风险比甲、乙都小，原因就是甲与乙呈负相关！表 4.1.1 展示了本例的数字计算结果。

表 4.1.1 明确地指出，投资组合的风险可能会比甲、乙二公司的风险还低，原因是甲、乙的收益相互抵消，使得投资组合的收益散布比甲和乙都小，经济超级好时收益率是 5%，令人失望时是 20%，这就是甲和乙不相关带来的风险分散好处。如果我们改变投资权数，让 70% 的资金投资于甲，这时投资组合的风险会比 50% 投资于甲的情形低，标准差只有 2.94%，本例说明了投资权数对风险有影响，权数基本上决定个别证券风险对投资组合的贡献。

以下我们会解释，证券自己的风险对投资组合风险的影响，会随着风险分散程度而减低，我们因之称证券自己的风险为可分散或非系统性风险 (diversifiable or non-systematic risk)，而证券间的相关性对投资组合风险的影响却不会因风险分散程度而消失，这个部分因之称为不可分散或系统性风险 (non-diversifiable or systematic risk)。

分散风险在市场发生重大突破 (shock) 时可以减低投资组合所受到的冲击，只要是事先未预期到而且对资产价值有影响的事件皆可称为突击。

有的突击可以借分散风险将其冲击减小，但有的不能。这种对每人都有影响的突击称为系统性突击 (systematic shock)，系统性突击所产生的风险称为系统性风险。

将风险区分为非系统性及系统性风险是现代投资理论的重大发明，脍炙人口的资本资产定价模型及套利定价理论，都是基于这个观念发展出来的，本

章中我们先深入分析投资组合风险分散的原理，而于第五章中讨论资产定价的理论及应用。

二、风险的正式衡量

我们用以下的简单模型来阐述分散风险的原理，这个模型需要一点算术。首先要指出的是，我们仍旧以期望收益率与标准差两个层面来分析投资组合的优劣，而投资组合的期望收益率与标准差的计算方法本质上与一个证券的计算是一样的，唯一要增加的步骤是利用个别证券的收益率来计算投资组合的每一事件值。以表 4.1.1 为例，就是要计算在各个经济情况下的投资组合收益率。这个计算非常简单，只要将投资组合中每个证券的投资比例（即权数）乘以其收益率，然后加总即可。当某一事件 t （经济情况）发生时，投资组合 p 的收益率计算公式如下：

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^M W_i R_{t,i} \quad (4.2.1)$$

$R_{p,t}$ 是在事件 t 发生时，投资组合 p 的收益率； i 是证券数目的计数符号， $i=1$ 表示第一个证券， $i=2$ 表示第二个证券，依此类推； W_i 是投资组合对 i 的投资权数； $R_{t,i}$ 是当事件 t 发生时证券 i 的收益率； $\sum_{i=1}^M$ 的意思是总共有 M 个证券，每一项是某证券 i 的投资权数与收益率的乘积，将 M 个证券的项次加总。以表 4.1.1 中经济超级好的情况为例，如果甲及乙的投资权数各为 50%，则投资组合的收益率为 $0.5 \times 0.3 + 0.5 \times (-0.2) = 0.05$ ；经济情况为平时的收益率为 $0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 0.1 = 0.1$ ；读者请自行验证，经济表现令人

失望时的收益率为 0.2。

投资组合收益率计算公式 (4.2.1) 的原理非常容易理解, 以甲、乙各投资 50% 的投资组合为例, 把投资金额的一半投资于甲, 当经济情况非常好时, 得到 30% 的收益率, 但因为只有一半的金额投资于甲, 总投资额的财富只增加其一半的 30%, 因此对总投资额而言, 来自甲的收益率为 $0.5 \times 30\% = 15\%$ 。同理, 总投资额收益率来自乙的部分是乙收益率的一半: $0.5 \times (-20\%) = -10\%$, 所以总投资额收益率为来自甲和乙两部分的加总: $0.5 \times 0.3 + 0.5 \times (-0.2) = 0.05$ 。

计算出来投资组合每一可能事件的收益率后, 投资组合的期望收益率与标准差即可按公式计算出来, 投资组合期望收益的计算公式如下:

$$E(R_p) = \sum_t P_t \cdot R_{p,t} \quad (4.2.2)$$

P_t 是事件 t 发生的几率, $R_{t,p}$ 是投资组合 p 于事件 t 发生时的收益率, 将表 4.1.1 中数据代入公式 (4.2.2), 可轻易地计算出甲、乙各投资 50% 的投资组合的期望收益率为

$$E(R_p) = \frac{1}{3} \times 0.05 + \frac{1}{3} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.2 = 0.1167$$

投资组合标准差的计算公式如下:

$$\sigma = \left[\sum_t P_t \cdot (R_{t,p} - E(R_p))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.3)$$

依据表 4.1.1 的资料, 该投资组合的标准差为

$$\sigma = \frac{1}{3} \times (0.05 - 0.1167)^2 + \frac{1}{3} \times (0.1 - 0.1167)^2 + \frac{1}{3} \times (0.2 - 0.1167)^2 = 0.0624$$

读者请自行验证, 投资 70% 于甲, 30% 于乙的投资组合其期望收益率及标准差为 11% 及 2.94%。

由表 4.1.1 我们可以观察到两个现象：①投资组合的风险比甲及乙个别
的风险小；②改变权数会改变投资组合的收益率及风险。因此，一个值得深
入探讨的问题是，“那些因素决定投资组合的风险？”尤有甚者，“什么情况
之下，投资组合的风险可以最低”？

为解答这些问题，我们将投资组合的风险分成两部分，一部分是个别证券
的风险，另一部分是证券间的相关性。在将风险分解为两个部分之前，先了解
相关性的概念会有所帮助，相关性可由协方差 (covariance) 或相关系数
(correlation coefficient) 衡量，这两个统计值就像标准差一样，可以简
单地计算，

$$\sigma_{\text{甲乙}} = \sum_{t=1}^M P_t \cdot [R_{t, \text{甲}} - E(R_{\text{甲}})] \cdot [R_{t, \text{乙}} - E(R_{\text{乙}})] \quad (4.2.4)$$

$\sigma_{\text{甲乙}}$ 是甲与乙的协方差， $R_{t, \text{甲}}$ 与 $R_{t, \text{乙}}$ 是甲与乙证券在事件 t 的收益率，
 $E(R_{\text{甲}})$ 及 $E(R_{\text{乙}})$ 是甲及乙证券的期望收益率， $R_{t, \text{甲}} - E(R_{\text{甲}})$ 与 $R_{t, \text{乙}} - E(R_{\text{乙}})$
分别是在甲及乙在事件 t 发生时，其收益率与期望值之差，以表 4.1.1
为例，当经济情况超级好时，

$$R_{\text{超级, 甲}} - E(R_{\text{甲}}) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

$$R_{\text{超级, 乙}} - E(R_{\text{乙}}) = -0.2 - 0.13333 = -0.3333$$

甲公司的数字表示，当经济超级好时，其收益率表现比其平均好 20%，
而乙公司正好相反，表现比平均差 -33.33%，这表示甲好时，乙不好。协方
差即是将甲与乙在不同经济情况下的关系，以其发生几率为权数，计算其加
权平均的关系。当协方差为负时，表示平均而言，甲涨时，乙即跌的机会比
甲涨乙亦涨的机会来得大。相反地，当协方差为正时，甲涨乙亦涨的机会比

较大。表 4.1.1 中甲与乙的协方差为

$$\sigma_{\text{甲乙}} = \frac{1}{3} \times (0.3-0.1) \times (-0.2-0.1333) + \frac{1}{3} \times (0.1-0.1) \times (0.1-0.1333) + \frac{1}{3} \times (-0.1-0.1) \times (0.5-0.1333) = -0.0467$$

协方差为 -4.67% 表示甲与乙的变动关系是反向的，与我们所目测表 4.1.1 的实际情形一致。但协方差有一个缺点，就是虽然它可以给投资人一些两个证券互动关系的概念，但投资人却无法从协方差的值精确知道相关程度的强弱。例如，上例计算出来的协方差 -4.67% 是个很小的数字，但是不是就表示甲、乙的反向相关程度很低呢？以表 4.1.1 的情形观之，甲与乙的相反方向关系实际上应该是颇强的，可见协方差无法适当地表达这个讯息。一个能够取代协方差，而且提供投资人精确相关性程度的指标是相关系数，以 $\rho_{\text{甲乙}}$ 表示。读者请谨记 $\rho_{\text{甲乙}}$ 一定落于 -1 和 1 之间。愈接近 1 ，表示甲与乙的正相关程度愈强；愈接近 -1 表示负相关的程度愈强；等于 0 表示甲与乙没有相关，两者的变动是独立的。

相关系数的计算公式颇简单

$$\rho_{\text{甲乙}} = \frac{\sigma_{\text{甲乙}}}{\sigma_{\text{甲}} \times \sigma_{\text{乙}}} \quad (4.2.5)$$

$\sigma_{\text{甲}}$ 及 $\sigma_{\text{乙}}$ 是甲与乙的标准差，表 4.1.1 中 $\rho_{\text{甲乙}}$ 等于

$$\rho_{\text{甲乙}} = \frac{-0.0467}{(-0.163) \times (-0.2867)} = -0.997$$

$\rho_{\text{甲乙}}$ 告诉我们甲、乙的负相关性是极强的，几近完全负相关，因此读者可以确定甲与乙的变动方向极可能是完全相反的，这是为什么包含甲及乙二者的投资组合，比甲及乙单独而言，风险降低许多的重要原因之一，此乃因

甲与乙的收益率在不同事件中相互抵消。无风险利率 (R_f) 在任何事件中的收益率皆为 R_f ，因此不论甲与乙的收益率怎么改变， R_f 皆不变，所以甲或乙与 R_f 的相关系数为 0。

事实上，在相关系数为零的情形下，还是会有分散风险的效果，以 R_f 和甲所组成之新投资组合的风险为例，当甲与 R_f 的权数各为 50% 时，投资组合的风险是甲的一半 (8.15%)，如果您尝试不同的权数，会发觉新投资组合的风险正好等于甲的投资比例乘以甲的风险。

即使相关系数为正，只要不为 1，投资人仍可借结合证券来降低风险，图 4.2.1 显示丙、丁两个证券所组成的投资组合其分散风险的效果与相关系数的关系。连接两点的曲线表示在某一相关系数水准之下，投资组合风险随投资权数改变的情形。相关系数愈接近负 1，分散风险的效果愈强。事实上，我们可以证明，当相关系数为负 1 时，投资人一定可以找到一组投资权数，使投资组合的风险为零。当相关系数渐渐接近正 1 时，分散风险的效果亦渐渐减小，相关系数若为正 1 时，就完全没有分散风险的效果了。此时投资组合的风险完全由投资权数决定，投资于丙多些，就比较接近丙的风险，投资于丁

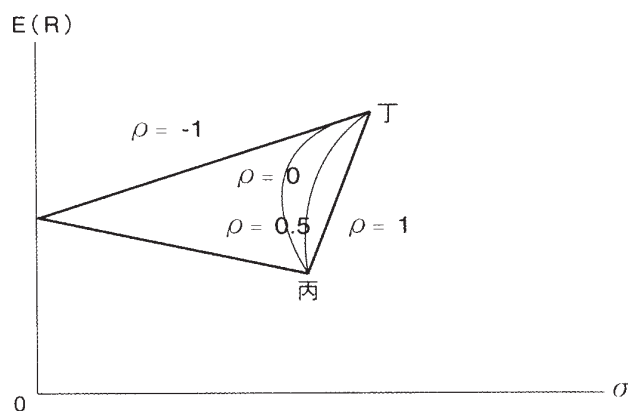


图 4.2.1 风险分散效果与相关系数的关系

多些，就比较接近丁的风险。我们也可以证明当相关系数为 1 时，投资组合的风险就是丙及丁标准差的加权平均，权数即为投资百分比。相关系数为 1 会造成没有分散风险效果的道理很简单，因为两个证券就像是同一个证券，结合在一起还是像自己。

三、 决定投资组合风险的变数

以上的分析告诉我们，个别证券的风险、证券间的相关性，及投资权数决定了一个投资组合的风险。事实上，投资组合的风险可以表示为这三个变数的函数 (function)，本节之目的即在让读者了解投资组合的风险与这些变数之关系。由公式 4.2.3 我们知道投资组合的方差可以写成

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N P_i \cdot (R_{i,p} - E(R_p))^2$$

将上式中 $R_{i,p}$ 以公式 4.2.1 的值替代， $E(R_p)$ 以公式 4.2.2 的值替代，我们可以整理出投资组合收益率的风险为

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M W_i W_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^M W_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M W_i W_j \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

公式 4.3.1 看起来极复杂难懂，其实不然，读者只需静下心来，要了解其意，易如反掌。首先，请您记得，一个变数与自己的协方差就是自己的方差，这点由公式 4.2.4 立即可得到证明，如果 4.2.4 中，乙即是甲，

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{甲甲}} &= \sum_{t=1}^N P_t \cdot (R_{\text{甲},t} - E(R_{\text{甲}}))(R_{\text{甲},t} - E(R_{\text{甲}})) \\ &= \sum_{t=1}^N P_t \cdot (R_{\text{甲},t} - E(R_{\text{甲}}))^2 \\ &= \sigma_{\text{甲}}^2\end{aligned}$$

我们以两个证券的情形 ($M = 2$) 为例, 来说明投资组合风险的特性, 公式 4.3.1 可写成

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \sigma_{ij}$$

当两个加总符号 $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2$ 放在一起时, 意思是将 i 值先固定为 1 ($i = 1$), 而后 j 从第一个数字 ($j = 1$) 依序变换至 j 等于最后一个数字 ($j = M$), 然后加总这些不同 j 值的项次, 再将 i 值改变一单位 ($i = 2$) 并固定后, 让 j 从第一个数字逐一变换成最后一个数字, 将这些 j 项次加总, 直到所有 i 、 j 项次皆加总为止。依这个原则, 当 $M = 2$ 时,

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= W_1 W_1 \sigma_{11} + W_1 W_2 \sigma_{12} + W_2 W_1 \sigma_{21} + W_2 W_2 \sigma_{22} \\ &= W_1^2 \sigma_1^2 + 2W_1 W_2 \sigma_{12} + W_2^2 \sigma_2^2\end{aligned}$$

请读者注意, 公式 4.2.4 告诉我们证券 1 与 2 的协方差 (σ_{12}) 和 2 与 1 的协方差 (σ_{21}) 是一样的。当 $M = 3$ 时, 请读者自行验证

$$\sigma_p^2 = W_1^2 \sigma_1^2 + W_2^2 \sigma_2^2 + W_3^2 \sigma_3^2 + 2W_1 W_2 \sigma_{12} + 2W_1 W_3 \sigma_{13} + 2W_2 W_3 \sigma_{23}$$

当 M 愈大, σ_p^2 的项次即愈多。上面的说明指出一个重要的事实, 投资组合的风险由投资权数 (W_i), 证券自己的风险 (标准差, σ_i) 及证券间的协方差 (σ_{ij}) 共同决定。所以只要知道权数、标准差及协方差, 就能计算投资组合的风险 (即其标准差), 这是马柯威茨理论的主要发现之一。投资人从此有了一个明确的模式来讨论投资组合的风险, 以表 4.1.1 为例, 当甲、乙的权数各为 50% 时, 投资组合的风险为

$$\sigma_p^2 = (0.5^2 \cdot \sigma_{甲}^2 + 0.5^2 \sigma_Z^2 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times \sigma_{甲Z})^2 = 0.0624$$

读者请自行以上述公式验算，当甲和乙的权数改为 70% 及 30% 时，投资组合的风险为 0.0294。

四、分散风险理论推导

我们现在以公式 4.3.1 来说明分散风险的好处，如果您还记得，公式 4.3.1 可以写成

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M W_i W_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^M W_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M \sum_{j=1}^M W_i W_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

上式把投资组合的风险分成两部分：第一部分是个别证券的风险，另外一部分是两证券间的协方差，因此第二个部分写成 $\sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M W_i W_j \sigma_{ij}$ ，意思是所有加总的项次中排除 $i=j$ 的部分，因为这部分是证券自己的方差，已经在第一部分中被分离出来了。以 $M=2$ 为例

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \sigma_{ij} \\ &= W_1^2 \sigma_1^2 + W_2^2 \sigma_2^2 + W_1 W_2 \sigma_{12} + W_2 W_1 \sigma_{21} \\ &= \sum_{i=1}^2 W_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

风险愈分散表示每一个证券的投资权数愈少，也就是 W_i 在公式 4.3.1 中变得愈来愈小。我们现在对公式 4.3.1 中的两部分逐一分析分散风险程度对投资组合风险的影响，也就是 W_i 愈来愈小时的影响。假设每一证券的投资权

数一样, 即 $w_i = 1/M$, 因此若有 100 个证券, $w_i = 1/100$, 则公式 4.3.1 的第一项可写成

$$\sum_{i=1}^M w_i^2 \cdot \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{M^2} \cdot \sigma_i^2$$

因为 $1/M^2$ 等于 $1/M$ 乘以 $1/M$, 不仅为常数, 而且是每一个加总项次的乘积项, 我们可以将 $1/M^2$ 由每一加总项式前移到加总符号前, 上式因而可改写下式:

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{M^2} \cdot \sigma_i^2 = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 \right)$$

事实上, $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i^2$ 是 M 个方差的平均数, 譬如说 $M = 2$ 时,

$$\frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

方差的平均数不会随着投资组合证券数目无止尽的增加, 这个道理就如同平均身高不会随学生人数增加而无止尽增加是一样的。当证券数目很大时, 这平均数会变得颇稳定, 所以这个平均数乘以 $1/M$, 反而会随着 M 变大而变小, 当 M 很大时, $1/M$ 是个很小的数字, 它与一个稳定的平均数的乘积, 也随着 M 变小。读者可以想像, 当 M 很大时, $\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 \right)$ 会变得小的微不足道, 几近于 0。所以只要投资组合够大, $\sum_{i=1}^M w_i \sigma_i^2$ 会接近 0。

但是公式 4.3.1 中的第二项, $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}$ 却不会随着组合的证券数目增加 (M 变大) 而消失。当 $w_i = 1/M$ 时, 公式 4.3.1 的第二项可改写成

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{M} \cdot \sigma_{ij}$$

事实上, 上式总共有 $M(M-1)$ 项, 以 $M = 2$ 为例,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = w_1 w_2 \cdot \sigma_{12} + w_1 w_3 \cdot \sigma_{13} + w_2 w_1 \cdot \sigma_{21} +$$

总共有 2 项 [$M \times (M - 1) = 2 \times (2 - 1)$]。若 $M = 3$, 则

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = w_1 w_2 \cdot \sigma_{12} + w_1 w_3 \cdot \sigma_{13} + w_2 w_1 \cdot \sigma_{21} + w_2 w_3 \cdot \sigma_{23} + w_3 w_1 \cdot \sigma_{31} + w_3 w_2 \cdot \sigma_{32}$$

总共有 6 项 $[M \times (M - 1) = 3 \times 2 = 6]$ 。读者可以检验，当 $M = 4$ 时，总共有 12 项。

既然总共会有 $M(M-1)$ 项，如同对公式 4.3.1 第一项的分析，我们可将 $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} \frac{1}{M} \sigma_{ij}$ 改写成 $\frac{M-1}{M} \left(\frac{1}{(M-1) \cdot M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sigma_{ij} \right)$ ，而 $\frac{1}{(M-1)M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sigma_{ij}$ 是 $M(M-1)$ 项的 σ_{ij} 的平均，当证券数目 (M) 很大时，该平均数会是颇稳定的值，不随 M 的增加而减少，同时 $(M-1)/M$ 的值很接近 1，所以公式 4.3.1 的第二项，不会随 M 的增加而减小。

以上分析说明了一件事，当 M 很大时，公式 4.3.1 的第一部分微不足道，所以一个风险很分散的投资组合，其风险大都是由协方差这部分决定的，因此我们称这部分为不可分散或系统性风险。而有关公式 4.3.1 之第一部分，即证券自己的标准差，称为可分散风险或非系统性风险。对我们的重要启示是，当投资人增加投资组合的证券数目时，个别证券本身的风险会愈来愈不重要，

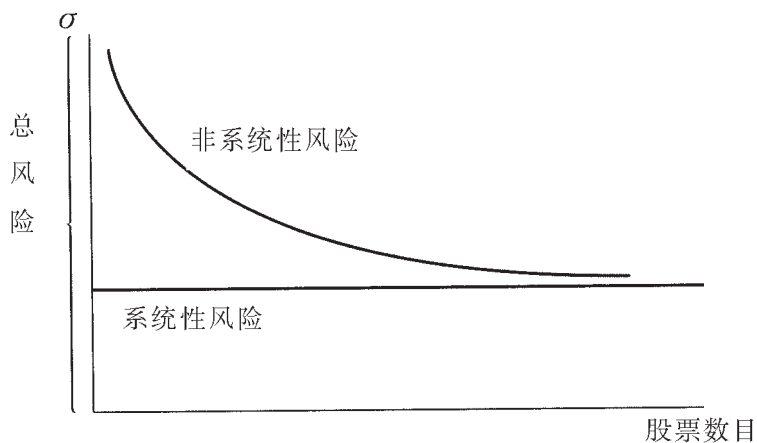


图 4.4.1 风险分散效果与股票数目之关系

而当证券的数目很大时，决定投资组合风险的就只有证券间的协方差及权数了。

所以，证券间的平均协方差愈小，投资组合的风险即愈小。虽然理论上平均方差可以接近零，但对于风险极分散的投资组合而言，实际上大部分证券是呈正相关的，也就是大部分的证券在经济情况好的时候表现不错，而在景气坏时一起亏损。读者可以想像，每一个证券都受整体经济环境的影响，只是受影响的程度不同而已，而这些不同程度的影响就构成了证券间的相关性，这即是我们把投资组合协方差的部分叫做系统性风险的原因！

美国学者 Evans 及 Archer (1968) 的研究显示，十支股票即可达到大部分风险分散的好处，再增加股票能减少的投资组合风险有限，但是 Statman (1987) 考虑分散风险的交易成本（如交易费用，投资组合管理费等）之后，认为投资组合证券数目要三十至四十支股票左右，才能将分散风险的好处充分利用，原因是当股票数目超过四十支后，其分散风险带来的利益即会小于所增加的成本。

图4.4.1将投资组合的风险分成系统性及非系统性风险，非系统性风险随着股票数目增加而减少，当股票数目极大时，投资组合的风险就是系统性风险了。

五、风险分散的极致：有效边界

到目前为止，本章一再强调的观念是，增加股票的数目可以有分散风险的效果，即投资组合的风险可能比单一或少数股票的风险小；不过分散风险的效果有极限，受证券数目及证券间相关性决定。所以不是每个投资组合的风险皆相同，本节要说明的是，不同的投资组合可以有相同的期望收益率，