国家自然科学基金重大项目（金融工程）丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明 著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第二章　利率的期限结构

在度量资产的市场价值（现值）时，我们采用折现现金流公式

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

但这里实际上蕴涵着一个假设：对于时期 $t=1,2,\cdots,n$ 来说，对这项资产的预期收益率即购置它的资本成本始终是一样的，都是 r。这与实际情况不相符合。因为市场的环境是在不断变化的（通货膨胀率、人们对消费的时间偏好和整个市场对待风险的态度等等，都会随经济形势的变化而变化），从而对同一项资产所要求的预期收益率也会随时间而变化。所以，资产估值的折现现金流公式应当是

$$PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

这里我们假定现金流发生的时间间隔都是 1 年。

资产的市场均衡价格应当是

$$P_0 = PV = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

如果这项资产的（总的）预期收益率是 r，就应这样理解：

$$NPV = -P_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} = 0$$

即是这项资产的内部收益率。于是有

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r_n)^n}$$

所以，r 可以看作 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 的某种“平均”。

1. 利率的确定

利率可以简单地看作是“租用”资金的价格。在金融市场上，利率水平的高低受到四个基本因素的影响：

1）资本货物的生产能力　资本货物是经济中用于生产其他货物的货物，如矿山、道路、水渠、牧场、发电站、工厂、机器设备、库存品，等等。资本货物的生产能力是以其每年生产出的价值占资本货物本身价值的百分比来度量的，即以资本的收益率来度量。资本的收益是股票、债券及其他所有金融工具收益的根本来源。资本的预期收益的大小受制于技术进步的状况和其他的一些资源因素（如自然资源、劳动）和市场对资本所生产的货物和服务的需求情况。但这些都会随时间和地点的不同而变化。对资本的预期收益越高，市场的利率水平就越高，否则反之。

2）资本货物生产能力的不确定性　资本的收益总是因为环境和资本货物本身性质的变化而带有不确定性。因为金融市场的理性参与者都具有厌恶风险的倾向，所以这种不确定性越大，市场的理性参与者在接受风险时所要求的风险补偿就越大，市场的利率水平就越高，否则反之。

3）消费的时间偏好　任何人进行储蓄/投资都是牺牲目前的消费来换取将来的消费，因此人们也就有消费的时间偏好。经济学认为人们看重于现在的消费甚于将来的消费（至少将来可能死亡而享受不到消费），因此反映资本收益的利率应当始终为正。人们对现在消费的偏好越强，对推迟消费所要求的补偿就越大，市场的利率水平就越高，否则反之。

4）风险厌恶程度　理性的市场参与者总是厌恶风险的。金融市场提供了这样一种机制，市场的参与者如果想投资于没有风险的资产，他们就必须放弃部分收益，而接受风险的市场参与者将因此获得风险补偿。整个市场对风险的厌恶越厉害，接受风险者所要求的风险补偿就越大，市场的无风险利率也就越低。

因为在金融市场中资金的转移是通过交易各种金融商品（如股票、债券等）来实现的，作为租用资金的价格的利率是由债权型金融商品的到期收益率（*YTM*-yield to maturity）来度量的。各种不同的债权型金融商品带有不同的风险特性，对它们所要求的风险补偿各不相同，即有不同的利率。于是需要有一类利率作为基准，这就是无风险利率。为什么说是一类而不是一个无风险利率？因为上述四个因素都会随着时间而变化，所以无风险利率会因期限的不同而不同。这就是无风险利率的期限结构。

由于通货膨胀的缘故，商品和服务的价格会发生变化。要对价格进行正确的比较，必须考虑通货膨胀的影响。利率是租用资金的价格，当然也要受到通货膨胀的影响，因为通货膨胀影响到货币资金的实际购买力。在市场上表现的利率是包含有通货膨胀的影响在内的，所以是名义利率。在扣除通货膨胀影响以后的利率是真实利率。假如你现在投资100元，一年后可以收回108元。但现在价格为100元的一篮子消费品一年后的价格上升至105元，108元能买回多少消费品呢？应该是108元÷105元/篮子＝1.02857篮子。所以真实的投资收益率是2.857％。

名义利率和真实利率的关系应当是

$$1+\text{真实利率}=\frac{1+\text{名义利率}}{1+\text{通货膨胀率}}$$

略去高阶小量后，可以得到

$$\text{名义利率}=\text{真实利率}+\text{通货膨胀率}$$

这就是费雪效应，是美国经济学家欧文·费雪（Irving Fisher）最早在1930年提出的。请注意，有风险资产的真实利率（到期收益率）是包含风险补偿在内的。所以可以进一步把在市场表现的（名义）利率分解成三个部分：

$$\text{名义利率}=\text{资金的纯时间价值}+\text{通货膨胀率}+\text{风险补偿}$$

前二者的和（资金的纯时间价值＋通货膨胀率）就构成无风险利率，也就是为了投资于有风险资产而放弃投资于无风险资产的机会成本。这里我们让通货膨胀率包含在无风险利率里，是为了更贴近实际（如以国库券的收益率表示无风险利率，是包含有通货膨胀率在内的）。严格地说，无风险利率应该是资金的纯时间价值。

一般金融商品如果期间有利息发生，如果到期再变现，就有将利息滚入本金计算复利的问题。计算复利就有计息周期的问题。可以1年计算1次复利，也可以半年计算1次，更可以按月计息、按周计息、按日计息，甚至分分秒秒计息。分分秒秒计息算得的复利就是连续复利。不过有一点要记住，不管计息周期是多长，复利指的都是年率。读者请仔细看下面的计息算法，不要把计息周期和以年作为计算复利的时间单位这两件事弄混淆了。

以 r 记金融商品按年计息的复利率，如果在1年中计息 m 次，$r_{1/m}$ 是 m 次计息的复利率，则有关系式

$$r=\left(1+\frac{r_{1/m}}{m}\right)^{m}-1$$

当 $m\to\infty$ 时，就得到连续复利率 r^{*}，有

$$r=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r^{*}}{m}\right)^{m}-1=e^{r^{*}}-1$$

即有

$$r^{*}=\ln(1+r)$$

这就是连续复利率 r^{*} 和以年计息的复利率 r 二者之间的换算关系。连续复利对于金融学理论研究来说很重要。而以年计息的复利率 r 在实际的市场交易中是非常有用的，称之为有效年收益率。以后，在不发生混淆时，我们就用 r 记连续复利率，不再加上星号（*）。在会发生混淆时，则用 r^{*} 加以区别。

2. 金融风险和无风险证券

存在以下基本类型的金融风险：

1）违约风险　即倒账风险，指债务人不能按期还本付息的风险。其他类型风险所产生的损失都有可能引发违约风险，而违约风险具有滚雪球式的连锁反应的危险性。如果一家企业因买方违约而收不回一笔销售应收款，因此发生资金周转困难而不能采购急需的零配件的话，就会打乱整个生产经营秩序。于是，这家企业将不能支付它的原材料、能源等应付款，违约风险就会像瘟疫一样地传播开来。在金融市场上则更是如此，一笔资金被套牢而发生违约，会顺着债务链迅速地具有放大效应地扩散开来，有可能导致危及整个金融系统的总体金融风险。

2）流动性风险　狭义的流动性是指资产即时、低成本地转变成现金的能力，广义的流动性则指个人或机构即时、低成本地获取现金（包括出售资产或借贷）的能力。对于金融资产来说，流动性是极其重要的特性。金融资产的流动性的好坏是与交易此类资产的二级市场的发达程度有关的。二级市场越发达，流动性就越好。在其他条件不变时，投资者倾向于流动性好的资产甚于流动性差的资产。金融工程产品设计的一大任务是转变金融资产的流动性。

3）购买力风险　即通货膨胀的影响，是由费雪效应来表现的。

4）利率风险　由于未预见到的市场利率水平的变化而使资产的收益发生变化，这种风险被称为利率风险。由可以预见到的利率变化所造成的资产收益的风险，则已经表现在（无风险）利率的期限结构里。

5）汇率风险　汇率是货币之间的比价。由未预见到的汇率变化所造成的资产收益发生变化，这种风险被称为汇率风险。和利率风险一样，汇率风险是指未预见到的变化。市

场预见到的汇率变化表现在远期汇率、外汇掉期等外汇金融商品的市场价格里。

6）其他的市场风险　由政治的、法律的、财政的、行业的以及其他国内外诸多因素影响整个金融市场而产生的风险都被归入这一类。特别需要指出的是，某一类商品价格的未预见到的变化会引起金融市场的波动，从而造成很大的金融风险，甚至对整个经济造成严重影响。石油危机产生的原油价格波动就是一个典型的例子。

利率风险、汇率风险和商品价格风险的转移、配置和管理是金融工程技术最可发挥作用之处，而违约风险则是防范金融风险最为关注的问题。

无套利均衡分析需要构筑起无风险的对冲头寸。因此，在采用复制技术时，至少从理论上讲，无风险证券起到特殊的（也往往是必要的）作用。从而在实际的金融市场中，需要有一类证券能起无风险证券的作用。在实践中，采用短期国库券作为无风险证券。

短期国库券是政府发行的短期债务，因而被认为是没有违约风险的。在西欧和北美，交易国库券的二级市场非常发达，所以也被认为是没有流动性风险的。西方国家中央银行采用短期国库券的公开市场交易作为调控货币供给的政策工具之一，从而也可认为不受其他市场风险的影响。但是在国库券的利率（收益率）中，依然含有通货膨胀的影响和利率、汇率的未预期波动的风险。采用短期国库券作为完全无风险证券，当然只是近似。

3. 国库券的收益曲线

市场的无风险利率的期限结构是以国库券的收益曲线（treasury yield curve）来表示的（见图 2.1，选自 1999 年 6 月 25 日《华尔街日报》），收益曲线表示出国库券的收益率和到期期限之间的关系。

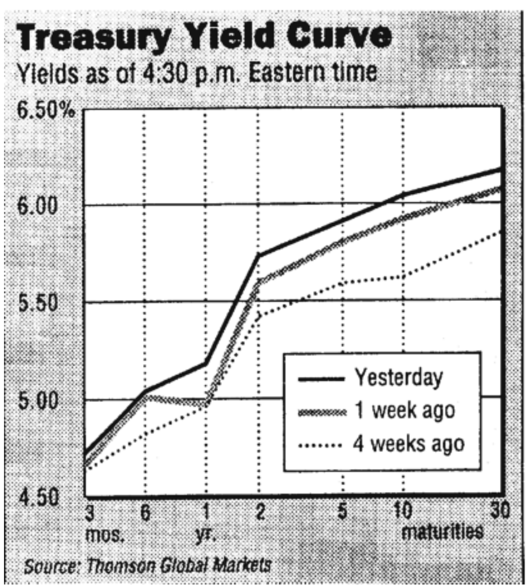

图　2.1

国库券的收益曲线大体上有上翘、平坦和下垂三种形态，有时也会出现一些复杂的形状，比如先上翘后下垂。上翘表明期限长的国库券的收益率高于期限短的国库券的收益

率,下垂则反之。而平坦的国库券收益曲线表明当时不同期限的国库券的收益率是相同的。上翘的形态被认为是正常的,其他形态被看作是不正常的。有一些理论被用来解释收益曲线的形态,其中比较为人们接受的是优先置产理论(preferred habitat theory),我们在后文再介绍。

短期(期限为 1 年和 1 年以内的)国库券通常是折现债券,市场价格低于面值,到期前不配付利息,到期时按面值赎回。如一份 3 月期国库券的面值是 1 000 元,现在的市场价格是 985 元,则到期收益率应为

$$985\text{ 元} = \frac{1\,000\text{ 元}}{1 + \frac{3}{12}r}$$

由此算出 $r=6.10\%$。中长期国库券通常是带息票债券。息票即利息票,原来是附在债券上的一些小票,按期撕下来作为领取利息的凭证。现在,所有在到期日前按期配付固定利息的债券都可称为带息票债券。

以 Par 记带息票债券的面值,i 为息票利率,为叙述简单起见,假定利息按年支付,则每年支付的利息是 $Par\times i$,债券的期限为 n 年,期末偿还本金,目前的市场价格为 P_0。带息票债券的收益率 r 由下式算出

$$NPV = -P_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{Par \times i}{(1+r)^t} + \frac{Par}{(1+r)^n} = 0$$

如果 $i=r$,则可推算出 $P_0=Par$,债券是所谓的平价债券;若 $i>r$,则 $P_0>Par$,债券是溢价债券;若 $i<r$,则 $P_0<Par$,债券是折价债券。

带息票债券与折现债券相比较,因为在到期前有利息现金流入,所以有一个再投资问题,也就有再投资风险的问题。国库券虽然被认为是无风险证券,利息现金流入可以再按无风险利率投资,但未来的无风险利率仅仅是市场的预期,而再投资的利率风险是未能预期到的,即使是国库券,也不能完全免除。因此,虽然中长期国库券是带息票债券,它们在收益曲线上表示的收益率,实际上相当于换算成折现债券后计算出的收益率,即所谓零息票利率(zero-coupon rate),亦即本章开头所示的 $r_t, t=1,\cdots,n$。请注意,零息票利率都是即期利率(spot rates)。零息票利率集$\{r_t, t=1,\cdots,n\}$对于金融产品的设计来说是非常有用的。

下面我们用一个简单的例子说明如何从带息票债券(中长期国库券)的市场价格信息来换算零息票利率。

例 假如 1 年期短期国库券(折现型)的面值是 1 000 元,现在市场的均衡价格是 910.50,则可算得

$$r_1 = \frac{1\,000 - 910.50}{910.50} = 9.83\%$$

2 年期的国库券第 1 年年底付息 100 元,第 2 年年底还本付息 1 100 元,现在的市场均衡价格为 982.10,可以用下式来推算 r_2:

$$982.10 = \frac{100}{1+9.83\%} + \frac{1\,100}{(1+r_2)^2}$$

由此算得 $r_2=11.08\%$。如果有 3 年期的国库券的市场价格信息,则可依此类推算出 r_3。有

一些到期年限的国库券在市场上不存在，则可用插值法进行计算(参见下一节)。

表 2.1 和表 2.2 分别是《华尔街日报》上刊载的美国国债的报价，可以利用这样的报价数据来换算零息票利率集。

表 2.1 是中、长期国库券的报价。左起第 1 列是息票利率。第 2 列是到期月/年，年份用公元纪年的后两个数字表示，如 Jan 00 表示的是 2000 年 1 月。如果在年份后面有一个

表 2.1

TREASURY BONDS, NOTES & BILLS

Monday, June 28, 1999

Representative Over-the-Counter quotations based on transactions of $1 million or more.

Treasury bond, note and bill quotes are as of mid-afternoon. Colons in bid-and-asked quotes represent 32nds; 101:01 means 101 1/32. Net changes in 32nds. n-Treasury note. Treasury bill quotes in hundredths, quoted on terms of a rate of discount. Days to maturity calculated from settlement date. All yields are to maturity and based on the asked quote. Latest 13-week and 26-week bills are boldfaced. For bonds callable prior to maturity, yields are computed to the earliest call date for issues quoted above par and to the maturity date for issues below par. *-When issued.

Source: Federal Reserve Bank of New York.

U.S. Treasury strips as of 3 p.m. Eastern time, also based on transactions of $1 million or more. Colons in bid-and-asked quotes represent 32nds; 99:01 means 99 1/32. Net changes in 32nds. Yields calculated on the asked quotation. ci-stripped coupon interest. bp-Treasury bond, stripped principal. np-Treasury note, stripped principal. For bonds callable prior to maturity, yields are computed to the earliest call date for issues quoted above par and to the maturity date for issues below par.

Source: Bear, Stearns & Co. via Street Software Technology Inc.

GOVT. BONDS & NOTES

Rate	Maturity Mo/Yr	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
6 3/8	Jan 00n	100:19	100:21	....	5.13
5 3/8	Jan 00n	100:04	100:06	....	5.04
7 3/4	Jan 00n	101:15	101:17	....	5.06
5 7/8	Feb 00n	100:11	100:13	....	5.20
8 1/2	Feb 00n	101:31	102:01	-1	5.16
5 1/2	Feb 00n	100:05	100:07	....	5.15
7 1/8	Feb 00n	101:06	101:08	-1	5.19
5 1/2	Mar 00n	100:04	100:06	....	5.23
6 7/8	Mar 00n	101:04	101:06	....	5.23
5 1/2	Apr 00n	100:03	100:05	....	5.29
5 5/8	Apr 00n	100:06	100:08	....	5.31
6 3/4	Apr 00n	101:03	101:05	....	5.31
6 3/8	May 00n	100:26	100:28	....	5.33
8 7/8	May 00n	103:00	103:02	....	5.25
5 1/2	May 00n	100:03	100:05	+ 1	5.32
6 1/4	May 00n	100:24	100:26	....	5.33
5 3/8	Jun 00n	99:31	100:01	+ 1	5.34
5 7/8	Jun 00n	100:14	100:16	....	5.36
5 3/8	Jul 00n	99:28	99:30	....	5.43
6 1/8	Jul 00n	100:21	100:23	....	5.43
6	Aug 00n	100:17	100:19	+ 1	5.45
8 3/4	Aug 00n	103:16	103:18	....	5.45
5 1/8	Aug 00n	99:17	99:19	....	5.48
6 1/4	Aug 00n	100:25	100:27	....	5.49
4 1/2	Sep 00n	98:23	98:25	+ 1	5.51
6 1/8	Sep 00n	100:21	100:23	+ 1	5.52
4	Oct 00n	97:31	98:01	....	5.54
5 3/4	Oct 00n	100:06	100:08	....	5.55
5 3/4	Nov 00n	100:06	100:08	+ 1	5.55
8 1/2	Nov 00n	103:26	103:28	....	5.53
4 5/8	Nov 00n	98:22	98:24	+ 1	5.55
5 5/8	Nov 00n	100:00	100:02	-1	5.57
4 5/8	Dec 00n	98:18	98:20	+ 1	5.59
5 1/2	Dec 00n	99:26	99:28	+ 1	5.59
4 1/2	Jan 01n	98:09	98:11	+ 1	5.60
5 1/4	Jan 01n	99:13	99:15	+ 1	5.60
5 3/8	Feb 01n	99:18	99:20	+ 1	5.61
7 3/4	Feb 01n	103:07	103:09	+ 1	5.61
11 3/4	Feb 01	109:11	109:13	....	5.63
5	Feb 01n	98:31	99:01	+ 1	5.61
5 5/8	Feb 01n	99:31	100:01	+ 1	5.60
4 7/8	Mar 01n	98:21	98:23	+ 1	5.65
6 3/8	Mar 01n	101:04	101:06	+ 1	5.65

Rate	Maturity Mo/Yr	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
10 3/8	Nov 07-12	126:08	126:14	+ 14	6.27
12	Aug 08-13	139:03	139:09	+ 15	6.28
13 1/4	May 09-14	150:12	150:18	+ 18	6.30
12 1/2	Aug 09-14	145:22	145:28	+ 17	6.30
11 3/4	Nov 09-14	140:31	141:05	+ 17	6.29
11 1/4	Feb 15	147:21	147:27	+ 23	6.37
10 5/8	Aug 15	141:28	142:02	+ 23	6.40
9 7/8	Nov 15	134:20	134:26	+ 22	6.41
9 1/4	Feb 16	128:14	128:20	+ 20	6.42
7 1/4	May 16	108:15	108:17	+ 19	6.41
7 1/2	Nov 16	111:02	111:06	+ 19	6.42
8 3/4	May 17	124:10	124:16	+ 21	6.42
8 7/8	Aug 17	125:26	126:00	+ 21	6.43
9 1/8	May 18	129:02	129:08	+ 22	6.43
9	Nov 18	128:02	128:08	+ 22	6.43
8 7/8	Feb 19	126:27	127:01	+ 21	6.43
8 1/8	Aug 19	118:28	119:00	+ 21	6.43
8 1/2	Feb 20	123:09	123:15	+ 21	6.43
8 3/4	May 20	126:10	126:16	+ 22	6.43
8 3/4	Aug 20	126:15	126:21	+ 22	6.43
7 7/8	Feb 21	116:22	116:26	+ 21	6.43
8 1/8	May 21	119:23	119:27	+ 22	6.42
8 1/8	Aug 21	119:26	119:30	+ 22	6.42
8	Nov 21	118:16	118:20	+ 22	6.42
7 1/4	Aug 22	110:00	110:02	+ 20	6.41
7 5/8	Nov 22	114:18	114:22	+ 21	6.40
7 1/8	Feb 23	108:26	108:28	+ 20	6.39
6 1/4	Aug 23	98:18	98:20	+ 19	6.36
7 1/2	Nov 24	113:31	114:00	+ 22	6.37
7 5/8	Feb 25	115:21	115:25	+ 22	6.37
6 7/8	Aug 25	106:11	106:13	+ 22	6.37
6	Feb 26	95:22	95:24	+ 20	6.33
6 3/4	Aug 26	105:00	105:02	+ 22	6.36
6 1/2	Nov 26	101:27	101:29	+ 21	6.35
6 5/8	Feb 27	103:18	103:20	+ 22	6.34
6 3/8	Aug 27	100:15	100:17	+ 21	6.33
6 1/8	Nov 27	97:14	97:16	+ 21	6.31
3 5/8	Apr 28i	94:11	94:12	....	3.95
5 1/2	Aug 28	89:24	89:26	+ 20	6.26
5 1/4	Nov 28	87:02	87:03	+ 22	6.21
5 1/4	Feb 29	88:11	88:12	+ 19	6.10
3 7/8	Apr 29i	98:22	98:23	....	3.95

字母 n,则表示是中期国库券(treasury notes)。如果到期年份有两个数字,如右边第 1 项报价 Nov. 07-12,表示的是可赎回债券(callable)。07-12 表示 2012 年到期,从 2007 年开始可以赎买。关于可赎回债券的知识将在后面第八章讲解。第 3 列和第 4 列分别是当天收盘时的买进价(bid)和卖出价(asked)。注意,对于中长期债券来说,报价单位是 1/32,如 101 : 01 表示的实际上是 101 1/32(第 1 列息票利率报价单位也是 1/32,但直接用分数表示)。第 5 列表示的是当天的收盘价(卖出价)与前一天的收盘价之间的净变化。最后一列(第 6 列)则是按卖出价计算的到期收益率。可赎回债券的收益率的计算比较复杂,建议有兴趣的读者在学习第八章后再回过来阅读表 2.1 头上的英文说明。

表 2.2

TREASURY BILLS

Maturity	Days to Mat.	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
Jul 01 '99	2	3.31	3.23	-0.15	3.28
Jul 08 '99	9	4.05	3.97	-0.03	4.03
Jul 15 '99	16	3.70	3.62	-0.50	3.68
Jul 22 '99	23	4.30	4.22	-0.06	4.29
Jul 29 '99	30	4.26	4.22	-0.06	4.29
Aug 05 '99	37	4.35	4.31	-0.02	4.39
Aug 12 '99	44	4.42	4.38	+0.03	4.46
Aug 19 '99	51	4.47	4.43	+0.02	4.52
Aug 26 '99	58	4.37	4.33	-0.01	4.42
Sep 02 '99	65	4.55	4.53	+0.01	4.63
Sep 09 '99	72	4.60	4.58	+0.03	4.69
Sep 16 '99	79	4.66	4.64	+0.01	4.75
Sep 23 '99	86	4.66	4.65	....	4.77
Sep 30 '99	93	4.67	4.65	+0.01	4.77
Sep 30 '99	93	4.75	4.74	+0.08	4.87
Oct 07 '99	100	4.67	4.65	....	4.78
Oct 14 '99	107	4.68	4.66	+0.01	4.79

TREASURY BILLS

Maturity	Days to Mat.	Bid	Asked	Chg.	Ask Yld.
Oct 21 '99	114	4.68	4.66	+0.01	4.80
Oct 28 '99	121	4.67	4.65	+0.01	4.79
Nov 04 '99	128	4.73	4.71	+0.01	4.86
Nov 12 '99	136	4.78	4.76	-0.01	4.91
Nov 18 '99	142	4.79	4.77	....	4.93
Nov 26 '99	150	4.80	4.78	....	4.94
Dec 02 '99	156	4.82	4.80	-0.01	4.97
Dec 09 '99	163	4.84	4.82	+0.01	5.00
Dec 16 '99	170	4.84	4.82	+0.01	5.00
Dec 23 '99	177	4.86	4.85	+0.01	5.04
Dec 30 '99	184	4.93	4.92	+0.02	5.12
Jan 06 '00	191	4.72	4.70	+0.04	4.88
Feb 03 '00	219	4.62	4.60	+0.02	4.78
Mar 02 '00	247	4.68	4.66	-0.01	4.85
Mar 30 '00	275	4.73	4.71	....	4.91
Apr 27 '00	303	4.73	4.71	-0.03	4.92
May 25 '00	331	4.78	4.76	-0.02	4.99
Jun 22 '00	359	4.89	4.88	-0.01	5.14

表 2.2 是短期国库券的报价。短期国库券是折现型债券,用百分数报价,报出的是所谓“银行折现率”,银行折现率的计算公式是

$$d = \frac{Par - P_0}{Par} \times \frac{360}{n}$$

其中 Par 是面值,P_0 是市价,n 是距到期日的天数。注意,银行折现率 1 年按 360 天计算。

4. 折现因子

由零息票利率集可以换算出无风险利率的折现因子。如 FV_t 表示 t 时间后发生的现金流的未来值,PV_t 表示 FV_t 用无风险利率折现的现值,则有

$$PV_t = v_t FV_t$$

其中 v_t 就是折现因子。

所有的折现因子都可以由零息票利率集算出。因为零息票利率是以年利率的形式给出的,所以有

若 $t \leqslant 1$ 年，则
$$v_t = \frac{1}{1 + r_t t};$$
若 $t > 1$ 年，则
$$v_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t}$$
这里 t 以带十进制小数的实数(以 1 年为单位)表示。

因为不同期限的国库券的品种是有限的，因此，由国库券在市场中的实际收益率只能测算出收益曲线上有限的几个点，即只有有限几个 r_t 可以从市场的实际价格获得。对于其他的时间期限 t，折现因子可以利用下述的指数插值法获得：
$$v_t = v_1^{\left[\frac{t}{t_1}\left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\right)\right]} v_2^{\left[\frac{t}{t_2}\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right]}$$
其中

v_1 是期限为 t_1 的折现因子；

v_2 是期限为 t_2 的折现因子；

v_t 是期限为 t 的折现因子，t 介于 t_1 和 t_2 之间。

例如现在是 4 月 21 日，3 个月后是 7 月 21 日(91 天后)，6 个月后是 10 月 21 日(183 天后)。3 月期的零息票利率是 9.50%，6 月期的零息票利率是 9.75%。计息的日期计算方法是“实际日期/360 天”，所以相应的折现因子的值分别是 0.976549 和 0.952778。现在我们来计算 8 月 23 日(124 天后)的折现因子。直接由上式可算出
$$v_t = 0.976549^{\left[\frac{124}{91}\left(\frac{183-124}{183-91}\right)\right]} 0.952778^{\left[\frac{124}{183}\left(\frac{124-91}{183-91}\right)\right]} = 0.968028$$
如果需要插值计算的时间期限比期限最短(期限最长)的国库券的期限还要短(长)，则采用以下插值公式
$$v_t = v_\tau^{\frac{t}{\tau}}$$
其中 τ 指已知的国库券的最短(长)的期限。

5. 远期利率

远期利率是资金的远期价格，与其他商品的远期价格有类似的特性，所以我们先讨论一般的远期价格。对于一种商品的交易来说，如果买卖双方现在订约，在将来某个指定的时间按预定的价格交割预定数量(并指明规格和质量要求)的商品，这样的交易称为远期交易，预定的价格称为远期价格。

远期价格就是未来的交割价格。在订立远期合约时，买卖双方都不用支付，合约的面值则是合约预订的数量乘以远期价格。显然，在合约中同意买进的一方称为远期合约的多头，同意卖出的一方则称为空头。

到到期日(即交割日)时，如果当时市场的(即期)价格高于合约的远期价格，则多头获利而空头亏损；如果当时市场的(即期)价格低于合约的远期价格，则反之。它们的盈亏状况图如图 2.2。

现在我们来讨论远期价格的定价问题。

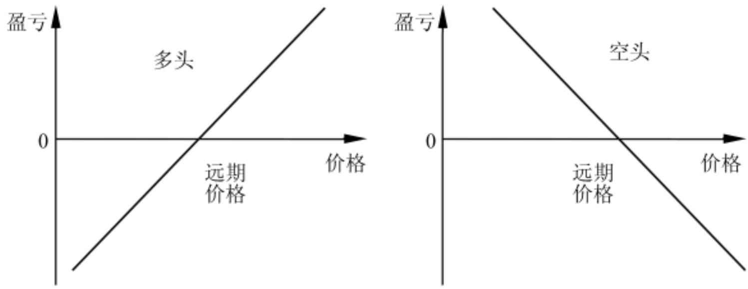

图 2.2

假定有一股票，准备持有 1 年，期间不分红，到期出售可获得资本收益（即买进卖出的差价），该股票的预期收益率（年率）是 15%，目前的市场价格是 $S_0=100$ 元。如果现在来订立买卖这种股票的 1 年期远期合约，远期价格为 F，F 的大小应该是多少？

如果简单地认为远期价格是 100 元×（1＋15%）＝115 元，那就错了！必须严格地采用无套利均衡分析方法来估值和定价。我们这样来“复制”这份股票的头寸：

假想购买 1 份到期面值就等于 F 的无风险折现债券，同时建立这份股票的远期多头。到期时兑现债券得到数额为 F 的现金用来履行远期合约买入股票。如果再出售股票的话可以获得完全一样的收入现金流。因为（无风险债券＋股票远期多头）完全复制了持有股票的未来现金流，所以复制证券和被复制证券二者现在应当具有相同的市场价值，否则将出现无风险套利机会。因此无风险债券现在的市场价格也应该是 $S_0=100$ 元。如果无风险债券的利率是 r_f，则应有

$$S_0 = \frac{F}{1+r_f}$$

即有

$$F = S_0(1+r_f)$$

如果 $r=5\%$，则远期价格应为 100 元×（1＋5%）＝105 元。

这里很容易产生疑惑，市场预期 1 年后股票的价格应当是 115 元，而远期价格却只有 105 元。这是怎么回事呢？

1 年后在市场上股票的实际价格可能会高于或低于 115 元，115 元仅仅是数学期望值，股票的收益率是有风险的。一位投资者如果购买复制证券（无风险债券＋远期多头），到时候可以以 105 元的远期价格买进股票，但此时股票的市场价格通常不会是 105 元，而是 S_1（其预期是 115 元），所以投资者将得到 115 元－105 元＝10 元的预期风险补偿。原来投资于无风险债券有 5 元的无风险收益，总的预期收益将是 5 元＋10 元＝15 元。所以，投资于复制证券的预期收益率也是 15%。

为了看得更为清楚起见，我们按照无套利均衡分析方法再做一数量化的分析：

假如远期价格不是 105 元，例如是 106 元＞105 元，则同时建立股票的多头（购买股票）和复制证券的空头（这意味着卖空无风险债券同时出售远期合约），就获得套利机会。现金流情况如下：

表　2.3

套利头寸	即时现金流	一年后现金流
卖空无风险债券	+100 元	−105 元
出售远期合约	0	106 元$-S_1$
购买 1 份股票	−100 元	S_1
净现金流	0	1 元

这样就能无风险地套取利润。

由此我们得到重要的结论：

> **对于有风险资产而言，远期价格不是未来即期价格的市场预期。**

但是，对于无风险资产来说，远期价格确实是未来即期价格的市场预期。这一点可以从以上的无套利均衡分析清楚地看出。远期利率是针对无风险证券（如国库券）的，所以确实是未来市场的无风险利率的预期。远期利率是指远期无风险利率，这一点一定要记住！

为了搞清楚远期利率的期限，我们定义如下记号：

${}_if_j$ 表示从第 i 段单位时间（例如单位时间可取为年、季、月等）期初开始到第 j 段时间期初结束这段时期的远期利率，远期利率当然仍然都表示为年率。我们看图 2.3 所示的时间轴（开始第 1 段时间称为第 0 年）。

图　2.3

例如，${}_1f_2$ 表示第 1 段单位时间（从第 1 段单位时间期初开始到第 2 段单位时间期初结束这段时间期间）的远期利率，${}_1f_3$ 表示从第 1 段单位时间期初开始到第 3 段单位时间期初结束这段时间期间的远期利率，而${}_2f_3$ 则表示第 2 段单位时间（从第 2 段单位时间期初开始到第 3 段单位时间期初结束这段时间期间）的远期利率。显然必须有 $i>0$（0 指现在时刻），不然变成了即期利率而不是远期利率了。

和即期利率一样，如果在第 j 段单位时间中，要计算时间间隔 t 短于 1 年的远期利率的实际收益率，就应该是$(1+{}_{j-1}f_j\times t)-1={}_{j-1}f_j\times t$，如果时间间隔 t 是从第 i 段单位时间期初开始到第 j 段单位时间期初结束而又长于 1 年的话，则该段期间的远期利率的实际收益率是$(1+{}_if_j)^t-1$。

前面指出过，零息票利率集是不同期限的即期无风险利率的集合。零息票利率和远期利率之间存在互相蕴涵的关系，下面我们来讨论这种关系。

假如一位投资者准备进行为期 2 年的无风险投资，他可以有多种不同的投资方法。我们先来看这样两种不同的投资策略。其一是直接购买 2 年期的国库券，其二是先购买 1 年期的国库券，同时按照市场的远期价格购买从第二年年初起的 1 年期国库券。为了分析简

单起见,假定所有的国库券都不带息票。

采用第一种投资策略,现在每 1 元钱的投资,2 年后的市场价值为

$$(1+r_2)^2$$

采用第二种投资策略,现在每 1 元钱的投资,2 年后的市场价值应为

$$(1+r_1)(1+{}_1f_2)$$

如果市场上 1 年后的 1 年期折现型国库券的远期价格是$\overline{S}_1$,国库券的面值是 Par,则远期利率为

$${}_1f_2=\frac{Par-\overline{S}_1}{\overline{S}_1}$$

现在就是已知的,r_1 也是已知的。所以这两种投资策略都是无风险的,由无套利均衡条件知,两者的结果应当相等。即有

$$(1+r_2)^2=(1+r_1)(1+{}_1f_2)$$

这个关系式可以推广到任意年,有

$$(1+r_n)^n=(1+r_1)(1+{}_1f_2)(1+{}_2f_3)\cdots(1+{}_{n-1}f_n)$$

从而

$$1+r_n=\sqrt[n]{(1+r_1)(1+{}_1f_2)(1+{}_2f_3)\cdots(1+{}_{n-1}f_n)}$$

所以有一条规律

> 1 加零息票利率是 1 加相应期限的远期利率的几何平均值。

如果不是每年发生一次利息现金流(按年计息),而是每年发生 m 次利息现金流(如按月计息,$m=12$),那么,上述公式转变为

$$1+\frac{r_n}{m}=\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}=\frac{P_t(1+g)-P_t}{P_t}=g$$

为了简化我们的符号起见,把 $r_{1/m}$,${}_{1/m}f_{2/m}$,…,${}_{mn-1/m}f_n$ 简记为 f_1,f_2,…,f_{mn},上式简化为

$$1+\frac{r_n}{m}=\sqrt[mn]{\prod_{j=1}^{mn}\left(1+\frac{f_j}{m}\right)}$$

请注意,f_1,f_2,…,f_{mn}都是期限为 1 段单位时间的远期利率。

采用完全类似的无套利均衡分析方法,可以容易地推出

$$(1+{}_if_j)^{\{j-i\}}=(1+{}_if_{i+1})(1+{}_{i+1}f_{i+2})\cdots(1+{}_{j-1}f_j)$$

因此,只要知道所有单位时间段的远期利率,就可以算出任意时间段的远期利率。

如果每年发生 m 次现金流,期限为 n 年的折现现金流就变成

$$PV=\sum_{j=1}^{mn}v_jC_j$$

C_j 是未来第 j 期发生的现金流,v_j,$j=1,\cdots,mn$ 是各期的折现因子。所有的 v_j 都可以按下式从期限为 1 个单位时间段的远期利率 f_1,f_2,…,f_{mn}递归地推出:

$$v_0 = 1$$

$$v_{j+1} = \frac{v_j}{\left(1 + \frac{f_{j+1}}{m}\right)}, \quad j = 0, \cdots, mn - 1$$

反过来，如果知道了所有的 $v_j, j=1,\cdots,mn$，当然可以倒算出期限为 1 个单位时间段的远期利率 $f_1, f_2, \cdots, f_{mn}$

$$f_j = \left(\frac{v_{j-1}}{v_j} - 1\right)m, \quad j = 1, \cdots, mn$$

由此我们得出结论，可以根据零息票利率集（可以按照市场实际的均衡价格推算出来）算出折现因子集（如果市场上没有相应期限的国库券，则采用插值技术），折现因子和单位时间段的远期利率集是可以互相换算的。从折现因子当然也可以倒算出零息票利率集（即可算出国库券的收益曲线）。计算公式如下

若 $t \leqslant 1$ 年，则 $\qquad r_t = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{v_t} - 1\right)$；

若 $t > 1$ 年，则 $\qquad r_t = \sqrt[t]{\frac{1}{v_t}} - 1$

三者之间的关系以折现因子为纽带，由图 2.4 表示。

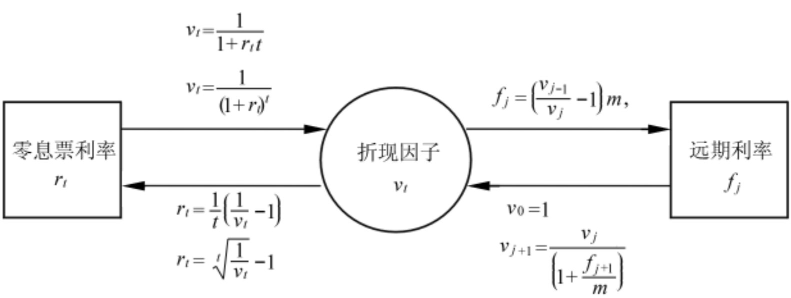

图 2.4

6. 互换的定价

互惠掉换（swap），简称互换或掉换，有各种不同的形态：不同期限之间的掉换（可以称为掉期）、不同利率之间的掉换（如固定利率与浮动利率之间的掉换，称为利率互换，或者可以称为掉利）、不同币种之间的掉换（称为货币互换，或者可以称为掉币），等等。大量的衍生品都是短期工具，而利率互换和货币互换则往往是期限长于 1 年的长期工具。因此，利率互换和货币互换的定价一定与金融市场对未来的预期紧密地联系在一起，而定价的方法当然也是无套利均衡分析。而且，在互换的定价中，非常突出地体现了金融工程的组合分解技术。我们在此作一介绍。

先讨论固定利率和浮动利率的利率互换（interest rate swap）的金融工程定价技术。

利率互换是一种转变长期债务或债权的利率风险特性的衍生品。如果你借入（或贷出）一笔长期的浮动利率贷款，而又预感到市场利率将会上升（或下跌），那么，你可以购买

（出售）一份利率互换合约，转变成可以支付（或收取）固定利率的利息。对于利率互换协议，买方将收取浮动利率利息，支付固定利率利息，卖方则反之。所以，我们可以用图 2.5 所示的现金流来描述买方和卖方的未来收益/支出。

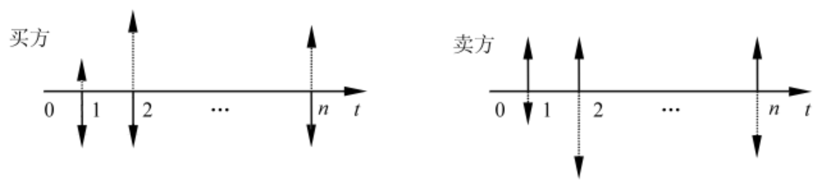

图　2.5

按照习惯，在现金流图中，箭头朝上表示现金的流入，箭头朝下表示现金的流出。我们用等长度的实线箭头表示固定利率利息的支付，而用不同长度的虚线箭头表示浮动利率利息的支付。

浮动利率的确定是采用与某种利率指数挂钩的办法。从理论上讲，采用短期国债利率作为利率指数最有道理，实际上最常用的是伦敦银行同业拆放利率，即 *LIBOR*（London InterBank Offer Rate），可以认为是一种代用品。浮动利率用 *LIBOR* 加减若干基本点（一个基本点是 1/100 个百分点，即万分之一）给出（这实际就是风险调整）。利率互换的定价，就是要定出与浮动利率互换的固定利率的大小，即所谓“浮动利率的固定利率价格”。所以利率互换协议的买方是用固定利率“购买”浮动利率。

表 2.4 是英国《金融时报》（Financial Times）刊载的 1999 年 7 月 8 日的欧元、英镑、瑞士法朗、美元和日元的利率互换报价。

表　2.4

INTEREST RATE SWAPS

	Euro-E		£ Stlg		SwFr		US $		Yen	
Jul 08	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1 year	3.03	3.06	5.44	5.47	1.83	1.86	5.77	5.80	0.26	0.29
2 year	3.49	3.53	5.91	5.95	2.28	2.36	6.08	6.11	0.49	0.52
3 year	3.86	3.90	6.21	6.25	2.61	2.69	6.26	6.29	0.74	0.77
4 year	4.15	4.19	6.29	6.34	2.86	2.94	6.37	6.40	1.00	1.03
5 year	4.37	4.41	6.30	6.35	3.06	3.14	6.44	6.47	1.25	1.28
6 year	4.56	4.60	6.27	6.32	3.24	3.32	6.51	6.54	1.49	1.52
7 year	4.73	4.77	6.21	6.26	3.41	3.49	6.57	6.60	1.70	1.73
8 year	4.89	4.93	6.15	6.20	3.56	3.64	6.63	6.66	1.88	1.91
9 year	5.01	5.05	6.10	6.15	3.69	3.77	6.67	6.70	2.04	2.07
10 year	5.10	5.14	6.03	6.08	3.81	3.89	6.72	6.75	2.18	2.21
12 year	5.26	5.30	5.96	6.02	4.00	4.10	6.78	6.81	2.43	2.46
15 year	5.43	5.47	5.89	5.96	4.23	4.33	6.82	6.85	2.72	2.75
20 year	5.57	5.61	5.82	5.89	4.48	4.58	6.83	6.86	2.92	2.96
25 year	5.65	5.69	5.74	5.83	4.60	4.70	6.82	6.85	2.97	3.02
30 year	5.68	5.72	5.67	5.76	4.68	4.78	6.82	6.85	3.01	3.06

Bid and ask rates as of close of London business. US $ is quoted annual money actual/360 basis against 3 months Libor, £ and Yen quoted on a semi-annual actual/365 basis against 6 months Libor, Euro/Swiss Franc quoted on annual bond 30/360 basis against 6 month Euribor/Libor with the exception of the 1 year rate which is quoted against 3 month Euribor/Libor.
Source: Intercapital Europe Limited.

利率互换最长可达30年。买进价低于卖出价，因为买方要支付固定利率换取浮动利率，卖方支付浮动利率换取固定利率，所以这一报价习惯是合适的。

为了叙述简单起见，下面我们讨论定价问题时不区分买进价和卖出价。

为了对利率互换定价，我们先来看带息票债券（如前面所述的中长期国库券）的定价。带息票债券是固定利率债券，定期凭息票领取固定数额的利息，到期偿还以面值 Par 计算的本金。现金流图如图2.6所示：

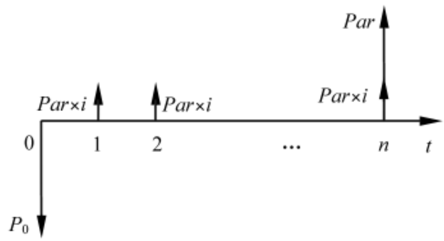

图　2.6

其中 i 就是息票利率，所以 $Par\times i$ 是每期支付的利息。如果对于这种债券，市场根据它的风险状况所要求的折现率（资金成本）为 r，则有净现值关系：

$$NPV = -P_0 + \sum_{t=1}^{n}\frac{Par\times i}{(1+r)^t} + \frac{Par}{(1+r)^n} = 0$$

前面已经说过，如果息票利率 i 和资金成本 r 相等，即 $i=r$，就是平价债券，有 $P_0=Par$。

现在我们用浮动利率筹措一笔数额等于一项平价债券的面值 Par 的资金，筹措的资金就用来投资于这项平价债券。假定筹资和投资的付息期是严格匹配的。这两件事的现金流图见图2.7的左侧。

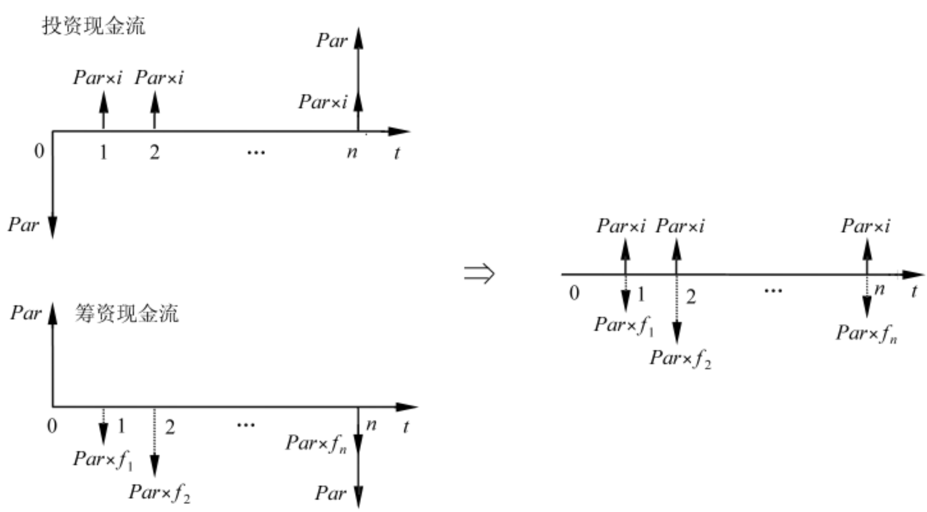

图　2.7

如果我们将这两个现金流图合并到一起，抵消掉所有数额为面值 Par 的现金流入流

出，就得到图 2.7 右侧的现金流图。我们发现，这正好是利率互换协议卖方的现金流（参见图 2.5）。所以，一个利率互换的空头（即卖方头寸）就等价于用浮动利率筹资的头寸和投资于一项平价债券的头寸的组合，而互换的定价（定出固定利率）就变成定出平价债券的息票利率。这是金融工程组合分解技术的典型使用。

请注意，为了对利率互换定价，这里平价债券的风险必须与对应的浮动利率的风险相匹配。对于最普通的利率互换（即所谓 plain vanilla interest swap）来说，浮动利率应该是无风险利率。因此，未来浮动利率的预期值就是远期利率。于是就可以这样来确定平价债券的预期收益率：采用作为浮动利率未来值预期的远期利率作为平价债券的折现率（即平价债券的预期收益率），使平价债券的净现值为零来定出其收益率。但是要注意，这里的折现率将是随时间变化的。

不失一般性，为了说明简单起见，我们假定现金流发生的时间间隔就是 1 年。以 f_1，f_2，…，f_n 记相应于浮动利率的远期利率。由前面第 3 节所述，可换算出“零息票利率集” r_t：$t=1,2,\cdots,n$：

$$1+r_t=\sqrt[t]{\prod_{j=1}^{t}(1+f_j)}$$

用这一零息票利率集作为折现率，对平价债券折现，有：

$$NPV=-Par+\sum_{t=1}^{n}\frac{Par\times i}{(1+r_t)^t}+\frac{Par}{(1+r_n)^n}$$

由无套利原理知，应有 $NPV=0$，由此解出

$$i=\frac{1-\dfrac{1}{(1+r_n)^n}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+r_t)^t}}$$

这就是利率互换的定价结果。这种定价方法称为“零息票定价技术”，名称的来源是因为采用了 r_t 后，每一份息票都可以看作一份零息票债券（即折现债券）。

这里需要强调两点：第一，本章开头所指出的对于不同期限的现金流应当采用不同的折现率 r_t：$t=1,2,\cdots,n$，这些 r_t 实际上就是零息票利率；第二，上述采用了 r_t 后，每一份息票都可以看作一份零息票债券（即折现债券）。依据这样的理论分析，在实际的金融市场中产生了政府债券（主要指国库券）的“剥离”产品，即把息票和本金剥离开来单独交易。这是一项重大的金融工程创造。因为这种新型的剥离产品能够更好地符合投资者的收益/风险偏好，所以创造出了实际的社会经济价值。

为了进一步加深对组合分解技术的印象，我们再来看图 2.7 左下方的筹资现金流。这个现金流图可分解成由图 2.8 所示的两个图的组合。

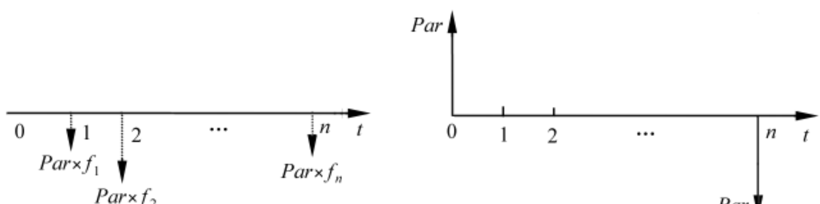

图 2.8

根据无套利规则，这两个现金流组合到一起时的净现值为零。所以，支付浮动利息的现金流（图 2.8 左）和图 2.8 右的镜像现金流（见图 2.9）是等价的。

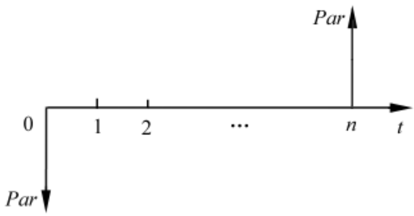

图 2.9

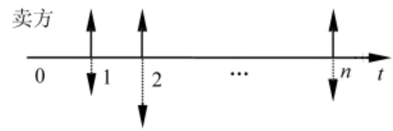

图 2.10

所以在设计时，可以用这个简单的现金流图来代替原来比较复杂的现金流图。

现在我们来看货币互换，上面这个简化的替代方法就特别有用。先来看前述利率互换的卖方的现金流图 2.10。

然后我们用上面的替代办法，即用相等的期初本金流出和期末现金流入来取代期间的浮动利息的流出，得到图 2.11。

在固定利率与浮动利率互换中，采用前述零息票定价技术，图 2.11 现金流的净现值为零。

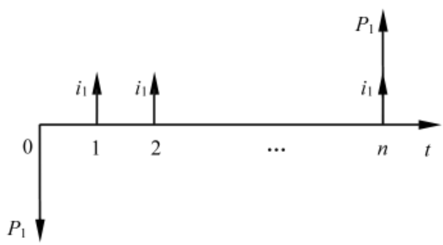

图 2.11

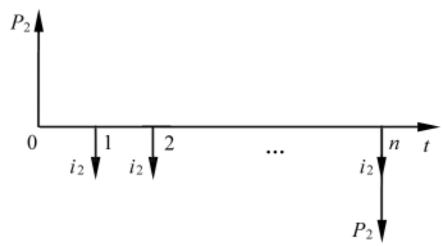

图 2.12

如果对第二种货币做一个反向的结构，就得到图 2.12。

把图 2.11 和图 2.12 并到一起，使 P_1 和 P_2 按开始互换时的即期汇率二者相等，因此可以互相抵消，得到图 2.13。

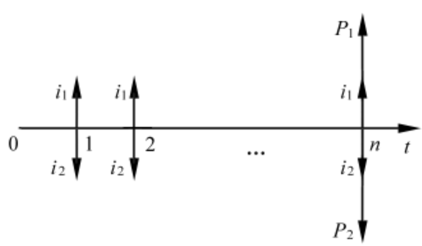

图 2.13

这就是固定利率对固定利率的货币互换。归结起来，做法是：

1）按期初的即期汇率定出 P_1 和 P_2，对 P_1 和 P_2 分别按各自货币做浮动利率与固定