国家自然科学基金重大项目（金融工程）丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

宋逢明　著

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第四章　指数模型和套利定价理论

资本资产定价模型对于投资策略的选择具有重要的指导意义，而且，其表现形式非常简洁优美。除了在上一章小结里已经讨论过的，在实际应用中还存在以下问题。

第一，要实际地计算有风险市场组合，如果不是说做不到，也是非常繁重复杂的。试想，要测算出有风险市场组合里许多种股票的预期收益率、方差和彼此之间的协方差，统计计算的工作量会有多大？更何况还要随时根据市值的变化来调整比重。即使有计算机高速运算能力的支持，对于一般的投资者来说，仍然是很不方便的。第二，证券市场线实际只考虑了有风险市场组合的预期收益率对证券或证券组合预期收益率的影响，即把市场风险（系统风险）全部集中地表现在一个因素里，这样的分析自然过于笼统。事实上，影响总体市场环境变化的宏观因素是多方面的，可以集中地表现为一些宏观经济变量（经济指数）的变化，如国民收入、通货膨胀率、利率水平、能源价格，等等。这样，分析单个或多个因素对证券或证券组合市场价值（包括预期收益率和相关的风险）的影响，当然是很有实际意义的。

我们通过介绍指数模型来回答这两个问题，并进一步阐述前一章所提到的指数化投资策略。

为了进一步加深对无套利均衡分析方法的理解，我们要在本章讨论套利定价理论（APT——arbitrage pricing theory）。套利定价理论本身是一项非常重要的现代金融学理论成果。资本资产定价模型的成立需要许多有关市场环境的理想化条件，套利定价理论集中强调无套利原则，因此在某些方面可以弱化与实际不符的要求。但套利定价理论与资本资产定价模型相比各有优劣，我们将进行仔细的比较分析。

1. 单指数模型

表 4.1 的统计数据反映了公司 i 的股票收益率和国内生产总值（GDP）的增长率（简记为因素 G）和通货膨胀率（简记为 I）6 年的统计情况。

表　4.1

年度	GDP 的增长率 (G)	通货膨胀率 (I)	公司 i 的股票的实际收益率 与无风险利率的差（$r_i - r_f$）
1	5.7%	1.1%	14.3%
2	6.4	4.4	19.2
3	7.9	4.4	23.4
4	7.0	4.6	15.6
5	5.1	6.1	9.2
6	2.9	3.1	13.0

我们先只考虑一个宏观经济指数(即 G 这一个因素)对公司 i 的股票收益率的影响。

在第二章里,我们已经详细地讨论过市场对无风险利率的预期变化(利率的期限结构)的问题。为了把问题分析清楚,我们把无风险利率的变化放到一边,只考虑宏观经济变量对风险补偿的影响,即研究 G 与公司 i 的股票收益率的风险补偿 $r_i - r_f$ 的关系,并把 r_f 当作常量(外生变量)处理。

用最简单的一元线性回归(最小二乘法)可以回归出二者的关系如图 4.1,同时得出方程

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i G + e_i$$

其中 r_i,G 和 e_i 都是随机变量,α_i 和 β_i 是由回归确定的系数。因为我们只考虑 G 一个宏观变量的作用,即认为只有 G 是产生市场风险(系统风险)的因素,所以 e_i 只反映企业风险(非系统风险)。市场的交易只对系统风险提供风险补偿,所以一定有 $E(e_i)=0$。即有

$$E(r_i) - r_f = \alpha_i + \beta_i E(G)$$

这里 $E(\cdot)$当然表示数学期望值(即预期值)。

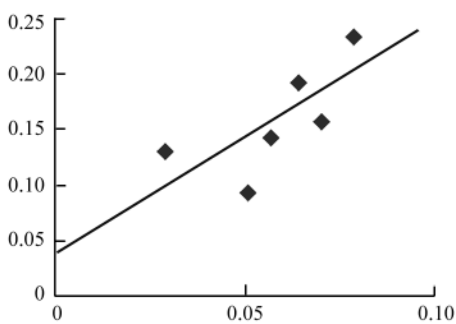

图 4.1

α_i 表示如果 GDP 的预期增长率为 0 时股票预期的风险补偿,β_i 则是公司 i 的股票的预期风险补偿对 GDP 的预期增长率的敏感度。由图 4.1 知,$\alpha_i=4\%$。β_i 实际上就是图 4.1 中回归直线的斜率,所以 $\beta_i=2$。如果预期 GDP 的增长率为 5%,则公司 i 的股票的预期风险补偿将是 4%+2×5%=14%。如果预期 GDP 的增长率提高 1 个百分点,则股票的预期风险补偿将提高 2 个百分点,如果无风险利率不变的话,则股票的预期收益率也将提高 2 个百分点。在我们的实例里,第 6 年 GDP 的增长率是 2.9%,而股票的实际风险补偿是 13%,按回归公式计算的 α_i 是 4%,β_i 为 2。因此,有+3.2%(13%-(4%+2×2.9%))的股票风险补偿(亦即股票收益率)是来自公司 i 自身的贡献(由 e_i 给出),与市场的总体情况无关。

现在我们来看公司 i 的股票的收益风险补偿的方差。因为 e_i 与 G 不相关,所以可以导出

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_G^2 + \sigma_{ei}^2$$

前面 $\beta_i^2 \sigma_G^2$ 反映了系统风险,后面的 σ_{ei}^2则是非系统风险。如果经统计测算出 GDP 增长率的方差是 $\sigma_G^2=0.0003$,同样用统计测算出描述非系统风险的 σ_{ei}^2是 0.00152,则可算出股票收益的风险补偿的方差为 0.00272。

再来看协方差。如果另外有一家公司 j 的股票，根据其业绩表现统计测算出它的 $\beta_j=4$。股票 i 和 j 的收益风险补偿的协方差可以容易地按下式算出。

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_G^2$$

所以有 $\sigma_{ij}=2\times4\times0.0003=0.0024$。

这样一来已经大大地减少了计算的工作量。因为如果组合里有 n 项资产，计算组合的方差——协方差矩阵需要进行 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次方差——协方差的测算，但现在只需要测算 n 个 β_i 和 1 个 σ_G^2 就可以了。如果 $n=50$，则前者需要 1 275 次测算，后者只需 101 次，工作量相差颇为悬殊。

2. 市场模型

第三章讨论的资本资产定价模型实际上就是一种特殊的单指数模型。

我们先用有风险市场组合的收益率的风险补偿来作为宏观经济指数。于是有

$$r_i-r_f=\alpha_i+\beta_i(r_M-r_f)+e_i$$

因为上述关系对于证券组合也一样成立，如果 i 就代表有风险市场组合本身，那么回归结果一定会有，$\alpha_M=0$，$e_M=0$ 和 $\beta_M=1$。

任何证券 i 的风险补偿和有风险市场组合的风险补偿之间协方差就应该是

$$\sigma_{iM}=\beta_i\beta_M\sigma_M^2=\beta_i\sigma_M^2$$

请注意，因为我们把无风险利率作为常数处理，所以风险补偿之间的协方差和收益率之间的协方差是一样的。从而

$$\beta_i=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

这里的 β_i 和我们在第三章介绍的资本资产定价模型（证券市场线）里的 β 系数是完全一样的，这也就是我们为什么把指数模型里对宏观经济变量变化的敏感度也定义为 β 的原因。

于是我们得到

$$E(r_i)-r_f=\alpha_i+\beta_i(E(r_M)-r_f)$$

与资本资产定价模型做比较，多了一个 α_i。α_i 是证券的收益超出由资本资产定价模型给出的市场均衡收益率的部分。因此，如果处于均衡状态，对所有的资产来说，都应该有 $\alpha_i=0$。

如果在市场上有一项共同基金 A，它的运作水平使 $\alpha_A>0$，将会出现什么情况呢？例如，现在市场的无风险利率是 6%，有风险市场组合的风险补偿是 8%，基金组合 A 的 β 值是 0.5，$\alpha_A=1\%$。这时 A 点会落在证券市场线的上面。现在我们断言：

1）A 点和有风险市场组合 M 点生成的双曲线不会在 M 点与资本市场线相切。因为如果相切的话，将会导出 A 点必定落在证券市场线上的结论（参见第三章的附录 2）。

2）A 点也一定不会落在有效组合边界上。否则，由两基金分离定理知 A 点和 M 点生成的连线就是有效组合边界，也就与第 1 点不符。

这样，优化地组合 A 点和 M 点得到的新的组合就会落到资本市场线的上面（见图

4.2 中 B 点)。将这个新的组合再与无风险证券组合,就能得到比市场的均衡更好的效益。因此,

> 如果能找到具有正的 α_A 的投资组合,就能够击败市场。

这一点在实践中往往用作制定积极的投资策略的依据。另外,如果对组合 A 容许卖空的话,只要 $\alpha_A \neq 0$ 就可以设计出击败市场的投资策略。当然,此类投资策略要成立,意味着市场一定在某些方面存在着缺陷而导致失衡。我们在第三章正文的讨论中,始终没有考虑市场在某些方面会失衡的情况,但在小结中已经提到了这一点。

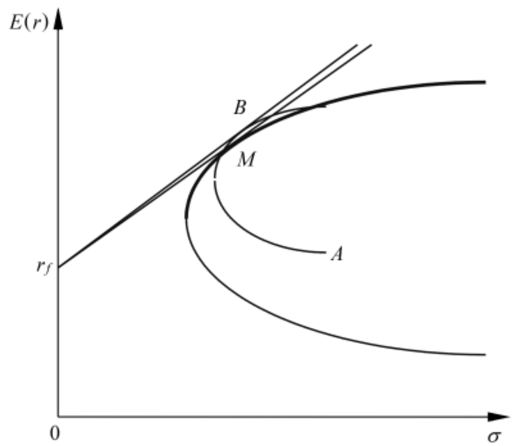

图 4.2

在市场实践中,表示有风险市场组合的宏观经济指数就是证券市场的价格指数,如我们在第三章所提到的一些著名指数。采用指数来代替有风险市场组合,通过统计方法测算出指数的统计特性(如数学期望值、方差等),由前面的讨论知,可以大大简化计算工作量。因此,指数化的投资策略提供了实际可行的途径。并且,就像国库券的收益曲线描述了无风险利率一样重要,证券市场的价格指数也就成为有风险资产估值和定价的基础,也是设计投资策略的强有力的工具。

3. 多指数模型

我们只需考虑 2 个因素的情况,更多因素的情况不难加以推广。在数学上,则需要一点多元回归分析的知识。

回过头来再利用开始时的例子,把 GDP 增长率 G 和通货膨胀率 I 的影响都考虑在内,就有

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_{iG}G + \beta_{iI}I + e_i$$

利用表 4.1 的数据回归后,可算出 $\alpha_i = 5.8\%$,$\beta_{iG} = 2.2$,$\beta_{iI} = -0.7$。如果用第 6 年的实际数据代入,可以算得公司的预期收益的风险补偿是 10%(=5.8%+2.2×2.9%

$-0.7\times 3.1\%$)。所以，不因宏观因素的影响，由企业非系统性因素所产生的影响是 $3\%(13\%-10\%)$。

现在我们来看公司收益率的方差（因为认为无风险利率不变，所以收益率的方差就是收益风险补偿的方差）。有

$$\sigma_i^2 = \beta_{iG}^2\sigma_G^2 + \beta_{iI}^2\sigma_I^2 + 2\beta_{iG}\beta_{iI}\mathrm{cov}(G,I) + \sigma_{ei}^2$$

在我们的数字例子里，不难统计算出 $\sigma_G^2=0.0003$，$\sigma_I^2=0.00029$，$\mathrm{cov}(G,I)=0.00065$，$\sigma_{ei}^2=0.00152$。于是可以算得 $\sigma_i^2=0.00291$，标准差为 $\sigma_i=0.0540$。

在讨论了多指数模型后，我们就可以转入介绍套利定价理论。指数模型最早是由诺贝尔经济学奖得主夏普（William F. Sharpe）在 1963 年发表的，他获奖的主要原因则是在建立资本资产定价模型方面的贡献。

4. 套利概念的深化

我们在讨论无套利均衡分析方法时曾指出，关键之处在于互相复制的头寸在未来的现金流能够实现完全的对冲，如果目前市场中互相复制的头寸的价格不一样，就有了套利机会。当市场的套利力量重建均衡消除套利机会时，就能定出头寸的均衡价格。因此，套利就是利用市场价格的暂时性失衡来无风险地套取利润的活动。

但套利活动还可以倒过来看，如果两项（组合）头寸现在的市场价格相等，而其中一项的未来收入现金流不管发生什么情况都会大于另一项头寸未来的收入现金流，则对前一项头寸做多头并同时对后一项头寸做空头，二者组合起来构筑的组合头寸在目前是所谓的零投资组合，即目前不需要投资者投入任何自己的资金，但未来不管发生什么情况，其组合现金流的净现值是大于零的，所以这也就是一个套利组合。我们在第二章讨论远期价格时已经接触过这种情况。

现在我们来看一个比较复杂、不是显而易见的例子。

假定有 A，B，C，D 四家公司，在两个宏观经济变量（通货膨胀率和真实利率水平）的影响下，其收益率会出现 4 种不同的情况（见表 4.2）。

表 4.2

	真实利率高		真实利率低	
	通货膨胀率高	通货膨胀率低	通货膨胀率高	通货膨胀率低
情况发生概率	25%	25%	25%	25%
股票	收益率（%）			
A	−20	20	40	60
B	0	70	30	−20
C	90	−20	−10	70
D	15	23	15	36

这 4 种股票目前的价格、预期收益率、标准差和相关系数矩阵见表 4.3。

表 4.3

股票	当前价格	预期收益率(%)	标准差	相关系数矩阵			
				A	B	C	D
A	10元	25	29.58%	1.00	−0.15	−0.29	0.68
B	10元	20	33.91	−0.15	1.00	−0.87	−0.38
C	10元	32.5	48.15	−0.29	−0.87	1.00	0.22
D	10元	22.25	8.58	0.68	−0.38	0.22	1.00

根据这些数据我们很难直接看出套利机会。现在我们把A,B,C三种股票以等权重组合起来,再与股票D进行比较,得到表4.4。

表 4.4

	真实利率高		真实利率低	
	通货膨胀率高	通货膨胀率低	通货膨胀率高	通货膨胀率低
A,B,C的等权重组合	23.33%	23.33%	20.00%	36.67%
D	15.00%	23.00%	15.00%	36.00%

根据表4.4可算出A,B,C三种股票的组合和D股票的预期收益率、标准差和相关系数,如表4.5。

表 4.5

	预期收益率(即平均值)	标准差	相关系数
三种股票的组合	25.83%	6.40	0.94
D股票	22.25%	8.58	

这两种投资方式并不是完全正相关的。因此,它们并不能完全互相复制。但是,组合的预期收益率高于D股票,标准差又小于D股票,所以组合明显优于D股票。因此,任何投资者,不管其对风险的厌恶程度如何,都可以利用这种相比较的优势来套利。套利的方法很简单,只要相应地对股票D做空头并将卖空所得再同时作A,B,C三种股票的组合多头即可。

假设卖空300 000万股股票D,将所得的3 000 000万元分别购买100 000万股股票A,B和C。在不同情况下的现金流如表4.6。

表 4.6

股票	即时投资现金流(万元)	真实利率高		真实利率低	
		通货膨胀率高(万元)	通货膨胀率低(万元)	通货膨胀率高(万元)	通货膨胀率低(万元)
股票A	−1 000 000	−200 000	200 000	400 000	600 000
股票B	−1 000 000	0	700 000	300 000	−200 000
股票C	−1 000 000	900 000	−200 000	−100 000	700 000
股票D	3 000 000	−450 000	−690 000	−450 000	−1 080 000
组合	0	250 000	10 000	150 000	20 000

从即时现金流来看，我们的投资组合是零投资组合，即开始（至少在理论上）可以完全不需要任何资金投入。但在以后则不管发生什么情况都能得到正的利润。这当然是套利。只要这一机会不消失，套利就可以一直进行下去。而且从理论上讲，只需有一位投资者就可以运作很大规模的资金进行套利。市场当然会很快地做出反应，股票 D 的价格会下跌，其他三种股票的价格会上升，套利机会就被消除掉。

只要存在无风险的套利机会，从理论上说，套利者会倾向于构筑无穷大的套利头寸来套取无穷大的利润。这种巨大的套利头寸马上就成为推动市场价格变化的市场力量，迅速地消除掉套利机会。

但是我们必须认清排除无风险套利机会建立市场价格均衡和收益/风险权衡关系建立市场价格均衡这二者之间的区别。区别在于：

> 收益/风险权衡关系所主导的市场价格均衡，一旦价格失衡，就会有许多投资者调整自己的投资组合来重建市场均衡，但每位投资者只对自己的头寸做有限范围的调整。套利则不然，一旦出现套利机会，每一位套利者都会尽可能大地构筑套利头寸。因此从理论上讲，只需要少数几位（甚至在理论上只需一位）套利者就可以重建市场均衡。

因此，无套利均衡分析比收益/风险权衡的均衡分析要强得多。收益/风险权衡分析只是经济学中供需分析的一个例子，而无套利均衡分析则是现代金融学特有的研究分析方法。正因为金融市场的均衡是由套利力量建立的，所以金融市场的效率远高于一般的商品和服务市场。

我们来看资本资产定价模型（CAPM）。CAPM 是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡，每一位投资者都按照自己的收益/风险偏好选择位于有效组合边界上的投资组合。如果市场组合中某一项证券价格失衡，资本市场线就会发生移动，所有的投资者都会吸纳价值被低估的证券而抛出价值被高估的证券。所以重建市场均衡的力量来自于许多投资者的共同行为，而每位投资者只是小范围地调整其投资组合的头寸。

请注意，在我们的理论概念中，套利必须是无风险的。但在实际的市场操作中，金融业者往往采取比较宽泛的定义。他们的套利概念并不严格要求完全无风险，只要是搜寻定价失衡机会的套作就都可称为套利。有时就把这种套利称作风险套利。

我们在以后讨论衍生工具时会发现，因为衍生工具的价格受其标的物的价格的制约，对于此类金融工具，严格的无套利定价在实际中是可以操作的。对于股票等原生工具来说，无套利分析必须和风险分散化结合起来讨论。

5. 单因素的套利定价理论（APT）

套利定价理论（APT——arbitrage pricing theory）是司蒂纹·罗斯（Stephen Ross）在 1976 年发表的。虽然套利定价理论真正有用的是多因素的情况，但为了加深理解起见，我们先来考虑只存在一个具有系统性影响的宏观因素的情况。并且，为了在表达上更一般化，我们把这个宏观因素记为 F。

单因素的套利定价模型中先有这样的关系

$$r_i = E(r_i) + \beta_i F + e_i$$

这里 r_i,F 和 e_i 是随机变量,r_i 是第 i 项金融工具的实际实现的收益率,$E(r_i)$是其预期收益率(期望收益率亦即收益率的概率平均值),F 是宏观经济因素的实际值,请注意,它的预期值(概率平均值)应当为零。所以,F 的值实际就是对预期值的偏离。e_i 则是企业所特有原因对所发行的金融工具的收益所造成的扰动。请注意,e_i 的预期值也是零。而且,非常重要的是,e_i 不但对宏观因素 F 是不相关的,而且对于不同的 i 和 j,e_i 和 e_j 互相间也都是不相关的。如果我们回顾一下对 CAPM 的介绍,在讨论风险的分散化时,曾经提到系统风险是由各种金融工具在收益变动上存在某种"同向性",经过投资分散化后,组合的方差只与组合中证券的平均协方差有关。在这里,e_i 只代表纯粹的非系统风险,它们不但与产生系统风险的宏观因素 F 不相关,而且收益变动不再有任何"同向性"(以及"反向性"),因此彼此之间也都不相关,即所有的彼此相关性都已被分离到宏观因素 F 中。所以,这一模型将系统风险和非系统风险严格地分开。

举例来说,如果宏观因素 F 取作未预期的 GDP 的增长率的变化,GDP 增长率的预期是 4%,而实际增长只有 3%,于是 $F=-1\%$。β_i 是第 i 项金融工具的收益率对宏观因素 F 的敏感度,这里假定 $\beta_i=1.2$。于是,这项金融工具实际实现的收益率因为宏观因素的影响将比预期的收益率低 1.2%。再加上非系统风险的影响 e_i,就可以确定实际实现的收益率。

现在我们来看一个非系统风险被充分分散化掉的投资组合 P。在这个组合里,n 项金融工具的权重为 w_i,$i = 1,\cdots,n$,$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$。于是组合的收益率为

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F + e_P$$

此处有

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

$$e_P = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$$

我们也就可以求出组合的方差

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P)$$

这里 σ_F^2 是宏观因素的方差,$\sigma^2(e_P)$是组合的非系统风险,由下式给出

$$\sigma^2(e_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma^2(e_i)$$

(因为各个 e_i 彼此之间不相关,所以协方差项都为零)。

为了分析简单起见,假定组合中各项金融工具的权重都相等,即有 $w_i=\frac{1}{n}$,$i=1,\cdots,n$。于是有

$$\sigma^2(e_P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma^2(e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2(e_i)}{n} = \frac{1}{n}\,\overline{\sigma^2(e_i)}$$

其中$\overline{\sigma^2(e_i)}$代表各项金融工具的平均方差。显然,当 n 很大时,组合的方差就会变得很小,即非系统风险通过投资分散化被消除掉。因此,对于一个充分分散化的投资组合来说,其

收益率和风险为

$$r_P = E(r_P) + \beta_P F$$

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_F^2$$

请注意，在一个充分分散化的投资组合中，各项证券的比重不一定是要等权重的。

如果有两个充分分散化的投资组合 A 和 B，有 $\beta_A=\beta_B$，就必定有 $E(r_A)=E(r_B)$，否则要出现套利机会。例如，若 $\beta_A=\beta_B=1.0$，$E(r_A)=10\%$，$E(r_B)=8\%$，我们卖空价值 100 万元的组合 B，同时将这卖空所得的 100 万元投资于组合 A，就能套取 2 万元的无风险利润。算式如下

到期 A 多头的收益	$(10\%+1.0\times F)\times 100$ 万元
到期 B 空头的支付	$-(8\%+1.0\times F)\times 100$ 万元
净利润	$2\%\times 100$ 万元 $=2$ 万元

因此，

> 如果两个充分分散化的投资组合有相同的 β 值，它们在市场中必定有相同的预期收益。

这里，读者一定要清楚地认识到，这一结论是根据上面的两个等式得出的。如果两个充分分散化的投资组合有相同的 β 值，描述风险的方差就是相等的（第二个等式），如果预期收益率不相等，则由第一个等式知它们的实际发生的收益率就会不相等，于是就会出现无风险套利机会。

对于有不同 β 值的充分分散化的投资组合，其预期收益率中风险补偿必须正比于 β 值，不然也将发生无风险套利。参见图 4.3，假定无风险收益率是 $r_f=4\%$，有一充分分散化的投资组合 C 的 β 值为 $\beta_C=0.5$，具有预期收益率 6%。在图中，代表投资组合 C 的点位于连接无风险资产和组合 A 的直线的下方。现在我们来看另一个投资组合 D，这个组合一半由组合 A 另一半由无风险资产组成。这样，组合 D 的 β 值为 $\beta_D=1/2\times 0+1/2\times 1.0=0.5$，预期收益率是 $E(r_D)=1/2\times 4\%+1/2\times 10\%=7\%$。组合 D 和组合 C 的 β 值相等而预期收益率不等，如前所述，会发生套利。因此，所有充分分散化的投资组合的预期收益率和 β 值的关系都应当是落在从 r_f 点出发的直线上，各个组合的风险补偿的大小正比于其 β 值。

现在我们把有风险市场组合看作一个充分分散化的投资组合，再以有风险市场组合的未预期到的收益变化作为系统风险的度量。有风险市场组合的 β 值当然为 1，因为产生系统风险的因素就是它本身。代表有风险市场组合的 β 值（$\beta_M=1$）和预期收益率之间的关系的点也就落在图 4.3 的直线上。于是对任意充分分散化的投资组合，其预期收益率和 β 值的关系就可表示成

$$E(r_P) = r_f + [E(r_M) - r_f]\beta_P$$

这实际上就是资本资产定价模型中的证券市场线。但是请注意，在导出资本资产定价模型时，需要许多有关市场完善性和环境的无摩擦性的假设，这里在套利定价理论（APT）的研究中，则没有用到这些假设。这是 APT 理论的优越性，同时也说明，即使原来在 CAPM

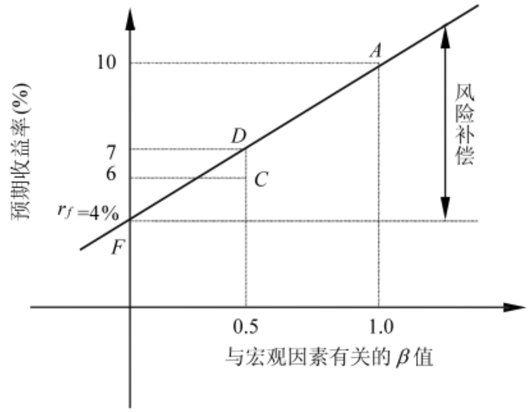

图 4.3

中的那些限制性条件不严格成立，CAPM 所揭示的关于预期收益率和 β 值之间的关系也至少是近似地成立的。

还有一点非常值得注意：在 CAPM 里，必须依靠有风险市场组合才能导出资本市场线和证券市场线，即有风险市场组合是定价的基准。APT 则不需要这个唯一的基准，任何一个充分分散化的投资组合都可以作为基准来导出证券市场线。这样一来，任何指数化的投资组合（它一定是非系统风险被充分分散化的投资组合）都可以用来为证券定价。这又是 APT 的一项优越性。但以上我们只讨论了充分分散化的投资组合的证券市场线，下面我们来看单个证券的情况。

根据前面的讨论，对于任意两个充分分散化的投资组合 P 和 Q，有关系式

$$\frac{E(r_P)-r_f}{\beta_P}=\frac{E(r_Q)-r_f}{\beta_Q}$$

套利定价理论要告诉我们的是，对于组合中的任意两项不同的证券来说，同样的关系式几乎也都成立。即对任两项不同的金融工具 i 和 j，有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=\frac{E(r_j)-r_f}{\beta_j}=K$$

此处 K 是对几乎所有的证券都一样的一个常数。

要注意的是，我们说“几乎所有的证券”，意思是说会有少数的证券不满足这一关系式。

这个结果的证明的数学推理比较麻烦，我们把它放到本章的数学附录里。

对于任意组合中的金融工具 i，有

$$E(r_i)=r_f+\beta_i K$$

所以对任何充分分散化的投资组合，就一定有

$$E(r_P)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)=r_f\sum_{i=1}^{n}w_i+K\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i=r_f+\beta_P K$$

亦即有

$$\frac{E(r_P)-r_f}{\beta_P}=K$$

对所有充分分散化的投资组合来说，K 都是相同的。

6. 多因素的套利定价理论

现在把前述结果推广到多个因素产生系统风险的情况。我们只需讨论两个因素的情况，更多因素的情况不难加以推广。

两个宏观因素的模型是这样的

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + e_i$$

因素 F_1 比如说代表对 GDP 预期值的偏离，因素 F_2 则代表未预期到的通货膨胀率的变化，它们的预期值都等于零，因为它们代表的都是对预期值的偏离。同样，e_i 代表企业特有的风险，也是对预期值的偏离，所以预期值也为零。F_1，F_2 和 e_i 都互不相关，而且，不同证券的 e_i 和 e_j 彼此之间也都不相关。

首先我们引入因素组合的概念。因素组合是非系统风险已经充分分散化而消除掉的组合，对其中一个因素的 β 值为 1 而对其他因素的 β 值都为 0。这种因素组合的构造在实践中是行得通的，因为有价证券的种类非常多，而因素的个数又非常有限。在多因素的证券市场线关系中，因素组合将起到基准的作用。

比如有因素组合 1 和 2，前者的预期收益率为 $E(r_1)=10\%$，后者的预期收益率为 $E(r_2)=12\%$，假定无风险利率为 4%，则因素组合 1 的风险补偿为 $10\%-4\%=6\%$，因素组合 2 的风险补偿为 $12\%-4\%=8\%$。

现在来看任意一个充分分散化的投资组合 A，它对两个宏观因素的 β 值分别是 $\beta_{A1}=0.5$ 和 $\beta_{A2}=0.75$。多因素的套利定价理论指出，投资组合 A 的总的风险补偿应当是投资者承受这两种宏观因素的系统风险所应得到的风险补偿的和。而每种宏观因素的系统风险的补偿等于相对于该因素的 β 值乘以因素组合的风险补偿，即有

$$\begin{aligned}&\beta_{A1}[E(r_1) - r_f] + \beta_{A2}[E(r_2) - r_f]\\&= 0.5 \times 6\% + 0.75 \times 8\% = 9\%\end{aligned}$$

于是，投资组合 A 的预期收益率就是无风险收益率加上总的风险补偿，为 13%。

如果投资组合 A 的预期收益率不等于 13%，例如是 12%，则可以构筑如下的组合头寸：取权重为 50%的因素组合 1，权重为 75%的因素组合 2，再加上权重为 −25%的无风险证券（权重是负数意味着以无风险利率借入），构成一个新的组合。这个组合的预期收益率为 $0.5\times10\%+0.75\times12\%-0.25\times4\%=13\%$。同时构筑这个组合的多头和组合 A 的空头，就能套取无风险利润。算式如下

到期套利组合多头的收益	$13\%+0.5\times F_1+0.75\times F_2$
到期组合 A 空头的支付	$-(12\%+0.5\times F_1+0.75\times F_2)$
净利润	1%

所以这是零投资组合能够套取无风险利润的情形。

从这个简单的例子我们可以发现，套利组合是这样构筑的，对于任意一个暴露在 F_1 和 F_2 这两个宏观因素的系统风险下的投资组合 P，分别以其 β 值 β_{P1}，β_{P2} 为权重选取因素组合 1 和 2，再加上权重为 $1-\beta_{P1}-\beta_{P2}$ 无风险证券（若 $1-\beta_{P1}-\beta_{P2}<0$，表示无风险证

券的卖空或以无风险利率借入资金)。这一套利组合实际上复制了组合 P,所以组合 P 可由此套利组合给出定价

$$\begin{aligned} E(r_P) &= \beta_{P1}E(r_1) + \beta_{P2}E(r_2) + (1 - \beta_{P1} - \beta_{P2})r_f \\ &= r_f + \beta_{P1}[E(r_1) - r_f] + \beta_{P2}[E(r_2) - r_f] \end{aligned}$$

这一多因素模型显然是单因素模型中证券市场线的推广。

最后,套利定价理论的结果是把上述多因素模型推广到单个证券的情况,有

$$E(r_i) = r_f + \beta_{i1}[E(r_1) - r_f] + \beta_{i2}[E(r_2) - r_f]$$

所以,如果有一证券相对于两个宏观因素的 β 值分别为 $\beta_{i1}=0.5$ 和 $\beta_{i2}=0.75$,则它的均衡定价的预期收益率就一定是 13%。

如果读者能够看懂本章附录中单因素模型的数学证明,则很容易将证明推广到多因素的情况。

7. APT 和 CAPM 的比较

首先要注意的是,CAPM 和单指数模型在本质上是一样的。但 CAPM 要求有一个有风险市场组合,这在实际中难以实现,因为对于规模比较大的金融市场来说,编制全样本指数是很困难的。单指数模型是利用一个在实际上与理论的有风险市场组合完全正相关的综合指数(如著名的标准普尔 500)来代替实际不存在的有风险市场组合。所以在实际的投资策略的制定中,单指数模型是真正有实用价值的。但单指数模型必须基本上符合我们在上一章概括的 CAPM 的前提条件,另外还要加上在投资周期内,股票收益率的概率是稳定的这样一个条件来保证统计取样测算的可靠性。

通常认为,CAPM 是 APT 的特例,因为 CAPM 是单因素的,一般所指的 APT 是多因素的。其实不然,CAPM 也有多因素的推广结果,例如默顿在 1975 年提出的顾客服务模型(consumer service model)。这一模型与 APT 比较,APT 未能具体定出因素组合的风险补偿,这一模型则考虑到这一问题。另外,更富想象力的模型是布雷顿(D. T. Breeden)提出的基于消费的资本资产定价模型(consumption—based capital asset pricing model)。我们在本书中不介绍这些模型,有兴趣的读者可查阅有关的资料。

APT 与 CAPM 最根本的区别在于,APT 特别强调的是无套利均衡原则。CAPM 是典型的收益/风险权衡所主导的市场均衡,是许多投资者的行为共同作用的结果;而 APT 的出发点则是排除无风险套利机会,少数投资者会构筑大额的套利头寸产生巨大的市场压力来重建均衡。正因为如此,APT 不需要 CAPM 赖以成立的那些有关市场假设的条件。另外,APT 的成立只需要有充分分散化的投资组合,不像单指数模型一定要有对有风险市场组合有替代作用的市场指数。因而,从道理上讲,APT 应该有更广泛的应用。

可是,在建立 APT 理论的过程中,读者可以发现,我们特别说明了,APT 的定价并不是对所有的证券都成立的。当单项资产在市场上定价失衡时,在 CAPM 的条件下,所有的投资者都会同时调整自己的头寸来重建均衡。而 APT 单单强调无套利原则,而且这种无套利均衡定价是通过对充分分散化的投资组合的分析得出的,所以对有的单项资产其定

价结论就不一定成立。所以，在实践中，APT 主要是对组合投资决策起支持作用，对于单项资产的定价（例如在实证会计的研究中），CAPM 和单指数模型则有更广泛的应用。从而，CAPM 的那些有关市场的条件也是我们必须加以考虑的。

在使用 APT 模型时，有一个对宏观因素的识别问题。不同的研究使用了不同的宏观经济指标。但归结起来，大体上都涉及以下三大类：一是总量经济活动参数，如 GDP（或 GNP）的增长率、工业产出、总销售额，等等；二是通货膨胀率；三是与市场利率有关的参数，可以是利率差或利率本身。如果我们考虑股票的均衡价格是未来红利流的折现值，显然以上三类经济参数的变化都会影响到未来红利流和折现率的大小，采用这三类参数作为宏观因素的理由就变得非常直观了。

8. 小结

无套利均衡分析方法是现代金融学研究的基本方法，它和以收益/风险权衡所主导的市场均衡有基本的区别。只要无风险套利机会出现，只需要少数投资者构筑大额的套利头寸，就会产生巨大的市场压力来推动重建均衡。这是与经济学的供需均衡分析（收益/风险权衡所主导的市场均衡分析可以看作特例）基本不同之处，供需均衡是大量市场参与者共同行为的结果。

进行无套利均衡分析的关键技术是复制技术。复制可以从正反两个方向来做：复制未来的现金流，同时检查目前是否有价格失衡的套利机会；也可以是现在的价格相等，复制未来在任何情况下都产生更为有利的现金流，或者未来在任何情况下都产生更为不利的现金流。请注意，无论是都有利还是都不利都会产生套利机会，但必须是在任何情况下都有利或者都不利。

套利定价理论集中强调的是无套利原则。对于充分分散化的投资组合定价来说，比资本资产定价模型有许多优越之处。但是，也正因为只强调无套利原则，对于单项资产的定价，不能保证成立。因为可能出现这样的情况，组合中个别几项资产的定价失衡，但整个组合的定价并未失衡，个别证券的定价失衡起了互相抵消的作用。套利定价理论和资本资产定价模型孰优孰劣，要视实际情况而定。

在金融市场中，市场参与者有各自不同的收益/风险偏好。如果顾及每个市场参与者的偏好来研究价格的供需均衡，会使问题变得非常复杂，以至于无从下手。金融系统无疑是一个复杂系统，由于人的参与使系统的复杂性大为增加。无套利均衡分析抓住了这样一个关键点：只要出现无风险套利机会，则所有的市场参与者都会去套利，而无论其个人的风险偏好如何。从而，市场的均衡是建立在消除套利机会的基础之上，而均衡所确定的价格也就与个人的风险偏好无关。这是现代金融学分析问题的方法论的魅力之所在。

练习题

根据以下数据，对单指数模型中的市场模型 $E(r_I-r_f)=\alpha_I+\beta_I E(r_m-r_f)$ 的参数进行估计，并解释估计结果。如果明年的预期市场收益率为 20%，利用上述模型预测股票组合 P 的预期收益率（$r_f=6\%$）。

年份	市场组合的年平均收益率%	股票组合 P 的年平均收益率%
1	20	22
2	27	27
3	12	15
4	13	16
5	5	9
6	28	27
7	32	31
8	17	19

第四章数学附录

套利定价理论用于单项资产定价的数学证明

我们需要证明,对任两项不同的金融工具 i 和 j,有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=\frac{E(r_j)-r_f}{\beta_j}=K$$

此处 K 是对几乎所有的证券都一样的一个常数。

单因素的套利定价模型是

$$r_i = E(r_i)+\beta_i F+e_i$$

首先我们来看 $e_i=0$ 的情况。

请注意,对于某些金融工具来说,$e_i=0$ 的情况是确实存在的。例如某些指数和指数衍生品类的金融工具。在本章介绍多因素套利定价理论时,我们介绍了因素组合的概念。现在我们假定已经有了关于因素 F 的因素组合,并记该因素组合的预期收益率为 $E(r_F)$。这样来构筑一套利组合 A,这一组合是把资金分投到因素组合和无风险证券上,投入的比例是 $\beta_i:(1-\beta_i)$。我们断言,一定有 $E(r_i)=r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$,不然的话,证券 i 和套利组合 A 之间就会发生无风险套利机会。因为证券 i 和套利组合的实际收益率分别是

$$r_i=E(r_i)+\beta_i F$$

$$r_A=(1-\beta_i)r_f+\beta_i[E(r_F)+F]=r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]+\beta_i F$$

如果 $E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$,显然就会发生套利。

所以有

$$\frac{E(r_i)-r_f}{\beta_i}=E(r_F)-r_f$$

$E(r_F)$和无风险利率 r_f 对于所有的证券来说都是一样的,令 $E(r_F)-r_f=K$,结论就成立。

现在来看 $e_i\neq 0$ 的情况。

我们断言,只有有限项证券,使 $E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$。我们采用反证法。对于很小的 $\varepsilon>0$,如果 n 项证券里,有 $N(n)$项证券使下式成立

$$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|\geqslant\varepsilon$$

我们把 ε 取得非常小,在实际中,比 ε 小的差别是可以不考虑的。

当 $n\to\infty$时,若 $N(n)\to\infty$,则我们的断言不成立。

对于每一项证券 i,我们像 $e_i=0$ 的情况一样地构筑套利组合 A_i。若 $E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]>0$,则对套利组合 A_i 做空头并同时对证券 i 做多头,若 $E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]<0$,则反过来做。这样对冲后得到的收益率将是

$$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|+\delta_i e_i$$

其中

$$\delta_i = \begin{cases} +1, \text{若 } E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f] > 0 \\ -1, \text{若 } E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f] < 0 \end{cases}$$

现在我们采取等权重$\frac{1}{N(n)}$的办法把使$|E(r_i)-r_f-\beta_i[E(r_F)-r_f]|\geqslant\varepsilon$的$N(n)$组对冲头寸再组合到一起,这一组合的预期收益率应当是

$$\frac{1}{N(n)}\sum_{i=1}^{N(n)}|E(r_i) - r_f - \beta_i[E(r_F) - r_f]| \geqslant \varepsilon > 0$$

其方差为

$$\frac{1}{N^2(n)}\sum_{i=1}^{N(n)}\sigma^2(e_i) \leqslant \frac{\bar{\sigma}^2}{N(n)}$$

其中$\bar{\sigma}^2=\max\limits_i\{\sigma^2(e_i)\}$肯定只是一个有限的数。当$n\to\infty$时,若$N(n)\to\infty$,则方差趋于零。但这一组合头寸是零投资组合,它的预期收益率为正而方差趋于零,就有无风险套利机会存在,即市场处于失衡状态。所以当n变得很大时,$N(n)$不能无限制地变大。于是就反证了我们的论断成立,只有有限项证券,使$E(r_i)\neq r_f+\beta_i[E(r_F)-r_f]$。因此,对于大多数证券来说,APT 的结论成立。即有

$$\frac{E(r_i) - r_f}{\beta_i} = E(r_F) - r_f = K$$

由此完成我们的数学证明。