国家自然科学基金重大项目（金融工程）丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明　著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第七章　等价鞅测度模型和无套利均衡基本定理

前两章已经分别讨论了用二叉树定价的动态无套利均衡分析和布莱克-舒尔斯期权定价模型(连续的动态无套利均衡分析)。在这两种情况,我们都引入了风险中性假设的解法。因此我们可以想到,风险中性假设和无套利均衡之间一定有非常重要的联系。在这一章我们将进一步讨论多阶段动态无套利均衡的基本定理,介绍等价鞅测度模型,以帮助读者深入地理解动态无套利均衡和风险中性假设之间的关系。这一部分理论,虽然主要应用于或有要求权(contingent claim)的定价,但可以被认为是现代金融理论的精髓所在。因此,也是金融工程原理的核心之一。当然,这一章的内容相对比较艰深。如果阅读有困难,可以跳过去阅读后面的章节,将不影响内容的连贯性。

1. 多阶段证券市场模型和自融资简单交易策略

虽然在前两章我们已经接触了自融资策略,但为了进一步讲清楚多阶段动态无套利均衡分析的原理,我们先要建立一个尽量简化的多阶段证券市场模型,然后在这个模型的基础上,把讨论限制在简单自融资交易策略的范围。我们也将只讨论离散的情况。这样做的好处是使我们能尽量直接地掌握金融涵义。我们先来看多阶段事件树(图 7.1)。

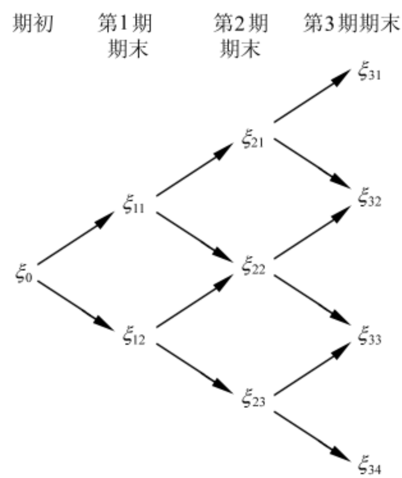


图　7.1

假如证券的交易就是 3 个阶段,每一次交易都在每一期期末集中进行,即由事件树中各节点表示。各节点都是可能发生的事件。这里只画了二叉树的情况,实际上,三叉树、多叉树的情况都是可以的,每一个节点的分叉数目也可以不一样,同一个节点可以是单个节点的后续节点(即后文所讲的“子辈”节点),也可以是若干个节点的后续节点(如图 7.1 的二叉树,部分节点是前面两个节点的共同后续节点)。我们后面用的数字例子将是三叉树。

现在来讨论信息结构的问题。假设现在在期初($t=0$ 时刻),我们或者不进行交易,或者进行交易。如果我们进行交易,现在可以知道的是,到多阶段交易过程终了,所发生的事件一定落在事件集合$\{\xi_{31},\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$之中,但除此而外,一无所知。所以这是在 $t=0$ 时刻所能获得的信息。到了第 1 期期末($t=1$ 时刻),我们就不但知道到多阶段交易过程终了时所发生的事件一定落在事件集合$\{\xi_{31},\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$之中,而且要么落在子集合$\{\xi_{31},\xi_{32},$

$\xi_{33}\}$里,要么落在子集合$\{\xi_{32},\xi_{33},\xi_{34}\}$里。这是在$t=1$时刻所能获得的信息。到了第2期期末($t=2$时刻),我们就不但掌握$t=1$时刻所能获得的信息,而且知道到多阶段交易过程终了时所发生的事件一定会落在子集合$\{\xi_{31},\xi_{32}\}$,$\{\xi_{32},\xi_{33}\}$,$\{\xi_{33},\xi_{34}\}$中的一个。这就构成在$t=2$时刻所能获得的全部信息的结构(其中包括在$t=1$时刻所能获得的信息)。而到第3期期末($t=3$时刻)的信息结构,则不但包括在$t=2$时刻所能获得的全部信息,而且一定知道最终所发生的事件必定是ξ_{31},ξ_{32},ξ_{33}和ξ_{34}中的一个。我们以$\{\Phi_t\}$表示在时刻t的信息结构,显然,若$\tau<t$,则必有$\Phi_\tau\subset\Phi_t$。

现在我们来看一个由$N+1$种证券组成的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$所包含的证券的价格变动过程,这个价格变动过程可以用上图7.1的事件树来表示。ξ_t是事件树上第t期末的一个节点,$S_i(\xi_t)$是第i种证券在节点ξ_t的价格,$\theta_i(\xi_t)$则是在节点ξ_t时组合中第i种证券的数量($\theta_i(\xi_t)$可以为负,这时对第i种证券是卖空)。于是,$P(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)$是组合在节点$\xi_t$时的市场价值。

在图7.1的事件树中,每一事件都是可能发生的事件,则每一事件的发生都有一定的概率分布。由前面第五章的讲解可知,采用动态无套利分析进行证券定价时,其实我们并不需要确切地知道在这一真实的世界里价格变动的概率分布。

有了事件树及其概率分布和价格变动过程及其信息结构,我们就建立起一个最基本的多阶段证券市场模型。

我们进一步假定,标号为$i=0$的证券是无风险证券。如果事件树上的证券价格全部都用无风险利率折现的话,$S_0(\xi)$在所有的节点上就都取相同的现值。因此可用来作为度量其他有风险证券价格(即现值)的度量基准。在本章下面的讨论中,假定所有事件树上的证券价格全部都用无风险利率折现过。我们还假定在事件树上,所有的证券都不产生诸如红利之类的收入,当然市场还被解释为无摩擦的(即不发生任何交易成本)。

下面我们定义简单交易策略。所谓简单交易策略是:

1) 在t时刻投资者只根据当时可获得的所有信息依不同状态选择证券组合,即t时刻投资者持有的证券组合只建立在当时的信息结构Φ_t上,并依赖于当时的状态。

2) 交易时刻t投资者所持有的证券i的价值(即$\theta_i(t)S_i(\xi_t)$)变化不会太大。

3) 投资者只在有限个时刻(即事件树的节点处)交易证券。

我们对这三个条件稍作解释。

关于条件1),由前面讲解证券市场模型的事件树(图7.1)可知,信息结构具有一种“嵌套”的结构,即$\Phi_0\subset\Phi_1\subset\cdots\subset\Phi_T$。越到多阶段交易过程的期末,投资者能够获得的信息越完整。时间越靠前,能得到的信息越少。如果我们对照一下在第五章用二叉树介绍的动态无套利定价技术和第六章介绍的利用风险中性假设求解布莱克-舒尔斯期权定价公式的积分解法,就可以加深理解为什么动态无套利分析方法是由后朝前倒推的,即由未来决定现在,而不是由过去决定将来。因为在我们的理论分析中,市场始终处于均衡状态,所以条件2)的直觉意义是明显的。至于条件3),这是我们的简单模型所给予的限制,在连续时间情况下这个条件会变得十分苛刻。

现在以$\{\theta(\xi)\}$表示一个简单交易策略，显然，$P(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)$是组合在节点$\xi_t$时的市场价值。以$\xi_t^-$表示$\xi_t$的“父辈”节点，即它是一个第$t-1$期末的节点，而节点$\xi_t$是从它那里长出来的(显然，当$t=0$时没有“父辈”节点)。而$\xi_t$显然就是$\xi_t^-$的“子辈”节点，而由$\xi_t$长出来的节点就是$\xi_t^-$的“孙辈”节点，进一步类推，当然就有“重孙辈”节点，等等。所谓自融资简单交易策略是对所有的节点$\xi_t(t>0)$来说，都有$\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t^-)S_i(\xi_t)$。显然，除了起始节点外，在每一个节点处，只是调整了组合中各种证券的头寸，整个组合的价值并没有因为组合中各种证券头寸的调整而发生变化。

因为我们假设市场是无摩擦的，所以在自融资简单策略下，每次交易前后证券组合的价值不变，投资者用出售证券的所得来支付购买证券的成本，即投资者既不投入也不撤出资金。因此可以这样说，在期初$t=0$时刻和期末$t=T$时刻之间，即不需要也不产生资金。在本章后面的讨论中，假定投资者采取的都是自融资简单交易策略。

如果存在一个自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$，在多阶段的证券定价过程中，使由$N+1$种证券组成的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$在期末$t=T$时刻完全复制了另一项资产x在期末$t=T$时刻的价值(x通常指衍生证券或者是或有要求权)，即有$\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)$。此时，我们称该项资产$x$是市场化的，或者说自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$生成了$x$。

若存在一个自融资简单交易策略$\{\theta(\xi)\}$生成了x，即x是市场化的。那么，在期初$t=0$时刻，该证券组合的价值$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$一定等于资产$x$在期初$t=0$时刻的价格$x(0)$。这个结论可由简单的无套利思想解释：投资者在$t=0$时刻以$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$的成本持有证券组合，在经过$t=0,1,2,\cdots,T$等时刻无成本地变换其证券组合使之符合策略$\{\theta(\xi)\}$之后，在$t=T$时刻，在状态$\xi_T$下投资者持有的证券组合的价值$P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)$。在这期间没有再追加或撤出资金，即策略$\{\theta(\xi)\}$可以完全复制资产$x$。因此，若$x$在$t=0$时刻的价格$x(0)$不等于$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$，则可以在资产$x$和依策略$\{\theta(\xi)\}$所持有的证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$之间进行套利。于是，无套利原理告诉我们，一定有$P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=x(0)$。

2. 价格体系和多阶段证券市场模型的生存性

现在，我们给出动态无套利均衡的精确定义。

证券组合$P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$是一个简单套利组合，是指在采用自融资简单交易策略

时，如果在所有期末节点 ξ_T 上，都有 $P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)\geqslant 0$，且至少在其中一个节点上有 $P(\xi_T)>0$，而同时在起始节点有 $P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)\leqslant 0$；或者在所有期末节点 ξ_T 上，都有 $P(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_T)S_i(\xi_T)\geqslant 0$，而同时在起始节点有 $P(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)<0$。显然，简单套利组合的价值可以“无中生有”，因此被称为“白吃的午餐”。动态无套利均衡指套利组合不存在，即没有白吃的午餐。

套利组合存在就说明市场不均衡，在市场均衡时，是没有白吃的午餐的。如果一个定价模型会导出套利组合，则一定出现了不均衡的现象，这个模型也就不能正确地均衡定价。

为了使市场化的资产 x 能被正确定价，必须保证：若有两种自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 和 $\{\theta^*(\xi)\}$ 都能生成资产 x，则一定有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$。因为若不能保证以上条件，即若 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)$ 不等于 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$，假设 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)<\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)$，则构造新的交易策略 $\{\overline{\theta}(\xi)\}$，对于所有的 $t=0,1,2,\cdots,T$ 使得 $\overline{\theta}(\xi)=\theta(\xi)-\theta^*(\xi)$，显然这也是一个自融资的简单策略。有 $\sum_{i=0}^{N}\overline{\theta}_i(\xi_0)S_i(\xi_0)=\sum_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_0)S_i(\xi_0)-\sum_{i=0}^{N}\theta_i^*(\xi_0)S_i(\xi_0)<0$，而 $\sum_{i=0}^{N}\overline{\theta}_i(\xi_T)S_i(\xi_T)=x(\xi_T)-x(\xi_T)=0$。因此，采用自融资简单交易策略 $\{\overline{\theta}(\xi)\}$ 就出现了简单套利组合，从而资产 x 不能被正确定价。于是都能生成资产 x 两种自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 和 $\{\theta^*(\xi)\}$，在期初 $t=0$ 时刻构成的投资组合的市场价值相等。

由前面我们对市场化资产 x 的描述知，x 在期末的价值完全可以由一个自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 来复制。因此，x 实际上是一种衍生资产（衍生证券）。现在我们可以来定义多阶段证券市场的动态完全性：如果市场中存在一组证券 $P=\{S_0,S_1,\cdots,S_N\}$，市场中任一证券 x 都可以通过某一个自融资简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 来生成，这一多阶段证券市场就是动态完全的，否则就不是动态完全的。

如果我们用 X 表示一个多阶段证券市场中所有的证券的集合，用 M 表示所有可以用自融资简单交易策略生成的证券的集合，显然 $M\subseteq X$。如果市场是动态完全的，则有 $M=X$，否则不然。

所谓价格体系的生存性是指参与交易的投资者在这样的价格体系和各自的预算约束下，能找到一个最优交易，使各自的效用最大化。最优交易存在且能达到，这样的经济模型就是均衡模型。

市场中的价格体系可以看作是一个定义在市场中所交易的资产（证券）的函数：x 是一项证券，$\Pi(x)$ 是它的价格。如果一个价格体系只适用于所有可以用自融资简单交易策

略生成的证券的集合 M,则 Π 是 M 上的一个线性函数。我们可以简单地证明如下:

用反证法,假设 Π 不是线性函数。

设自融资简单交易策略$\{\theta^{(1)}(\xi)\}$和$\{\theta^{(2)}(\xi)\}$可分别生成在 M 中的资产 m_1 和 m_2,所以到期末 $t=T$ 时刻有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(1)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_1(\xi_T)$ 和 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(2)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_2(\xi_T)$。则两项资产 m_1 和 m_2 在 $t=0$ 时刻的价格就分别为 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(1)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_1)$ 和 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(2)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_2)$。现在有一个 m_1 和 m_2 的线性组合 $m_3=\alpha m_1+\beta m_2$,如果 m_3 也在 M 中,即 m_3 也可由一自融资简单交易策略$\{\theta^{(3)}(\xi)\}$生成。到期末 $t=T$ 时刻有 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(3)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=m_3(\xi_T)$,$m_3$ 在 $t=0$ 时刻的价格就应该是 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(3)}(\xi_0)S_i(\xi_0)=\Pi(m_3)$。若 Π 不是线性函数,则有 $\Pi(m_3)=\Pi(\alpha m_1+\beta m_2)\neq\alpha\Pi(m_1)+\beta\Pi(m_2)$。设 $\Pi(m_3)=\Pi(\alpha m_1+\beta m_2)>\alpha\Pi(m_1)+\beta\Pi(m_2)$,则可构造一个新的融资策略$\{\theta^{(4)}(\xi)\}=\{[\alpha\theta^{(1)}+\beta\theta^{(2)}-\theta^{(3)}](\xi)\}$,显然这仍是一个自融资简单策略。到期末 $t=T$ 的时刻,因为有 $m_3=\alpha m_1+\beta m_2$ 的关系,我们得到下面的结果 $\sum_{i=0}^{N}\theta_i^{(4)}(\xi_T)S_i(\xi_T)=\sum_{i=0}^{N}[\alpha\theta_i^{(1)}(\xi_T)+\beta\theta_i^{(2)}(\xi_T)-\theta_i^{(3)}(\xi_T)]S_i(\xi_T)=\alpha m_1(\xi_T)+\beta m_2(\xi_T)-m_3(\xi_T)=0$。于是出现了套利组合,与价格体系属于一个均衡的经济模型的前提不相符合,由此得到证明,即 Π 是一个定义在 M 上的线性函数。

如果市场不是动态完全的,即 $M\subset X$,一个价格体系如果只适用于 M,这个价格体系要有生存性,它就一定要能被扩展到对市场中所有的证券所组成的集合 X 都适用,即它同样是 X 上的线性函数,而当把它限制在 M 中时,就是原来的价格体系。而且,这个扩展到 X 上的线性函数的取值严格为正(当然,它在 M 中也严格为正)。

下面我们讲解一下多阶段证券市场模型的生存性涵义。

多阶段证券市场模型的生存性是指:该模型不允许有套利组合出现,而且相对于 M 的价格体系有生存性。也就是说,在一个不存在套利机会的模型中,对于任何属于 M 的衍生证券,一定可以找到一个严格为正的线性函数 Π 表示其价格,对于一个不属于 M 的衍生证券,可以找到一个 Π 的扩展来表示其价格。一个多阶段证券市场模型有生存性即为一个经济均衡模型。我们下面就在一个有生存性的模型中来讨论动态无套利均衡问题。

3. 等价鞅测度

我们在前一章已经讲解过无套利均衡和风险中性假设之间的关系,而风险中性假设又是与公平的赌博联系在一起的。这里牵涉到一个称之为鞅(martingale)的数学概念,下面我们先来讨论它。

鞅是一类特殊的随机过程(在离散情况下,称为随机序列或随机链)。在数学文献和教科书中的讲述往往使数学训练不够的人难以接受,我们在这里则着重通过它的经济学含义进行介绍。

所谓鞅是满足如下条件的一类随机过程(在离散情况下是随机序列(链)):在任何时刻 τ,在当时的信息结构$\{\Phi_\tau\}$的基础上(即可以认为当时所有可以获得的有关随机过程$\{S(t)\}$的信息都已包含在$\{\Phi_t\}$中——请回过头去看一下前面介绍的事件树的信息结构的涵义),如果对随机过程$\{S(t)\}$的某种概率分布,对任意的 $s,t;0\leqslant s\leqslant t$,都有

$$E^*\{S(t)|\Phi_s\}=S(s)$$

反之,满足上述条件的随机过程$\{S(t)\}$是鞅。

这里要解释一下符号 $E^*\{S(t)|\Phi_s\}$的涵义。这一符号表示,在现在时刻 s 的已有信息结构$\{\Phi_s\}$的条件下,有未来时刻 t 的条件概率分布 $P_t^*\{\cdot|\Phi_s\}$,$E^*\{S(t)|\Phi_s\}$表示随机变量 $S(t)$在未来时刻 t 服从这一条件概率分布的条件数学期望值(条件概率平均值)。

例如,在 t 时刻,$S(t)$有 k 个可能的取值 $S^{(1)},\cdots,S^{(k)}$,相应于这 k 个取值的(s 时刻的信息结构$\{\Phi_s\}$)条件概率分布是 $P^*\{\cdot|\Phi_s\}$,其条件概率是 $p_1^*,\cdots,p_k^*$,就有

$$E^*\{S(t)|\Phi_s\}=\sum_{i=1}^{k}p_i^*S^{(i)}$$

现在我们来讲解一下鞅的经济学涵义。

鞅的直观涵义其实非常简单:假如现在是时刻 s,在现在掌握的所有信息$\{\Phi_t\}$的条件下,随机过程$\{S(t)\}$在未来任何时刻 t 取值的数学期望(即概率平均值)就等于现在时刻 s 时 S 的取值 $S(s)$。这说明根据目前掌握的信息作判断,随机过程$\{S(t)\}$在未来的平均取值就等于现在的值。

回忆一下在第五章介绍的公平赌博的概念,很容易看出,鞅和公平赌博是紧密联系在一起的。入局下注的成本和依据当时的信息对以后任何时候的赌博预期平均结果相等,赌局是公平的。所以,公平赌博的随机过程构成鞅。我们又知道,只有风险中性的人才会接受公平的赌博,而在真实世界里的理性市场参与者都不是风险中性的。因此鞅的概率又是和风险中性概率紧密结合在一起的,通常并非真实世界的概率。这就是我们为什么在表示数学期望的符号 E 上加上 * 号的缘故。

联系到事件树,为了更明确起见,我们可以把鞅表示成$\{S(\xi_t)\}$,把时刻 s 的随机变量表示为 $S(\xi_s)$。再考虑到货币的时间价值,因为在风险中性世界里所有资产的收益率都是无风险收益率,所以都用无风险利率折现。如我们前面已经指出的,我们在分析中把事件树各个节点上证券的价格都看作是采用无风险利率折现后的现值。这样一来,如果能够构筑起风险中性概率,采用风险中性假设的自融资简单交易的定价过程就变成风险中性概率下的鞅,风险中性概率就是鞅概率。

下面,我们引入等价鞅测度(等价鞅概率)的概念。

为了避免比较抽象的测度论的数学概念,我们在这里的介绍将不追求数学上的严密性,而且基本上用离散的情况作讲解。在真实的世界里,证券价格的变化遵循真实的概率 P 的分布。对于概率测度 P,另一个(非真实世界里的)概率测度 P^* 与概率测度 P 相对应。相对应的含义是它们面向的是同样的事件(在离散情况用事件树表示),并且信息结构(指前述的$\{\Phi_t\}$)相同。如果 P^* 满足以下三个条件,P^* 就可以称为 P 的等价鞅测度(等价鞅概率):

1) P^* 与 P 同零集。对于概率 P 来说不可能发生的事件,对于概率 P^* 来说也不可能

发生,反之亦然。

2）对于概率 P 来说,如果一个事件发生的可能性很小,则对于概率 P^* 来说发生的可能性也不会很大。[①]

3）随机过程 $\{S(t)\}$ 对于概率 P^* 来说是鞅过程,即对任意的 $s,t;0\leqslant s\leqslant t$,都有 $E^*\{S(\xi_t)|\Phi_s\}=S(\xi_s)$。

无套利均衡基本定理就是关于无套利定价和等价鞅测度之间的对应关系的论述。我们对基本定理的论证将建立在前面所介绍的多阶段证券市场模型的基础之上。

4. 无套利均衡基本定理

第一基本定理 在一个有生存性的多阶段证券市场模型中,不存在套利机会的充分必要条件是存在等价鞅测度。

先证明充分性。

如果存在这样一个等价鞅测度的(条件)概率分布 $P^*(\cdot|\Phi_t)$,相对于这一条件概率分布,在任何时刻 t,对所有服从这一鞅概率的有价证券,一定有 $S(\xi_t)=E^*\{S(\xi_{t+1}|\Phi_t\}$。对于采用自融资的简单交易策略 $\{\theta(\xi)\}$ 的证券组合 $\{P(\xi)\}=\left\{\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi)S_i(\xi)\right\}$ 来说,如果其中所有证券都服从这一鞅概率,也就有 $P(\xi_t)=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_t)=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)E^*\{S(\xi_{t+1})|\Phi_t\}=E^*\left\{\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_{t+1})|\Phi_t\right\}$。因为采用自融资策略,所以一定有 $\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_t)S_i(\xi_{t+1})=\sum\limits_{i=0}^{N}\theta_i(\xi_{t+1})S_i(\xi_{t+1})=P(\xi_{t+1})$。于是得到 $P(\xi_t)=E^*\{P(\xi_{t+1})|\Phi_t\}$。这一关系可以递推成对任意的 $s,t;0\leqslant s\leqslant t$,有 $E^*\{P(\xi_t)|\Phi_s\}=P(\xi_s)$成立,即证券组合 $\{P(\xi)\}$ 对于信息结构 $\{\Phi_t\}$ 来说也是鞅。所以,如果在所有的节点 ξ_t 上,都有 $P(\xi_t)\geqslant 0$,则在起始节点一定有 $P(\xi_0)\geqslant 0$。并且,如果至少在其中一个节点上有 $P(\xi_t)>0$,则在起始节点一定有 $P(\xi_0)>0$。由此说明证券组合 $\{P(\xi)\}$ 不是套利组合,这一采用自融资简单策略的证券组合 $\{P(\xi)\}$ 处于无套利均衡状态,$P(\xi_0)$ 就是无套利均衡定价。

因此,如果存在一个等价鞅测度,则在采取自融资策略时,一定不存在套利的机会,亦即没有白吃的午餐。这样,也就可以通过动态复制给出均衡定价。

再证明必要性,即如果不存在套利机会,就一定存在等价鞅测度。

为了避免采用复杂的数学工具,用下面的二阶段多叉树(图 7.2)来讲解我们的证明,分叉的数目是随意画的。

先来看第二阶段最上面的那个三叉树。回忆一下我们在第一章介绍过的状态价格定价技术。因为我们已经假定不存在套利机会,即可以用复制技术定价,所以对这个三叉树

---

① 这一说法在数学上是不严密的。数学上是要求 Radon-Nikodym 导数 $\dfrac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P}$ 在原概率测度 P 上平方可积,即 $\int\left(\dfrac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P}\right)^2\mathrm{d}P<\infty$。

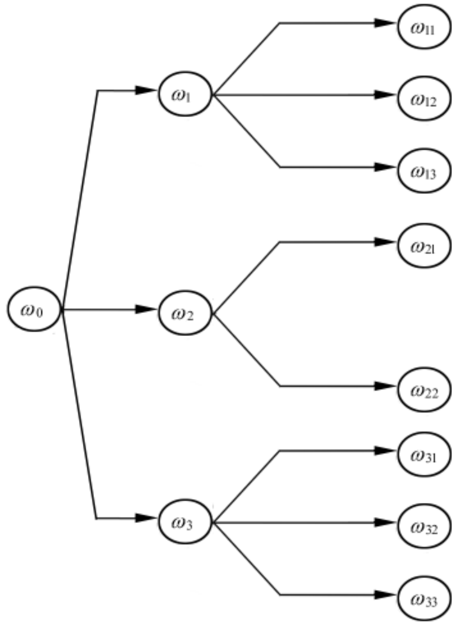


图 7.2

来说，存在三个基本证券，它们的价格变化可用图 7.3 中的三个三叉图来描述。

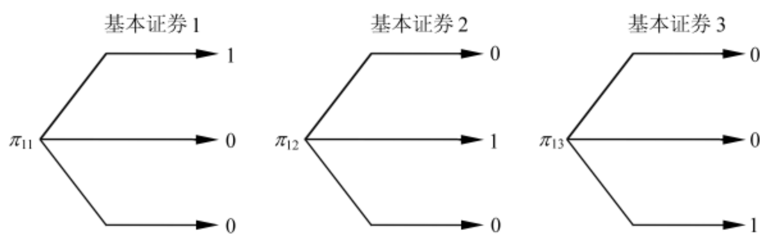


图 7.3

如果有一项证券在这个三叉树上的价格变化如图 7.4，用上述三个基本证券来复制这项证券，应该选取 P_{11} 份基本证券 1，P_{12} 份基本证券 2，P_{13} 份基本证券 3。这样构筑的组合确实能复制该证券在这个三叉树上的价格变化。因此，P_1 的无套利定价就应是

$$P_1 = \pi_{11}P_{11} + \pi_{12}P_{12} + \pi_{13}P_{13}$$

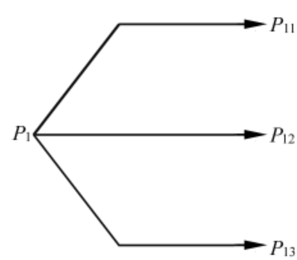


图 7.4

现在再用这三个基本证券来复制无风险证券。前面已经说过，事件树上每个节点上证券的价格都是已经用无风险利率折现过的现值。所以，无风险证券在每个节点上的价格都相等，即有 $P_1 = P_{11} = P_{12} = P_{13} = P$。于是有

$$\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} = 1$$

因此，我们发现，$\{\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}\}$ 构成了这个三叉树上的概率测度，无套利定价的结果就是按照这个概率对下一期

可能出现的价格取数学期望值(概率平均值),并以无风险利率折现。显然,对这个三叉树来说,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$就构成风险中性概率。

对于第二阶段中间的二叉树和下面的三叉树,当然可以如法炮制,分别求出类似的风险中性概率$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$。不过这里有一点必须说明清楚,我们采用的基本证券就是上面那个三叉树的三个基本证券。所以,对于基本证券 1 来说,它在节点 $\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31}$处取值为 1,在第二阶段末的其他节点处取值都为 0;基本证券 2 在节点 $\omega_{12},\omega_{22},\omega_{32}$处取值为 1,在第二阶段末的其他节点处取值都为 0;基本证券 3 在节点 ω_{13},ω_{33}处取值为 1,在第二阶段末的其他节点处取值都为 0。

请注意,第二阶段的多叉树,都是在第一阶段的事件发生以后再发生的,所以,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$,$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$都是条件概率。这一点要记住。

我们仍然来看上面的三叉树。

三个基本证券每个取 1 份,组成一个证券组合。它们在 ω_1 处的价格分别是 $\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}$。$\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}$尽管是基本证券的价格,但也反映了各自头寸的情况。例如,把基本证券 1 的头寸放大$\frac{1}{\pi_{11}}$,基本证券 1 在 ω_1 处的价值就变成 $\pi_{11}\times\frac{1}{\pi_{11}}=1$。因为 $\pi_{11}+\pi_{12}+\pi_{13}=1$,所以可以进行自融资的头寸调整。调整后使基本证券 1 在 ω_1 处的价格为 1,另两个基本证券在此处的价格都为 0。这样,调整前后该证券组合的价值不变。同样的道理,在节点 ω_2 处,采用自融资策略使基本证券 2 的价格为 1,另两个基本证券在此处的价格都为 0;在节点 ω_3 处,采用自融资策略使基本证券 3 的价格为 1,另两个基本证券在此处的价格都为 0。经过这样的自融资调整后,三个基本证券在起始点 ω_0 处的价格分别为 π_1,π_2,π_3。和第二阶段相同的道理,$\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$构成风险中性概率。

这样构造的概率测度 $P^*=\{\pi\}$和真实世界的概率 P 是同零集的。若在事件树上某一枝发生的真实概率为 0,这一枝及其以后的分叉就应从事件树上移去,在这一枝上的风险中性概率自然也为 0。如果在事件树上某一枝发生的真实概率大于 0 的话,说明这一枝后面的事件是可能发生的。我们定义的风险中性概率是对应于该枝的基本证券在枝端节点的价值。当该枝的事件发生时,基本证券在枝末节点的价值为 1,如果在枝端节点的价值为 0 的话,就出现了"无中生有"。这与无套利机会存在相矛盾。

如果在事件树上某一枝发生的真实概率很小,那么,这一枝产生的结果对枝端节点证券价值的影响应该不大。风险中性概率的定价是"子辈"节点的数学期望值(概率平均值),若在该枝上风险中性概率很大的话,该枝产生的结果就会对枝端节点证券价值产生很大的影响,这是矛盾的。

最后,我们来证明以上构造的事件树上的概率测度使事件树成为鞅。对任意的 s,t;$0\leqslant s\leqslant t$,当 $s=0,t=1$ 时,显然有

$$P_0=\pi_1P_1+\pi_2P_2+\pi_3P_3=E^*(P_i|\Phi_0)$$

对于 $s=1,t=2$,由前面的论述知,有 $P_i=E^*(P_{ij}|\Phi_1)$,$i=1,2,3$。对于 $s=0,t=2$ 的情况需要稍加讨论。我们在前面已经提到过,$\{\pi_{11},\pi_{12},\pi_{13}\}$,$\{\pi_{21},\pi_{22}\}$和$\{\pi_{31},\pi_{32},\pi_{33}\}$都是条件概率,条件成立的概率分别是 π_1,π_2,π_3。于是有

$$\pi_1\pi_{11}P_{11}+\pi_1\pi_{12}P_{12}+\pi_1\pi_{13}P_{13}+\pi_2\pi_{21}P_{21}+\pi_2\pi_{22}P_{22}+\pi_3\pi_{31}P_{31}+\pi_3\pi_{32}P_{32}+\pi_3\pi_{33}P_{33}$$

$= \pi_1(\pi_{11}P_{11} + \pi_{12}P_{12} + \pi_{13}P_{13}) + \pi_2(\pi_{21}P_{21} + \pi_{22}P_{22}) + \pi_3(\pi_{31}P_{31} + \pi_{32}P_{32} + \pi_{33}P_{33})$

$= \pi_1 P_1 + \pi_2 P_2 + \pi_3 P_3 = P_0$

此即 $P_0 = E^*(P_{ij}|\Phi_0)$。所以，这样构造的概率测度 $P^* = \{\pi\}$ 使事件树成为鞅。由此证明了 $P^* = \{\pi\}$ 是等价鞅测度。

以上证明可以推广到任何阶段的事件树。

这样，我们以很粗浅的方法证明了无套利均衡第一基本定理。通常这一定理的证明（尤其是在连续情况下）要用到相当艰深的数学。我们的证明虽然牺牲了一些数学形式上的严密性，但相对易懂，而且金融涵义比较清楚。

我们在讨论无套利均衡第一基本定理时，并没有涉及等价鞅测度（即鞅概率）的唯一性问题。因为等价鞅概率就是风险中性概率，利用等价鞅测度定价就是在鞅概率下取数学期望值。如果存在不止一个等价鞅测度，以这些等价鞅测度都作为风险中性概率来对同一项衍生证券定价，那么，只有在以这些不同的等价鞅测度求得的数学期望值都相等的话，这项衍生证券才能通过无套利均衡定价，否则不然。因为多阶段证券市场有生存性意味着至少存在一个等价鞅测度，所以，如果只存在一个唯一的等价鞅测度的话，在这个证券市场模型中的所有衍生证券就都能通过无套利均衡定价。这样，市场也就是完全的。于是就证明了下述第二基本定理的充分性部分。

第二基本定理　在一个有生存性的多阶段证券市场模型中，所有的衍生证券都可以通过无套利均衡来定价（即市场是动态完全的）的充分必要条件是存在唯一的等价鞅测度。

第二基本定理的必要性部分可以这样理解：因为所有的衍生证券都可以通过无套利均衡来定价，基本证券也可以看作是自身的衍生证券，当然也可以无套利定价。鞅概率是基本证券通过自融资策略定出的价格，这个价格就应该是唯一的。因此，如果所有的衍生证券都能采用自融资策略通过无套利均衡定价，所有的基本证券也就有唯一的无套利均衡价格，就意味着存在唯一的等价鞅测度。

5. 数字例子

我们用几个数字例子来加深对无套利均衡基本定理的理解。

例 1　由下面三阶段的事件树可知，有 9 种状态，用，$\omega_1, \cdots, \omega_9$ 表示。交易时刻集 $T = \{0,1,2\}$，信息结构为 $\{\Phi_t\}$，在 $t=0$ 时，Φ_0 告诉我们，到期末发生的事件一定在集合 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ 中；到 $t=1$ 时，Φ_1 告诉我们，到期末发生的事件一定分别落在集合 $B_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，$B_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 或者 $B_3 = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ 中；到 $t=2$ 时，Φ_2 则会告诉我们究竟哪个状态 $\omega_i (i = 1, \cdots, 9)$ 会发生。市场上有三种证券，证券 0 为无风险证券，其价格 $S_0(t) \equiv 1$，$S_1(t)$ 与 $S_2(t)$ 已在事件树中给出，上面的是 $S_1(t)$，下面的是 $S_2(t)$。例如 $S_1(0, \omega_1) = 10$，$S_1(1, \omega_1) = 11$，$S_1(2, \omega_1) = 14$，等等。这里我们不给出真实概率 P，只知道对于 $i = 1, \cdots, 9$，所有 $P(\omega_i) > 0$（不给出 P 是因为它与我们后面的讨论无关）。

现在，对于这样一个模型，我们首先要判断它是否有生存性；若有生存性，那么什么样的衍生证券可通过无套利均衡定价。现在我们来设计一项衍生证券：$x = \max\{[2S_1(2) +$

$S_2(2)]-[14+2\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 2}(S_1(t),S_2(t))],0\}$，这项衍生证券表示一种买权，在期末 $t=2$ 时执行，是以三个交易时刻、两种风险证券所达到的最低价的两倍再加上 14 的价格来购买 2 份证券 1 和 1 份证券 2 的买权。由这个定义，我们可以计算每种状态下该衍生证券期末的价值，如图 7.5 所示。注意：之所以设计这样的一项衍生证券，意在揭示：衍生证券期末的价值可能依赖所有原始证券全部的历史价格，而不仅仅依赖证券期末的价格。例如，在该例中，在状态 ω_2 和 ω_5 中，它们原始证券期末的价格完全一样，但它们衍生证券期末的价值 $x(\omega)$ 却不同。

这样一类期权被称为奇异(exotic)期权，奇异期权的设计是金融工程师为客户"量体裁衣"定制产品的重要工作任务。一些优秀的金融工程师非常擅长设计奇异期权。

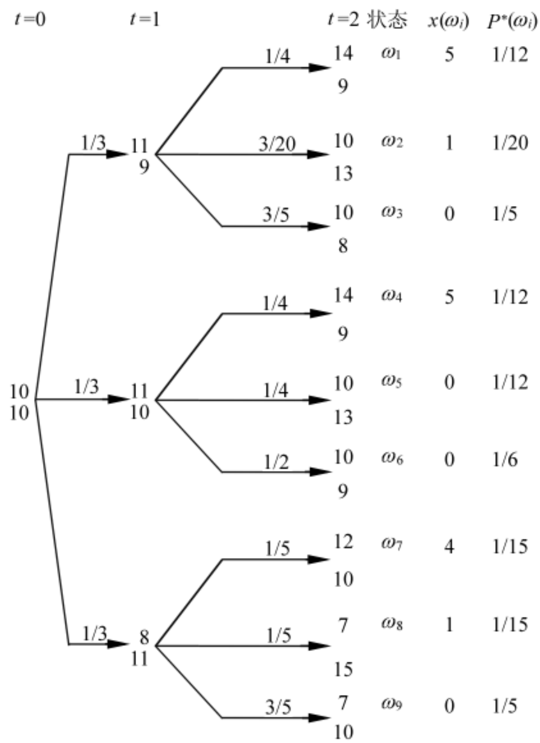


图　7.5

按照前一节所提的思路，先来求出所有的等价鞅测度。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0)=S_1(0)=10,\quad E^*(S_2(1)|\Phi_0)=S_2(0)=10$$

如果记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，$q=P^*(B_2|\Phi_0)$，则一定有 $1-p-q=P^*(B_3|\Phi_0)$。由上面两式可得出如下方程组：

$$\begin{cases}11p+11q+8(1-p-q)=10\\9p+10q+11(1-p-q)=10\end{cases}$$

由该方程组可解得唯一解：$p=q=1/3$。

同理，由 $E^*(S_1(2)|B_1)=S_1(1)=11$，$E^*(S_2(2)|B_1)=S_2(1)=9$，可解得唯一的解：$P^*(\omega_1|B_1)=1/4$，$P^*(\omega_2|B_1)=3/20$，$P^*(\omega_3|B_1)=3/5$。以此类推，可以解得 $P^*(\omega_i|B_j)$，$i=4,5,\cdots,9$，$j=2,3$，且可发现这些解都是唯一的，我们把这些解都写在事件树相应的分枝上。由这些条件概率可以算得唯一的等价鞅测度 P^*（见图 7.5）。

通过上面的计算可以发现，该模型存在唯一的等价鞅测度，因此不存在套利机会，而且，该模型是有生存性的，所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价。这样，前面我们所定义的衍生证券（奇异买权）x 的价格应为：

$$\hat{\Pi}=E^*(x)=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)P^*(\omega_i)=1.2167$$

若改用通过自融资简单策略来生成 x，即用证券 0、证券 1 和证券 2 来复制这个奇异买权，可以得到相同的结果。建议读者自己试算一下。

无论用等价鞅概率求期望值，还是用证券组合通过自融资简单策略复制，得到的资产的无套利均衡价值是相同的。我们再强调一下，这种相同并非巧合。因为鞅概率就是风险中性概率，而无套利均衡分析和风险中性假设之间存在本质联系，因此定价结果的相同是一种必然。而且，两种方法算得结果的一致，又从某种程度上证明了风险中性假设的合理性。

在离散时刻情况下，能生成所要定价资产的自融资策略或许还可算得，用等价鞅测度为资产定价也许并不是唯一的计算资产价值的方法；但在连续时间情况下，自融资策略作为时间的连续函数，并不一定能够求得，这时用等价鞅测度来计算资产的无套利均衡价值就成为非常重要的方法。

前面我们举了只有唯一的一个等价测度的例子，现在来看第二个例子。

例 2 两阶段事件树有三种证券，$S_0(t)\equiv 1$，4 种状态 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$。$S_1(t)$ 与 $S_2(t)$ 如事件树（图 7.6）所示（上面的是 $S_1(t)$，下面的是 $S_2(t)$）。

首先，求等价鞅测度 P^*。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0)=S_1(0)=10,$$
$$E^*(S_2(1)|\Phi_0)=S_2(0)=10$$

记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，则 $1-p=P^*(B_2|\Phi_0)$，此处 $B_1=\{\omega_1,\omega_2\}$，$B_2=\{\omega_3,\omega_4\}$。则由上面两式可得出如下方程组：

$$\begin{cases}11p+8(1-p)=10\\9p+11(1-p)=10\end{cases}$$

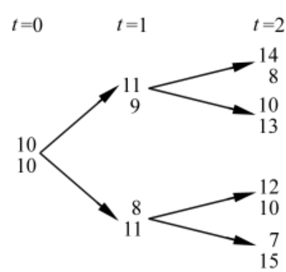


图 7.6

可以看出该方程组无解，故不存在等价鞅测度，该模型无生存性，不是一个经济均衡模型。这一点也可以通过构造以下这个证券组合得到证明。设 $t=0$ 时刻某投资者持有这样一个证券组合 $(50,-2,-3)$，即购买 50 股证券 0，卖空 2 股证券 1 和 3 股证券 2。可以算得 $t=0$ 时刻投资为零（$-50+2\times10+3\times10=0$），到 $t=1$ 时刻可以算得，无论是在状态 B_1 下，还是在状态 B_2 下，该投资者手中持有的证券组合价值都为 1（$50-2\times11-3\times9=50-2\times8-3\times11=1$），即投

资者只要在 $t=1$ 时刻出售手中的证券组合，一定可以得到 1 元的收益。因此，该模型中存在套利机会，不是一个均衡模型。

下面我们再来看第三个例子。

例 3 两阶段事件树有两种证券，$S_0(t)\equiv 1$，9 种状态 $\omega_1,\cdots,\omega_9$。$S_1(t)$ 如事件树(图 7.7)所示。

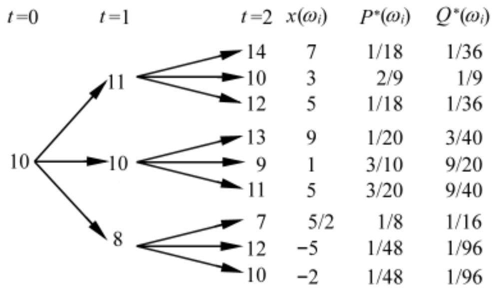


图 7.7

先求等价鞅测度 P^*。由满足等价鞅测度的条件 3 可知：

$$E^*(S_1(1)|\Phi_0) = S_1(0) = 10$$

记 $p=P^*(B_1|\Phi_0)$，$q=P^*(B_2|\Phi_0)$，则有 $1-p-q=P^*(B_3|\Phi_0)$。由上式可得出如下方程：

$$11p + 10q + 8(1-p-q) = 10$$

可以看出该方程组有无数组解。同理，由 $E^*(S_1(2)|B_1)=S_1(1)=11$ 也可解得无数组解，故等价鞅测度不唯一，该模型有生存性，但并非所有的衍生证券都可通过无套利均衡定价。只有那些对于所有等价鞅测度 P^*，$E^*(x)$ 都保持不变为一常数的衍生证券 x 才可通过无套利均衡的复制技术定价。那么如何来分辨这些衍生证券呢？我们再回到前面对等价鞅测度的计算中去。虽然我们得不到唯一的等价鞅测度，但我们可以得到以下关系式：

$$(*)\quad \begin{cases} 3P^*(B_1|\Phi_0) + 2P^*(B_2|\Phi_0) = 2 \\ 2P^*(\omega_1|B_1) - 2P^*(\omega_2|B_1) = -1 \\ 2P^*(\omega_4|B_2) - 2P^*(\omega_5|B_2) = -1 \\ 3P^*(\omega_7|B_3) - 2P^*(\omega_8|B_3) = 2 \end{cases}$$

我们需要保证的是：

$$\begin{aligned} E^*(x) &= \sum_{i=1}^{9} x(\omega_i)P^*(\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{3} x(\omega_i)P^*(\omega_i|B_j)P^*(B_j|\Phi_0) \end{aligned}$$

这样的 $E^*(x)$ 为一常数。同时，无论 $P^*(\omega_i|B_j)$ 和 $P^*(B_j|\Phi_0)$ 取什么样的值，它们必须满足上面的方程组($*$)。

由前面的关系式和约束条件，我们可以得出：只要 $x(\omega_i)(i=1,\cdots,9)$ 满足以下关系式，$E^*(x)$ 即可以保证在任何等价鞅测度下为一常数。

$$
(**)\begin{cases}
[x(\omega_1)-x(\omega_3)]/[x(\omega_2)-x(\omega_3)]=-1\\
[x(\omega_4)-x(\omega_6)]/[x(\omega_5)-x(\omega_6)]=-1\\
[x(\omega_7)-x(\omega_9)]/[x(\omega_8)-x(\omega_9)]=-3/2\\
\dfrac{-\frac{1}{2}(x(\omega_1)-x(\omega_3))+x(\omega_3)-\frac{2}{3}(x(\omega_7)-x(\omega_9))-x(\omega_9)}{-\frac{1}{2}(x(\omega_4)-x(\omega_6))+x(\omega_6)-\frac{2}{3}(x(\omega_7)-x(\omega_9))-x(\omega_9)}=\dfrac{3}{2}
\end{cases}
$$

现在我们找一个满足上面关系式的衍生证券做具体分析。衍生证券 x(其期末价值 $x(\omega_i)$ 见图 7.7)满足上面关系式,现在我们来检验一下 x 是否可通过无套利均衡定价,即 $E^*(x)$ 是否在任何等价鞅测度下为一常数。由方程组($*$)可求得两个等价鞅概率 P^* 和 Q^*(见图 7.7),从而算得

$$
E^*(x)=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)P^*(\omega_i)=\sum_{i=1}^{9}x(\omega_i)Q^*(\omega_i)=3
$$

因此 x 可以通过无套利均衡生成。

得到这种结果并非偶然,而是必然的。因为由方程组($*$)知,等号右边都是常数,因此,只要 $x(\omega_i)$ 满足方程组($*$)中等号左边各概率前面系数所对应的比例关系,就可以保证 $E^*(x)$ 在由方程组($*$)求得的概率测度下为一常数,而方程组($**$)式就是这个比例关系。由此可以验证凡满足方程组($**$)的资产一定可以通过无套利均衡定价。

在上面这三个例子的讲解中,实际上对离散的事件树,我们已经给出了一些求等价鞅概率的做法。通过这三个例子,我们可以总结以下规律:

1)如果在一个市场中价格变化过程各自独立的证券种数大于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场中一定存在套利机会。

2)当市场上价格变化过程各自独立的证券种数等于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场上所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价,或者说,对于每种衍生证券来说,市场都是完全的。

3)当市场上价格变化过程各自独立的证券种数小于事件树每个父辈节点的分叉数(即状态数)时,则该市场上并非所有的衍生证券均可通过无套利均衡定价,或者也可以说,市场不是对于每种衍生证券来说都是完全的。市场只对其期末价值满足一定比例关系式(由等价鞅测度的约束条件推出)的衍生证券才是完全的。所以,这样的市场对有些衍生证券来说是相对完全的,对另一些衍生证券来说是相对不完全的。这种说法的正确与否取决于对市场完全性的定义。

6. 小结

本章讨论的(动态)无套利均衡分析的基本定理虽然是在简化了的多阶段证券市场模型和自融资简单交易策略的基础上展开的,但所讲述的核心原理对更为切合实际的模型和策略也都适用。通过对本章的研读,读者将能比较深入地掌握多阶段的动态复制技术,即多阶段的金融资产定价技术。

等价鞅测度的概率就是风险中性概率,由两个基本定理所支撑的等价鞅测度模型深刻地揭示了无套利均衡和风险中性假设之间的关系。而且,通过学习和理解等价鞅测度模

型，能够帮助读者掌握市场的动态完全性等非常重要的金融学概念。第一基本定理告诉我们，风险中性概率(即等价鞅测度概率)存在，采用自融资交易策略，就一定能实现无套利均衡，也就一定能进行动态复制定价；反过来，能够动态复制定价，即实现无套利均衡，就一定能构造风险中性概率。这就彻底消除了为什么风险中性定价和无套利均衡定价的结果一定相同的疑惑。如果存在多个等价鞅测度(即能够构造出多个不同的风险中性概率)，那么，各种可能的结果对这些等价鞅测度概率所求的数学期望值(概率平均值)必须相同，证券才能被无套利均衡定价，否则出现多个不同的定价结果，意味着动态复制技术对该证券定价的失败，亦即市场不是动态完全的。当等价鞅测度是唯一时，情况就简单化了。这时市场是动态完全的，而所有的证券都能够被动态复制定价。这就是第二基本定理的内涵。

显而易见，实际的金融市场往往是不完全的市场。在不完全的市场里，有的证券不能被动态复制，即不能通过无套利均衡定价，因而也就不能有效地套期保值进行风险管理。金融工程作为金融创新的技术支持，其重要作用之一是依靠金融工程师们的创造性劳动，设计、开发出新型的金融产品，来增加市场的完全性，增强市场转移和优化配置收益/风险的功能，健全市场本身抵御和防范金融风险的机制。

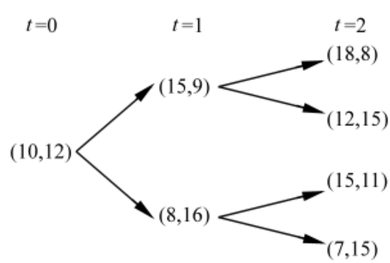
特别需要提请注意的是，如我们在本章中所分析的，同一个市场，往往会对某些证券来说能够无套利均衡定价，而对另一些证券来说却不能。或者我们也可以认为，同一个市场，对某些证券来说是相对完全的，对另一些证券来说则是相对不完全的。这种情况无论在理论上还是实践中，都有非常重要的意义。

利用等价鞅测度模型即风险中性假设为证券定价，关键在于找出等价鞅概率即风险中性概率。在本章的数字例子里，我们实际上已经介绍了一些确定等价鞅概率的办法。但这里介绍的都是离散的情况。连续的情况，有时在数学上的处理要更复杂。利用风险中性假设求解布莱克-舒尔斯期权定价公式的解法给出了一个典型的例子。

练习题

有一两阶段证券市场模型如下：

假设市场中有三种证券：$S_0(t)$，$S_1(t)$和 $S_2(t)$。其中 $S_0(t)\equiv 1$，$t=0,1,2$。



试确定等价鞅测度是否存在？若存在，计算等价鞅测度；若否，假设 $t=2$ 时的数据不变，调整 $S_2(0)$，$S_2(1)$使得等价鞅测度存在且唯一，并给出此时的等价鞅测度。