国家自然科学基金重大项目(金融工程)丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明 著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第十章　风险管理概述

80 年代中期，在伦敦银行界刚出现“金融工程师”的称谓时，指的是那些为银行等金融机构设计构造性方案进行风险管理的专家。因此，金融工程原先的狭义定义是组合金融工具（主要包括形形色色的衍生工具）和风险管理技术的研究。随着七八十年代以来金融创新和金融自由化浪潮席卷西方世界，人们对金融工程的认识迅速拓宽。成立于 1991 年的“国际金融工程师协会（IAFE）”把准确地界定这一新兴学科作为自己的职责之一。由国际金融工程师协会给出的金融工程的广义定义则致力于使金融工程成为一门新兴的学科，是金融科学的产品化和工程化，是现代金融学发展的新阶段。

广义的定义当然涵盖了狭义的定义。但就技术层面而言，狭义的定义也已经扣住了金融工程最核心的部分，这就是风险管理的工具和技术。要成为一名合格的金融工程师，必须掌握现代金融理论，能够依托信息技术（计算机和通讯技术），灵活地应用各种工程方法开展创造性的工程思维活动。默顿认为现代金融理论有三大支柱，这就是货币的时间价值、资产定价和风险管理。即使按金融工程的狭义定义来说，金融工程活动也同样要依靠这三大支柱的支撑。因此，金融工程的基本原理一定要涵盖与这三大理论支柱有关的知识。

风险管理的内容非常广泛，而风险管理的技术与工具又都是与我们在本书前面所讨论的内容紧密相关的。本书是讲述金融工程的基本原理的，因此只对风险管理的技术和工具作简略的概述，但力求反映在这一领域的最新发展。

1. 风险的分类

我们在第二章已经简单地介绍过各种不同类型的金融风险。风险这个概念的范围远远超出金融风险，我们先简单地讲一下风险的分类。

可以从不同的角度对风险进行分类：

按性质来划分，可分为纯粹风险与投机风险。纯粹风险是只有损失可能而无获利可能的风险；投机风险则是既有损失可能，又有获利可能的风险。

按风险的对象分类，主要有财产风险、人身风险、责任风险、信用风险。财产风险是指导致有形财产损毁、灭失或贬值的风险；例如房屋有遭受火灾、汽车有遭受碰撞等损失的风险。人身风险是因自然灾害、意外事故、疾病而导致人的伤残或死亡等风险。责任风险是指个人或团体因行为上的疏忽或过失，依法对他人遭受的人身伤害或财产损失应负的法律赔偿责任的风险。信用风险则是由一方违约对另一方造成损失的风险。

按损失的原因划分，可分为自然风险、社会风险、经济风险、政治风险、技术风险。自然风险是由于自然现象或物理现象造成财产损毁或人员伤亡的风险。社会风险是由于个人

或团体的异常行为造成损害的风险;如盗窃、抢劫、罢工等。经济风险是经济单位在从事经济活动中,因对市场判断失误或投资不当等原因导致损失的风险,如通货膨胀、汇率变动。金融风险是一种经济风险。政治风险是由于政治原因引起社会动荡造成损害的风险,如政局变化、种族冲突、战争等。技术风险是因科学技术的发展而产生的风险,如核幅射、环境污染等。

亚洲金融危机以来,防范总体金融风险的问题成为全社会关注的问题。所以我们还应讨论一下有关总体金融风险的问题。

个体金融风险是个体承受的风险,个体包括个人、家庭、企业(包括金融机构)及其他组织(如学校、医院等)。这是一种微观风险。总体金融风险则是一种宏观风险,和企业(包括金融机构)与家庭所承受的风险不同,其影响波及整个国家、多国地区甚至全球。虽然如何度量总体金融风险或许还是一个需要经济学和系统科学加以研究的问题,但它的全局性特征是非常明显的,其结果会使整个金融系统失稳甚至于崩溃,可能引发经济危机并导致长期萧条。

由总体金融风险引发的危机最显著的表现特征是发生滚雪球式的连锁反应,形成社会风潮,并牵动方方面面。股市崩盘、房地产价格猛跌、货币大幅度贬值、银行发生挤兑、大批银行和其他金融机构倒闭,等等。其后果对于整个国家和社会来说,会非常严重。尤其对经济处于增长时期的发展中国家来说,更是如此。因为有可能使经济发展停滞,甚至陷入社会动乱。

产生总体金融风险的原因是多方面的,大体可以从外因和内因两个方面来探讨。从外因上说,第一个原因是源于国际经济角逐。各国政府为了解决本国的经济问题,有时会采取“嫁祸于人”的政策。例如 80 年代初美国政府采用高利率和大幅度赤字预算的政策来解决“经济滞胀”问题,迫使日元对美元升值,既打击了日本的商品出口,又导致大量日本资金涌入美国购置房地产。这对日本后来产生泡沫经济有直接的影响,泡沫经济隐含了极大的总体金融风险,进入 90 年代后日本面临的经济和金融困境就是泡沫经济破灭的后果。第二个原因是国际游资的冲击。每日交易总额为 1.5 万多亿美元的巨额国际游资无孔不入地在世界各地寻找套利和投机的机会。无论何处只要经济结构有缺陷,国际游资就会依靠现代金融高科技(包括金融本身的高科技和计算机运算、信息处理和远程通讯技术)人为地制造市场不均衡进行大规模的套利和投机,其结果会导致当地金融系统的紊乱。其他的可能源于自然灾害、政治危机和社会动乱等的外部原因,就不仅是经济和金融本身的问题。从内因上说,首先是经济的结构性问题。例如房地产和股票被炒得过热,产生严重的经济泡沫;银行出现大量的呆账和坏账,或出现存贷利率倒挂导致持续亏损;国际贸易出现大幅度逆差,国际收支严重不平衡;国内通货膨胀率高而勉强维持与美元或其他主要工业化国家货币挂钩的“盯住”汇率制度,破坏了汇率和利率的平价关系;过早地全面开放金融,对国际游资的套利和投机活动敞开大门;未有及时地实现产业升级,市场供需关系隐藏着严重的不均衡危险;等等。第二个重要的原因是金融系统不发达,金融市场转移和配置收益和风险的功能不够强。第三是因为金融监管不健全,缺乏完善的监管和自律体系(包括法规、制度和实施机制),使个人和机构有违法违规操作的可乘之机。第四是缺乏风险意识,尤其是金融机构本身缺乏应有的进行风险管理的机制、技术和能力。

从以上简略的分析可以看出，总体金融风险产生的原因涉及经济和金融的深层次问题。要讨论如何加以防范的问题，首先必须正确理解金融风险的实质。金融作为一种产业，一样有它的产品、创造产品的企业和交换产品的市场。金融市场通过交易金融产品来实现全社会资本资源的流动和配置。交易性的金融产品被称为金融商品，其中标准化的、在市场上广泛流通的金融商品被称为金融工具（即有价证券）。金融工具最基本的特性是流动性、收益性和风险性。风险是指未来收益的不确定性，所以，风险和收益是生长在金融工具上的一对不可分离的连体儿。流动性是指金融工具即时转变成现金的能力，实际上也是一类特殊的风险，但因为对于金融和财务问题而言，流动性的管理非常重要，所以往往把它单独列出考虑。

因为金融市场的效率高于其他的商品和服务市场，金融工具的价格波动比任何别的商品都要频繁和激烈，所以，金融工具的风险性是其本质属性。在市场经济条件下，不可能完全消除风险，而只能对风险进行控制和管理。现代金融学的基本理论假设是市场的参与者大体上都是风险厌恶型的，要承受较高的风险，必须相应有较高的预期收益作为承受风险的补偿，“高风险高收益”是金融市场配置收益和风险时所遵循的基本规律。因此，不能简单地把风险看作只有负面的作用，风险同时隐藏着创造大的收益的潜在可能性（这是风险投资的基本原理）。

金融风险会导致亏损（如果实际发生的是向不利方向的变动），而亏损的积累或发生重大亏损会把企业推向破产。如我们在第二章中已经指出的，特别要注意的是违约风险，因为其他类型风险所产生的损失都会引发违约风险，而违约风险具有滚雪球式的连锁反应的危险性。如果一家企业因买方违约而收不回一笔销售应收款，因此发生资金周转困难而不能采购急需的零配件的话，就会打乱整个生产经营秩序。于是，这家企业将不能支付它的原材料、能源等应付款，违约风险就会像瘟疫一样地传播开来。在金融市场上则更是如此，一笔资金被套牢而发生违约，会顺着债务链迅速地具有放大效应地扩散开来，有可能导致总体金融风险。从这个角度讲，总体风险和个体风险是紧密地联系在一起的。我们讨论防范总体金融风险，必须考虑微观机制的运作。金融监管，也首先必须从微观上管住，即必须在企业和市场的层面上监管企业和市场的运作。宏观指标的监控是有意义的，但如果不落实到微观机制的层面，在实践中将是非常靠不住的。

防范总体金融风险的一条最为基本的原理是：

> 风险必须由愿意接受风险并有能力承受风险的市场参与者承担。

强迫别人接受他们所不愿承担的风险，可能发生过高的成本，也可能会在减少一种风险的同时，增加另一种风险（如银行把利率风险转嫁到借款人身上时，可能会增加违约风险）。有的企业资本雄厚，负担得起因风险而发生的亏损，不会因此打乱正常的生产经营活动，因此也不会把风险扩散出去；有的企业则不然，因风险发生的亏损可能是致命的并因此产生扩散效应。由此出发，防范总体金融风险的金融监管所要遵循的最基本原则就应当是：

必须严格限制市场的参与者承担超出其能力的风险。

综上所述可知,发展管理风险的微观机制对于防范总体风险具有重要的作用。只有充分发展进行风险管理的微观机制,才可能真正做到使市场参与者承担他们愿意承担而且承担得起的风险。

2. 风险暴露和风险管理

由于某种特殊的原因而承受某类特殊的风险,被称为“暴露”于某类风险之下,或具有某种风险暴露。例如,对农业种粮户来说,具有歉收和粮价下跌的风险暴露;进出口企业具有汇率方面的风险暴露;商业银行具有借款人违约的风险暴露;等等。占有任何一种资产,都有该资产市场价值下跌的风险暴露。

然而,进行任何一笔市场交易,不能采取绝对的或抽象的观点来看待有关的风险暴露。购买或者出售一项资产,可能会增加某种风险暴露,也可能会减少某种风险暴露,取决于这项资产与原来所持有的资产在收益/风险方面的相关关系。同样一笔交易对于不同的市场参与者来说对其风险暴露的影响也是不同的。种粮户建立新的粮食期货空头仓来锁定将要收获的庄稼的出售价格,是减少了对于粮价波动的风险暴露;但是炒作粮食期货的投机者建立同样的新的空头仓却会增加对粮价波动的风险暴露。套期保值者通过对冲交易来减少风险暴露,投机者则通过增加风险暴露来牟取风险利润。

所有的金融/财务决策实际上都是收益和风险的权衡。所谓风险厌恶(risk aversion)是指人们对风险暴露的态度,用于度量人们为了降低风险愿意付出的代价,或者反过来,人们要求因为风险暴露而获得的补偿。比如说,如果你希望未来的收益能够比较准确地预见,为此愿意接受比较低的预期收益,那么你就是风险厌恶型的。对于相同的预期收益,人们希望风险暴露比较小,这说明人们经常是风险厌恶型的。我们在介绍风险中性假设时已经讨论过这些概念(参见第五章第 6 节),这里只是进一步说明金融或财务决策是依据人们的风险偏好进行的权衡行为:这就是在减少风险暴露所能得到的好处和为此要付出的代价之间的权衡。

这样,我们可以给出风险管理的定义:

为减少风险暴露进行效益和成本权衡而采取的行动(包括不采取行动在内)称为风险管理。

人们有时会因为进行风险管理既付出了成本又失去了本来可以获益的机会而懊悔不已,旁人也会因此指责风险管理的价值,但这只是事后诸葛亮的“高明”。风险管理的决策是与未来时间的不确定性联系在一起的,到事后再评价则不确定性已经消除了,所以不能用事后的观点来看待事前的决策。判断某项风险管理的决定是否正确,只有在做出决定的时刻能够获得的信息的基础上进行评价才是公正的。在实践中,往往难于区别一项决策的正确性究竟是因为决策技巧的高明还是仅仅依靠运气,这是风险管理工作经常面临的困惑。

虽然风险管理主要是面向金融/财务决策的,但实际上所有的资源配置问题都涉及风险管理问题。对于一个家庭来说,家庭成员会面临疾病、丧失工作能力、丧失生活自理能力甚至死亡的风险,也会遭遇失业的风险,家庭财产如住房、耐用消费品都有损坏和贬值的风险。家庭既有负债方面的风险(如不能按期支付信用卡欠款和房租、水电费等),也有投资方面的风险(如存款银行倒闭、购买的股票和共同基金跌价等)。对于企业来说,有生产能力方面的风险,如机器设备的损坏、原材料和零配件未能及时到货、能源供应不足等。既有自身产品价格的变动风险,也有供货(原材料、零配件等)成本变化的风险。因此,家庭和企业的任何决策都涉及大量的风险管理问题,其他的社会组织的情况其实也类似。

政府对风险管理起着重要的作用。政府通过对市场的监管和干预,通过提供社会保障和对企业的最终担保(如银行的存款保险)来改变风险暴露,影响家庭和企业的风险管理。政府在自身的决策中也涉及各种各样的风险管理问题,也经常采用与企业类似的风险管理技术和工具。要提请注意的是,所有的风险管理都是有成本的。因此,政府行为改变风险暴露的行动所发生的成本最终是转嫁到纳税人头上的。

风险管理的步骤可以分为如下5步:

第一步,风险识别　首先要搞清楚风险管理的对象,即需要加以管理的主要风险暴露。对实际上不存在的风险暴露进行风险管理,所花费的成本无疑是浪费。

第二步,风险评估　在识别出需要管理的风险暴露之后,风险评估就是对所要采取的风险管理进行效益/成本的量化分析。此类工作通常需要专家和专门技术的支持,例如与保险有关的风险评估工作是由精算技术作支持的,在证券投资方面的风险评估则往往需要向券商咨询。

第三步,风险管理技术的选择　选择合适的风险管理技术对于成功的风险管理是至关重要的。存在四种基本的风险管理技术:

1)**规避风险**　如果开展某项业务会带来某种风险暴露,那么不从事这项业务就不会承受这种风险,也就是采取躲避风险的态度。当然,采取这种做法也是效益/成本权衡的结果。而且,并不是所有的风险都可以规避得了的。“天有不测风云,人有旦夕祸福”,都是规避不了的风险。

2)**防范和控制风险**　有些风险是可以预先加以防范和控制的。例如采取很好的防火措施就可以减少火灾的风险暴露,注意饮食卫生可以减少疾病的风险暴露,等等。

3)**承受风险**　在进行效益/成本分析后,不采取任何行动也是一种风险管理的办法。不采取任何行动意味着依靠自己本身的资源来吸收风险。例如,不购买任何医疗保险,一旦生病自己付医疗费的办法就是如此。但这里有一点需要加以说明,因为没有意识到风险暴露而不采取任何措施和有意识地承受风险,二者的意义是不一样的。后者是一种风险管理的技术,是效益和成本分析的结果,前者则不是。因为没有意识到风险暴露而不采取行动,可能产生非常严重的后果,远不符合决策者的风险偏好和承受风险的能力。

4)**转移风险**　把自己不愿意承受的风险暴露转移给其他人,这是通过市场交易进行收益/风险的流动配置的最主要的方式,也是金融工程所最为关注的技术。出售有风险资产、购买保险以及自己对风险暴露不采取行动而一旦造成损失由别人来补偿的做法都是转移风险的例子。

转移风险有三种基本的方法：保险、风险分散化和套期保值。我们在后面要进行专门的论述。

第四步，实施　在选定了风险管理的技术后，一定要比较实施的成本，尽量减少实施成本。如果决定购买保险，那要货比三家；如果决定投资于证券，要比较投资于共同基金还是直接通过经纪人购买股票划算；等等。

第五步，检查　对风险管理工作要进行定期的检查和修正。因为会出现新的情况，可以得到新的信息，所以应当采取根据反馈信息进行动态调整的策略。

3. 风险转移方法

（1）风险转移方法 1：保险

保险是通过支付保险费（可看作是保险单的价格）来避免损失的转移风险的方法。实质上，是用确定的损失（支付保险费）来替代可能遭受更大损失的做法。向商业保险公司投保，就是以交保险费为代价，将风险转嫁给保险公司。保险公司按保险合同约定承担赔付责任。对于损失概率较小而损失金额较大的风险，通常较为广泛地运用保险的方法。

传统的保险理论认为，采用保险的方法转移风险只适合纯风险，因为保险只企求消除掉损失而不奢望因此获利。投机性的风险通常不是可保风险。但从金融工程的角度看，保险是可以消除掉损失的风险而保留获利可能的风险转移方法，因此它是和期权理论紧密结合在一起的。例如，企业为了避免未来进货的价格波动风险，向供货商预付定金并预定供货价格，这就相当于购买了保险，定金就是保险费，同时又可看作是建立了一个买权的多头，定金就是期权费。

但是，通常的商业保险处理的是小概率大损失额的风险，保险费（即保险产品的价格）的定价技术和经典的期权定价理论（如布莱克-舒尔斯定价模型）是有区别的，因为保险标的发生损失的概率分布和期权标的物价格变化的概率分布是不一样的。传统的保险定价是依靠统计学和精算技术来支持的。广义地讲，保险是金融的一个分支，金融工程势必在保险领域有广泛的应用。事实上，西方保险学界和保险业界的许多人士都对金融工程有浓厚的兴趣。但是，保险和精算已经形成自己的学科特色，详细地讲解超出本书的范围。我们在这里仅仅是把保险作为一种转移风险的方法来讨论。

通常的保单即保险合约中含有以下一些特别的条款：

1）责任免除条款　例如购买人寿保险的投保人自杀，保险公司将不予赔付。

2）最高赔付额　保单通常都设定最高赔付额。

3）免赔额　例如对汽车保险来说，当汽车损坏的损失额在 1 000 元以内时保险公司不赔付，超出 1 000 元时赔付超出部分。

4）按比例赔付　保险公司只赔付总额的一个百分比，比如说 80%，剩余部分由投保人自理，这是一种按比例的扣付。

许多金融交易在本质上是保险，例如：

金融担保　这是对信用风险的保险，如果被担保者违约，则由提供担保的机构承担履约的责任。签发信用卡的银行等金融机构实际上向接受信用卡付款的商家提供了付款的保险。

利率顶和利率底　出售利率顶和利率底的机构提供了这样一种保险，当市场利率越出界限时承担赔付越界部分利息的责任。

各种期权都带有保险的性质，如我们后面要介绍的组合保险，是非常重要的投资策略，为投资组合的收益提供了保险。

(2) 风险转移方法 2：风险分散化

风险分散化是通过分散化的投资在投资组合内实现自然对冲，消除非系统风险，其结果是大大降低对单项有风险资产的风险暴露程度。马柯维茨投资组合理论的核心思想就是风险分散化。

风险分散化可以采用直接投资的方式，也可以采用金融投资的方式。就直接投资而言，可以通过投资于许多不同的企业来分散化，也可以通过一个企业分散化地投资于许多不同的项目；或者，采用金融投资的方式，分散化地投资于不同企业发行的有价证券。

"对冲"是下面讲的第三种风险转移方法"套期保值"的另一个译名，英文都是 hedge。自然对冲是指投资组合内的有风险资产的未来收益的变化不是全部完全正相关的，因此各自的不确定性在某种程度上会彼此互相抵消。而套期保值可以看作是人工对冲，即人为地构造相反头寸来实现未来收益不确定性的相互抵消。

这种自然对冲的概念不仅限于资产组合，还可以拓展到把负债组合一起包括进来。这是资产/负债综合风险管理技术的基本思想，即设法使资产组合收益的不确定性和负债组合支付的不确定性形成自然对冲。但也有人认为这种匹配资产/负债的技术应该归入人工对冲，因而属于套期保值。我们将在后面讨论资产/负债综合管理技术时再对此进行讲解。

(3) 风险转移方法 3：套期保值

套期保值与保险的不同，在于减少风险暴露的同时放弃了可能获利的机会。种粮户建立期货空头仓锁定了出售粮食的价格，规避了粮价下跌的风险，同时也丧失了粮价可能上升的获利机会。

可以用远期合约、期货来建立现货的相反头寸实现套期保值，也可以建立互换协议对利率风险和汇率风险作套期保值，更可以通过构建各种组合金融工具对所持的头寸作套期保值。设计各种套期保值策略和工具是金融工程师的重要工作。基本的设计原理是我们在本书中反复强调的复制技术(即无套利均衡分析)，另一方面，则应尽量降低套期保值的成本。

4. 套期保值的基本原理

套期保值的基本原理是建立对冲组合，当产生风险的一些因素发生变化时，对冲组合的净价值应保持不变。

例如我们的组合由 3 项资产 A_1, A_2, A_3 组成，组合的价值 V 为

$$V = n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3$$

其中 n_1, n_2, n_3 分别是资产 A_1, A_2, A_3 的份数。设计对冲组合就是要适当地选取 n_1, n_2 和 n_3，当影响资产价格的因素 x 发生变化时，使组合的价值 V 尽可能不变。如果 n_1, n_2, n_3 的选取使得

$$\frac{\partial V}{\partial x}=n_1\frac{\partial A_1}{\partial x}+n_2\frac{\partial A_2}{\partial x}+n_3\frac{\partial A_3}{\partial x}=0$$

就能近似地做到这一点，因为当 x 发生微小变化 δx 时，有

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x=0$$

一般地说，当影响资产价格变化的因素的数目小于组合中资产的种类数时，这样构筑对冲组合的做法是行得通的。

(1) 德尔塔(Δ)对冲

如果组合内的资产是同一标的物股票的不同衍生品，标的物股票的价格变化就成为影响各项资产，进而影响整个组合的价值的因素。希腊字母德尔塔(Δ)表示的是衍生资产的价格对标的物股票价格变化的敏感度，用偏导数来表示。如，$\Delta_A=\frac{\partial A}{\partial S}$，$\Delta_V=\frac{\partial V}{\partial S}$，等等。

对于期权来说，依据布莱克-舒尔斯公式，买权和卖权的德尔塔分别为

$$\Delta_c=\frac{\partial c}{\partial S}=N(d_1)>0$$

$$\Delta_p=\frac{\partial p}{\partial S}=-N(-d_1)<0$$

当 $S\to 0$ 时，$\Delta_c\to 0$，$\Delta_p\to -1$；当 $S\to\infty$ 时，$\Delta_c\to 1$，$\Delta_p\to 0$。

对于远期合约来说，因为 $f(t)=S(t)-Xe^{-r_f(T-t)}$，所以有

$$\Delta_f=\frac{\partial f}{\partial S}=1$$

对于期货来说，根据第九章的讨论，因为期货采取盯市交易规则，所以有 $F(t)=(F_D-F_{D-1})-(F_D-F_t)=F_t-F_{D-1}=S(t)e^{r_f(T-t)}-F_{D-1}$，因此

$$\Delta_F=\frac{\partial F}{\partial S}=e^{r_f(T-t)}$$

所谓德尔塔对冲是这样构筑对冲组合，当标的物股票的价格发生变化时，对冲组合的价值保持不变。由此可见，以 1 份远期合约的相反头寸与 1 份标的物现货头寸组合到一起，就构成对冲组合。因此，可以采用远期合约对标的物现货作严格和完全的套期保值。而为了对冲 1 份期货头寸，则需要持有 $e^{r_f(T-t)}$份标的物现货的相反头寸。所以，用期货作套期保值，必须动态地进行头寸的调整，这是盯市规则所决定的。下面我们马上会看到，远期和期货的伽马(Γ)值都为 0，就更加说明我们这里的论断。

德尔塔(Δ)对冲的对冲组合称为德尔塔中性(Δ neutral)的。

(2) 伽马(Γ)对冲

仅在标的物股票的价格只发生微小变动时，德尔塔对冲才是有效的，因为只考虑了 1 阶导数。如果标的物股票可能发生较大的变化，那么，对冲组合就要考虑 2 阶导数。于是引入伽马(Γ)对冲的概念。

伽马度量的是衍生资产的凸性，即 2 阶导数。对于不付红利的欧式期权来说，有

$$\Gamma_c=\frac{\partial\Delta_c}{\partial S}=\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

有

$$\Gamma_c = \Gamma_p > 0$$

显然，当 $S\to 0$ 和 $S\to\infty$ 时，都有 $\Gamma\to 0$。在期权临近两平状态时（即 S 接近预定价 X 时），其 Γ 值最大。在接近到期期限时，处于两平状态的期权的 Γ 值会非常大，这意味着此时期权头寸的价值对股票价格的变化极其敏感。

标准正态分布累积函数的导数的计算公式是

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

当标的物具有其他特性（如标的物股票支付红利，标的物是股票指数、外汇、期货等）时，按照第六章和第九章介绍的方法，不难算出相应的 Γ 值。例如支付连续红利率 η 的欧式期权，其 Γ 值为

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

当 η 是外汇无风险利率时，上式就是外汇欧式期权的 Γ 值。当 η 是无风险利率 r_f，而 S 取作期货价格 F 时，上式就成为欧式期货期权的 Γ 值。

显然，远期合约和期货的伽马值都为 0。

一个对冲组合是伽马（Γ）对冲的，意思就是这个组合的 Γ 值为 0。即有

$$\Gamma_V = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial\Delta_V}{\partial S} = n_1\frac{\partial\Delta_{A_1}}{\partial S} + n_2\frac{\partial\Delta_{A_2}}{\partial S} + n_3\frac{\partial\Delta_{A_3}}{\partial S} = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3 = 0$$

这样的对冲组合称为伽马中性（Γ neutral）的。

一个对冲组合如果既是德尔塔中性又是伽马中性的，那么就可以在标的物股票的 2 阶量变化上保持对冲组合的价值，即可以抵抗标的物股票较大幅度的变化。

例 1 我们用标的物股票和两个具有不同执行价的期权来构筑既是德尔塔中性又是伽马中性的对冲组合。假如目前股票的价格是每股 $S=50$ 元，年波动率 $\sigma=50\%$，无风险利率为 $r_f=3\%$。两个期权都是距到期日还有 10 周的欧式买权，但预定价不同。第一个买权的预定价是 $X_1=50$ 元，正好处于两平状态；第二个买权的预定价是 $X_2=55$ 元，处于虚值状态。不妨假定卖空第一个买权，再来选择标的物股票和第二个买权的数额，以此设计对冲组合。

利用布莱克-舒尔斯公式，可以算出 $\Delta_1=0.554$，$\Gamma_1=0.0361$ 和 $\Delta_2=0.382$，$\Gamma_2=0.0348$。请注意，对于标的物股票，有 $\Delta_S=1$ 和 $\Gamma_s=0$。现在卖空 1 份第一个期权，买入 n_S 份标的物股票和 n_2 份第二个期权来构筑对冲组合，有

$$\begin{cases} n_S - 0.554 + 0.382n_2 = 0 \\ 0 - 0.0361 + 0.0348n_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $n_S=0.158$，$n_2=1.037$。

这样构筑的对冲组合，当标的物股票价格从 50 元变到 51 元时，其价值的变化小于 0.001 元；而当股票价格从 50 元变到 60 元时，组合的价值变化小于 0.20 元。因此这样的对冲组合的套期保值功能是很好的。

（3）西塔（Θ）对冲、维伽（Λ）对冲和洛（*rho*）对冲

西塔（Θ）度量资产价值对时间流逝的敏感度。对于期权来说，有

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - r_f X \mathrm{e}^{-r_f(T-t)} N(d_2) < 0$$

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + r_f X \mathrm{e}^{-r_f(T-t)} N(-d_2)$$

有两点需要说明：第一，随着时间接近期权到期日，买权价值下降基于两条原因，一是接近到期日时期权价格的波动性变小，二是因为预定价不再折现得那么厉害（回忆一下布莱克-舒尔斯公式，包含预定价的那一项是负的）。第二，Θ_c 是负数并不意味着预期买权价格下跌，因为随着时间的流逝，标的物股票的价格是预期要上升的，回忆一下 $\Delta_c>0$，可知买权价格随时间变化的原因是多方面的，不只时间本身一个因素。

远期合约的西塔（Θ_f）值为 $\Theta_f = -r_f X \mathrm{e}^{-r_f(T-t)}$，期货的西塔（$\Theta_F$）值为 $\Theta_F = -r_f S(t)\mathrm{e}^{r_f(T-t)}$。

维伽有时也称为兰布达，所以我们用希腊字母 Λ 表示，它度量衍生资产的价值对标的物股票价格波动率变化的敏感度。对于期权来说，有

$$\Lambda_c = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1) > 0$$

$$\Lambda_p = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \Lambda_c$$

在标的物股票的价格接近预定价的现值 $X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}$ 时，期权的维伽值最大；当标的物股票的价格远离预定价时（期权处于深度实值或深度虚值状态时），期权的维伽值接近于 0。

和伽马的情况类似，当标的物股票支付连续红利率 η 时，期权的维伽值为

$$\Lambda_c = S\sqrt{T-t}N'(d_1)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)} = \Lambda_p$$

维伽值是期权交易商非常关注的一个参数，尤其是标的物资产的波动率不稳定时。

显然，远期和期货的维伽值都是 0。

洛（rho）度量的是衍生资产的价格对利率变化的敏感度。对于期权来说，有

$$rho_c = \frac{\partial c}{\partial r_f} = X(T-t)\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(d_2) > 0$$

$$rho_p = \frac{\partial p}{\partial r_f} = -X(T-t)\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(-d_2) < 0$$

远期合约的洛值为 $rho_f = (T-t)X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}$，期货的洛值为 $rho_F = (T-t)S\mathrm{e}^{r_f(T-t)}$。

显而易见，根据相同的原理，可以建立西塔对冲、维伽对冲和洛对冲的对冲组合，对时间、标的物资产的波动率和利率的变化作套期保值。

这样，对于同一标的物的衍生资产及其组合来说，受各种因素的影响导致的价值变化可表示为

$$\delta V = \Delta_V \delta S + \frac{1}{2}\Gamma_V(\delta S)^2 + \Theta_V \delta t + \Lambda_V \delta \sigma + rho_V \delta r_f$$

如果我们设计对冲组合，使之对所有这些希腊字母所代表的特征都成为中性的，那么就对所有这些因素的变化都实现了套期保值。

回忆一下布莱克-舒尔斯随机微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+r_f S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r_f f$$

（注意，这里 f 不表示远期合约，表示的是不分红股票的欧式期权），这个方程可以用上述希腊字母改写为

$$\Theta_f+r_f S\Delta_f+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma_f=r_f f$$

这就给出了不分红欧式期权的德尔塔、伽马和西塔之间的关系。

现在我们再用一个例子来进一步说明风险管理（尤其是套期保值）的原理。

假如我们发现市场上有一买权的价格 c 高于按布莱克-舒尔斯期权定价公式计算的均衡价 c_{BS}，于是认为出现了套利机会。套利策略是卖空这一买权，同时按布莱克-舒尔斯公式来复制这一买权的多头。从理论上讲，这样可以套取价值为 $(c-c_{BS})$ 的无风险利润。按照布莱克-舒尔斯公式的框架，需要不断地调整对冲组合使之保持平衡，而这种调整是无需成本的，到该买权的到期日，复制的买权会产生与被复制的买权完全相同的损益情况，因而可以完全对冲原来卖空的那个买权。复制组合的多头和原来那个卖空的买权放到一起就构成一个对冲组合。所以，这样做在理论上可以无风险并且无成本地套利。但是在实践中要这样做有很多障碍。首先，不可能非常频繁地调整对冲组合的头寸，因为每次调整都要发生交易成本，所以只能隔一段时间调整一次。但是，隔一段时间再调整一次会给对冲组合带来风险。因为调整有时是增加所持有的头寸，而有时则是减少之，所以对于对冲组合来说，有时是现金流出，有时是现金流入。如果对资产价值的波动率能够估算得很准，并不断地进行调整的话，所有的现金流入和流出加总起来应该接近于 0，但隔一段时间再调整一次就不能保证这种现金流的平衡。由例 2 能看出，从预期来看平衡是应当保持的，但实际发生的情况可能会有所偏离，从而造成风险。

例 2 继续用我们前面那个预定价为 $X=50$ 元的买权空头的例子。假定我们每周调整一次组合的头寸，因此所有的数据都以周（每年以 52 周计）为单位。标的物股票的按周计算的波动率为 $\sigma_w=\sqrt{\frac{(50\%)^2}{52}}=0.069$，无风险周利率为 $r_{wf}=3\%/52=0.00058$。

假定期权距到期日还有 10 周时间，即 $T=10$ 周，在起始日 $t=0$ 时，标的物股票的价格为 $S(0)=50$ 元。可算得用布莱克-舒尔斯期权定价公式来复制这个买权的组合的参数为

$$\begin{aligned}c_{BS}(S,t)&=c_{BS}(50,0)=4.5\\ \Delta(50,0)&=0.554=N(d_1)\\ L(50,0)&=23.21=Xe^{-r_{wf}(T-t)}N(d_2)\end{aligned}$$

此时复制组合为

$$H(50,0)=\Delta(50,0)S(0)-L(50,0)$$

1 周后，假如股票价格保持不变，即有 $S(1)=50$ 元，原来的那个复制组合的价值成为

$$0.554\times 50-23.21\times e^{0.00058}=4.48$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(50,1)=4.26$$

$$\Delta(50,1) = 0.5513$$
$$L(50,1) = 23.30$$

新的复制组合为

$$H(50,1) = \Delta(50,1)S(1) - L(50,1)$$

复制组合的头寸调整总的看来好比是卖掉旧组合(获得 4.48 元)再买进新组合(花费 4.26 元),这样,调整的结果有 0.22 元的现金流入。

再看 2 周后,假如股票价格跃升到 $S(2)=55$ 元,复制组合的价值成为

$$0.5513 \times 55 - 23.30 \times e^{0.00058} = 7.00$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(55,2) = 7.22$$
$$\Delta(55,2) = 0.7283$$
$$L(55,2) = 32.83$$

复制组合的头寸调整是卖掉旧组合(获得 7.00 元)再买进新组合(花费 7.22 元),这样,调整的结果有 0.22 元的现金流出。

于是,1 周后的现金流入(+0.22 元)和 2 周后的现金流出(−0.22 元)正好相抵,总的现金流入和流出加总起来为 0。

但是,如果 2 周后股票的价格骤跌至 45 元,则复制组合的价值成为

$$0.5513 \times 45 - 23.30 \times e^{0.00058} = 1.49$$

此时新的复制买权的组合的参数为

$$c_{BS}(45,2) = 1.79$$
$$\Delta(45,2) = 0.3388$$
$$L(45,2) = 13.45$$

在复制组合的头寸调整中,卖掉旧组合(获得 1.49 元)再买进新组合(花费 1.79 元),这样,调整的结果有 0.30 元的现金流出。

这样一来,1 周后的现金流入(+0.22 元)和 2 周后的现金流出(−0.30 元)就不能相抵,造成 0.08 元的损失。

隔一段时间调整一次组合的头寸的做法从预期上讲总的现金流入和流出为 0,但在实际中可能会发生偏差,从而带来风险。对于我们在这里讲解的例子(不分红股票的欧式买权)来说,这一点是可以从数学上加以证明的。我们把数学证明放到本章的附录中。

但是上述结论的前提条件是能够准确地估算标的物股票的价格波动率。如果对波动率的估算不准确,在我们的例子中(实际买权是空头,复制组合是多头),若未来的波动率高于我们原来的预期,则损失的机会大于获益的机会,总起来说是亏损。这好比是出售某样东西后“价格”(这里指波动率)往上走,就造成了亏损。反过来,若未来的波动率低于我们原来的预期,则获益的机会大于损失的机会,总起来说是盈利。这好比是出售某样东西后“价格”(波动率)朝下走,就带来了盈利。

5. 组合保险技术

证券组合保险技术是 80 年代初期由鲁宾斯坦(M. Rubinstein)和利兰德

(H. Leland)最早提出的,是保险的概念在证券投资中最直接的应用。

股票期权可以用来保证股票投资获得最基本的报酬率。当你在购买 1 支股票的同时购买 1 份这一股票的卖权,那么你投资于这支股票所能获得的价值不会低于这一卖权的执行价。这一卖权相当于为这支股票的收益提供了保险,卖权的期权费相当于保费。

例　有 1 支股票现在的价格是 56 元,1 年内不分红,你希望投资于这支股票来赚取资本收益。但是 1 年后股票的价格可能下跌,为此购入以此股票为标的物,预定价为 50 元,1 年后到期的欧式卖权。市场无风险利率是 $r_f=8\%$,股票的波动率经测算为 $\sigma=30\%$,用布莱克-舒尔斯期权定价公式算的卖权的均衡价格是 2.38 元。这样,1 年后如果股票价格高于 50 元,可以让卖权作废。尤其是高于 56 元的话,就能赚到资本收益。如果股票价格低于 50 元,就可以执行卖权,以预定价 50 元脱手,从而不会被套住。这就相当于购买了一项扣付额为 6 元的保险(6 元以内的损失自负,6 元以上的损失由出售保险者理赔)。2.38 元就相当于保费。

实际的问题在于,是否市场上正好有这支股票的卖权交易。进一步说,为了分散化消除非系统风险,经常要采取组合投资的策略。从道理上讲,同单支股票一样,如果存在以股票组合为标的物的卖权,则完全可以按上述相同的方法为股票组合的投资提供保险。可是,股票组合是五花八门的,因此一般来说,在市场上不可能正好找到组合的卖权(有一些组合的期权是存在的,如某些指数的期权,像标准普尔 500 的指数期权)。组合保险技术的核心思想就在于无套利均衡分析的复制技术,复制出所需要的卖权作替代物。这一创造,可以看作是典型的金融工程产物。

对于一个证券组合,如果能测算出有关的参数(例如组合的波动率 $\sigma_{\text{portfolio}}$),就能用布莱克-舒尔斯期权定价公式及其变形来复制所需要的卖权。如要复制证券组合的欧式卖权,复制公式就是读者已经熟悉的

$$p(t)=-S(t)N(-d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)$$

其中,

$$d_1=\frac{\ln(S(t)/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

因此,复制卖权的涵义就是证券组合的空头加上无风险证券的多头的组合。这样,带保险的证券投资组合就变成

$$\begin{aligned}S(t)+p(t)&=S(t)[1-N(-d_1)]+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)\\&=S(t)N(d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)\end{aligned}$$

(对于累积正态分布函数来说,有 $1-N(-x)=N(x)$)。

于是,带保险的证券投资组合就是一部分投资于证券组合,一部分投资于无风险证券。设投资于证券组合的比例为 $\omega(t)$,投资于无风险证券的比例就是 $1-\omega(t)$,有

$$\omega(t)=\frac{S(t)N(d_1)}{S(t)N(d_1)+Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)}$$

这两部分的投资比例 $\omega(t)$ 和 $1-\omega(t)$ 要随着时间 t 的变化不断地进行动态调整。下面是 $\omega(t)$ 的一些变化规律。

1) 当股票的价格高于预定价(即 $S(t)\geqslant X$)时,$\omega(t)>50\%$。

2）当股票或证券组合的价格 $S(t)$ 上升时，$\omega(t)$ 变大，否则反之。

3）当 $t\to T$ 时，出现两种情况：若 $S(t)>X$，则 $\omega(t)\to 1$；若 $S(t)<X$，则 $\omega(t)\to 0$。

我们把这 3 条变化规律的证明放到数学附录里。

由这 3 条规律我们可以发现，这样的策略确实能对证券组合投资起到保险的作用，而这种策略必须是动态调整的。由我们前述关于复制组合的成本问题（参阅本章数学附录 1）可知，动态调整现金流入和流出总和的预期值为 0。因此，只要证券组合的波动率 $\sigma_{\text{portfolio}}$ 测得比较准，适当地安排调整周期，证券组合保险的投资策略是可以成功的。

最后，需要指出的是，组合保险能够保证获得的最高的有保障投资收益不可能超过投资于无风险证券的收益。这一点的证明也放到数学附录里。

组合保险技术在 80 年代上半期曾经非常流行。但是，1987 年 10 月 19 日（黑色星期一）的美国股市崩盘，其一部分原因在于遵照组合保险模型进行交易的投资者的巨额抛盘。由于采取计算机操作的程序化交易，遵循互相类似的组合保险模型的指令集中抛售，使股票和指数期货的市场价格一泻千里。这正好说明当大家都在市场上采用同一交易策略时，就可能会带来意想不到的坏的后果。因此，在此之后，这种交易策略在美国市场上就大为萎缩了。不过，这种交易策略对于新兴的中国资本市场，则完全可能仍然是有魅力的。

6. 久期与凸性

（1）久期

久期（duration）的概念最早是麦卡莱（F. R. Macaulay）在 1938 年提出的，最基本的久期概念就称为麦卡莱久期。久期最先是用来度量债券的价格对利率变化的敏感性的，而且假定表示利率的期限结构的国库券的收益曲线是平坦的。

读者已经很熟悉，债券（可以推广到所有具有固定收益现金流的资产）的均衡定价是

$$P_0 = PV = \sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

其中 r 是适合于当时的市场利率环境（利率的期限结构）和债券（资产）风险性质的折现率。麦卡莱久期的定义是

$$D = \sum_{t=1}^{N} \left[\frac{\dfrac{C_t}{(1+r)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+r)^t}} \right] t = \frac{1}{P_0} \sum_{t=1}^{N} \left[\frac{C_t}{(1+r)^t} \right] t$$

所以，久期实际上是一个加权平均的时间长度。对于折现债券来说，因为所有的 $C_t = 0, t=1,\cdots,N-1$，从而 $D=N$，即折现债券的久期就是债券的到期期限。对于所有期间有现金流发生的债券（资产）来说，久期都短于到期期限。

但是，久期还可以有其他的解释。我们改写一下上面的久期表达式

$$D = \sum_{t=1}^{N} t \left[\frac{C_t / P_0}{(1+r)^t} \right]$$

这样，因为所有的 $\left[\dfrac{C_t/P_0}{(1+r)^t}\right]$ 加起来为 1，可以把久期解释为以时间 t 为权重，在时间 t 支付的现金流的折现值占整个债券（资产）价值的比例的加权平均值，所以也是债券（资

产)支付的加权平均。这也是麦卡莱最原始的解释。

久期也可解释为债券(资产)的价格对其折现率(利率)变动的弹性。因为有

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}=-\sum_{t=1}^{N}\left[\frac{C_t}{(1+r)^{t+1}}\right]t=-\frac{DP_0}{1+r}$$

即有$\frac{\mathrm{d}P_0/P_0}{\mathrm{d}r/(1+r)}=-D$,所以久期是价格对利率的弹性。再改写一下,有

$$\frac{\mathrm{d}P_0}{P_0}=-D\frac{\mathrm{d}r}{1+r}$$

如果市场利率发生变化 Δr,由此式可以估算出价格的变化 ΔP_0。

表面上看,好像债券(资产)的到期期限越长,久期也就越长。其实不然。对于相同息票利率和到期收益率的债券型金融资产来说,随着到期期限的增大,久期先是变大,超过一定期限后会逐渐变小,并收敛到一个确定的数值。

如果一债券有 N 次利息支付,支付的时间距离目前的时刻分别是 $\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\cdots,\alpha+N-1$,其中 $0<\alpha<1$。这意味着第一次支付距开始时刻不到 1 个单位时间。按照前面久期的相同算法,作一点小小的数学变换,可以得到

$$D=\frac{1}{\sum_{t=1}^{N}\frac{C_{t+\alpha}}{(1+r)^t}}\left[\sum_{t=1}^{N}\frac{tC_{t+\alpha}}{(1+r)^t}\right]+\alpha-1$$

因此,这种首次支付距起始日不到 1 个单位时间的债券(资产)的久期是两个部分的和,即相隔单位时间的 N 次支付的现金流的久期加上 $\alpha-1$。

对于表示利率的期限结构的国库券的收益曲线不是平坦的情况,则代表债券(资产)价值的折现现金流现值应为

$$P_0=PV=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

如果国库券收益曲线发生平移,不同期限的利率(及预期收益率、折现率)变动同一个 Δr 值,则上式变为

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t}{(1+r_t+\Delta r)^t}$$

这样的情况完全可以用对 Δr 求导数的同样方法计算久期。至于收益曲线发生的变动不是平行移动,情况就变得复杂得多。需要采用我们在第九章介绍过的利率的期限结构模型作深入的分析,我们就不在本书中展开。

另外值得指出的是,如果我们把利率处理成连续复利的形式,可以得到久期的更为简洁的关系式。令 $r^*=\ln(1+r)$,则有 $P_0=PV=\sum_{t=1}^{N}\frac{C_t}{(1+r)^t}=\sum_{t=1}^{N}C_t\mathrm{e}^{-r^*t}$,和 $D=\sum_{t=1}^{N}\left[\frac{C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}{\sum_{t=1}^{N}C_t\mathrm{e}^{-r^*t}}\right]t=\frac{1}{P_0}\sum_{t=1}^{N}tC_t\mathrm{e}^{-r^*t}$。这样可以导出$\frac{\mathrm{d}P_0}{P_0}=-D\mathrm{d}r^*$。

久期的非常重要的性质是具有可加性:一个资产组合(或负债组合)的久期是组合内各项资产(或负债)的久期的加权和,权重与该项资产(或负债)对整个组合的权重相同。即

若组合的价值为 $V=\sum_{j=1}^{M}V_j$，第 j 项资产（或负债）的久期是 D_j，则整个组合的久期为 $D=\sum_{j=1}^{M}w_jD_j$，其中 $w_j=\frac{V_j}{V}$。有关可加性的数学证明也在本章的附录里。

（2）风险免疫策略

久期的概念可用于设计利率风险免疫策略（immunization strategies）。我们用一个简单的例子来说明。

假定公司有一笔折现型的负债，面值是 Q，期限是 N 年。负债的现值就是 $V_L=\frac{Q}{(1+r_L)^N}$，其中 r_L 是一个由市场条件决定的适当的折现率。我们先把它处理成连续复利的表示形式，即令 $r_L^*=\ln(1+r_L)$，则 $V_L=Qe^{-r_L^*N}$。

现在公司把这笔负债筹措的资金投资于一项资产，这项资产将每年提供固定收益现金流 $P_1,\cdots,P_N$。为了分析的简单起见，我们假定国库券的收益曲线是平坦的，发生的变动则是平移。于是资产的现值为 $V_A=\sum_{t=1}^{N}\frac{P_t}{(1+r_A)^t}$，表示成连续复利的表示形式，令 $r_A^*=\ln(1+r_A)$，有 $V_A=\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}$。

请注意，有 $V_A=V_L$。现在如果（连续复利）利率发生变动 Δr^*，因为国库券收益曲线平行移动，所以负债和资产的利率变化是一样大小的。对于负债来说，有

$$V_L+\Delta V_L=V_L+\frac{dV_L}{dr^*}\Delta r^*=V_L+[-NQe^{-r_L^*N}]\Delta r^*$$

对于资产来说，有

$$V_A+\Delta V_A=V_A+\frac{dV_A}{dr^*}\Delta r^*=V_A+\left[\sum_{t=1}^{N}-tP_te^{-r_A^*t}\right]\Delta r^*$$

如果 $\Delta V_A=\Delta V_L$，则市场利率的变动对公司的这项融资投资活动的效益不产生影响，即可认为对利率风险具有免疫功能。而 $\Delta V_A=\Delta V_L$ 的充分必要条件是

$$\left[\sum_{t=1}^{N}-tP_te^{-r_A^*t}\right]\Delta r^*=[-NQe^{-r_L^*N}]\Delta r^*$$

因为 $\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}=V_A=V_L=Qe^{-r_L^*N}$，所以有

$$D_A=\frac{\sum_{t=1}^{N}tP_te^{-r_A^*t}}{\sum_{t=1}^{N}P_te^{-r_A^*t}}=\frac{\sum_{t=1}^{N}tP_te^{-r_A^*t}}{Qe^{-r_L^*N}}=N=D_L$$

由此得到结论：

> 如果国库券收益曲线反映的利率的期限结构是平坦的，而且收益曲线的变动只是平移，则实现利率风险免疫的充分必要条件是资产的久期与负债的久期相等。

现在引入久期缺口的概念。以 V_A 表示企业的总资产价值，V_L 表示总负债价值，V_E 表