国家自然科学基金重大项目（金融工程）丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

宋逢明 著

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第三章　两基金分离定理与资本资产定价模型

金融决策的核心问题是收益与风险(包括流动性问题)的权衡。个体的决策通过竞争统一到市场的无套利均衡之中。如果两项决策会带来相同的预期收益而要承受不同的风险,那么,风险大的那项决策将是无效的;反之,如果结果要承受相同的风险而有不同的预期收益,那么,预期收益小的那项决策也将是无效的。人们在高风险高收益和低风险低收益之间,按照自己对收益/风险的偏好进行权衡和优化。但市场的均衡却会导致与个体的收益/风险偏好(或者说个体的效用函数)无关的结果,这是市场对市场参与者个体行为整合的结果。本章中我们通过介绍投资组合理论和资本资产定价模型来说明这一点。

1. 投资组合的选择

1952 年马柯维茨(Harry Markowitz)提出的投资组合理论通常被认为是现代金融学的发端。这一理论的问世,使金融学开始摆脱纯粹描述性的研究和单凭经验操作的状态,数量化方法进入了金融领域。马柯维茨的工作所开始的数量化分析技术和 MM 理论中的无套利均衡思想相结合,酝酿了后续一系列金融学理论的重大突破。

投资组合的选择(portfolio selection)狭义的含义是如何构筑各种有价证券的头寸(包括多头和空头)来最好地符合投资者的收益和风险的权衡。广义的含义则包括对所有资产和负债的构成做出决策,甚至包括对人力资本(如教育和培训)的投资在内。我们的讨论则限于狭义的含义。

尽管存在一些对理性的投资者(指具有不同程度的风险厌恶倾向的投资者)来说应当遵循的一般性规律,但在金融市场中,并不存在一种对所有的投资者来说都是最佳的投资组合或投资组合的选择策略。因为有以下的原因:

1) **投资者的具体情况**　不同的投资者(包括个人投资者和机构投资者)有不同的利益结构,对于市场的变动也有不同的敏感性。一位受雇于证券公司按赢利分成的证券分析师和一位中学教师不同,前者的收入对股票市场的波动非常敏感,后者则不然。前者如果再把自己的钱去投资于股票则比后者要承受大得多的风险。

2) **投资周期的影响**　不同的投资者调整自己的投资组合的周期长短不一。有的投资者频繁地变化自己的投资组合(如积极炒股的股民),有的则会很长时间才调整一次(如在银行开设长期定期存款账户的储蓄者)。对于这些不同的投资者来说,他们对同一个投资组合肯定会有不同的看法。而且,投资者们各自的投资周期还会随着时间的流逝而变化。

3) **对风险的厌恶程度**　不同的个人投资者因为其年龄、地位、财产状况等,不同的机构投资者则因为各自的经营方针和实力,对风险会采取不同的态度。不过,一个人(机构也一样)愿意接受风险和他(它)是否有能力承担风险是两回事,这一点在进行投资分析时应

加以注意。

4）投资组合的种类　虽然从理论上讲，由银行和非银行金融机构所提供的金融商品可以构筑起无穷多种投资组合，但实际上真正可供投资者选择的只是有限的几种。投资组合理论给出了选择投资组合的指导性思路。

2. 预期收益和风险的权衡

下面我们讨论在构筑投资组合时如何进行预期收益与风险的权衡的数量化分析方法。收益与风险权衡的优化目标是按照投资者愿意接受的风险程度使预期收益达到最大。

为了行文的方便起见，除了无风险证券外，我们把所有有风险的股票、债券及其他衍生证券统称为有风险资产。

投资组合理论的基本思想是通过分散化的投资来对冲掉一部分风险。有一条古老的西方谚语"不要把鸡蛋放在一个篮子里"，就已经体现出这一思想。我们先来分析把 2 项资产（有风险和/或无风险）放到一起时，其组合的收益和风险的情况。

假定资产 1 在组合里（按市场价值计）的比重是 w，则资产 2 的比重就是 $1-w$。它们的预期收益率和收益率的方差分别计为 $E(r_1)$，$E(r_2)$；σ_1^2 和 σ_2^2，组合的预期收益率和收益率的方差则计为 $E(r)$和 σ^2。由简单的概率论知识知

$$E(r) = wE(r_1) + (1-w)E(r_2)$$

$$\sigma^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$$

其中 ρ 是相关系数，一定有$-1\leqslant\rho\leqslant+1$ 的关系。

如果其中有一项资产，比如资产 2，是无风险资产，则有 $E(r_2)=r_f$，$\sigma_2=0$（无风险资产的收益率是确定的，因此其标准差为零）。上面的式子简化为

$$E(r) = r_f + w[E(r_1) - r_f]$$

$$\sigma = w\sigma_1$$

我们先来讨论这种情况。

情况 1：1 项有风险资产和 1 项无风险资产的组合

由预期收益率的表示式可以看到，组合的预期收益率也是以无风险收益率为基础再加上风险补偿。风险补偿的大小取决于有风险资产本身的收益率中含有的风险补偿 $E(r_1)-r_f$和有风险资产在组合里的比重 w。从上面两个方程可以解出

$$w = \frac{E(r) - r_f}{E(r_1) - r_f}$$

$$E(r) = r_f + \frac{[E(r_1) - r_f]}{\sigma_1}\sigma$$

如果现在市场的无风险利率是 6%，资产 1 的预期收益率是 14%，标准差是 20%。现在我们希望组合的预期收益率是 11%，组合的构成和风险将是如何？

$$w = \frac{E(r) - r_f}{E(r_1) - r_f} = \frac{11\% - 6\%}{14\% - 6\%} = 62.5\%$$

$$\sigma = w\sigma_1 = 62.5\% \times 20 = 12.5$$

在一指定的风险水平，如果一投资组合可能获得最大的预期收益，则这一投资组合被

称为有效组合。上面这个组合是否有效组合呢？回答是否定的。因为我们还可以在这个投资组合里再加进有风险资产，进行风险的分散化。

3. 风险的分散化

风险的分散化原理被认为是现代金融学中唯一“白吃的午餐”。将多项有风险资产组合到一起，可以对冲掉部分风险而不降低平均的预期收益率，这是马柯维茨的主要贡献。

情况 2：2 项有风险资产的组合

组合的预期收益率及其方差的表达式已在上一节给出。因为 $-1 \leqslant \rho \leqslant +1$，所以有

$$[w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2]^2 \leqslant \sigma^2 \leqslant [w\sigma_1 + (1-w)\sigma_2]^2$$

因为对于一般的金融工具来说，有后文中要提到的系统风险（市场风险）的存在，所以我们不讨论 $\rho=-1$ 的情况。而如果 $\rho=+1$，意味着这两项资产的风险完全正相关。因为容许卖空，当然可以适当地选择比例 w，使得 $\sigma^2=0$，但此时有一权重取负值（空头），由无套利原理知，其预期收益率应该等于无风险利率。此时，这两种证券的多头和空头头寸正好互相对冲，我们也可以暂时不考虑这种情况。

由上面右方的不等式可以看出，组合的标准差不会大于标准差的组合。事实上，只要 $\rho<1$，就有 $\sigma<|w\sigma_1+(1-w)\sigma_2|$，这说明组合确实能起到降低风险的作用，这就是投资分散化的原理。

现在我们给出一个数字例子。有风险资产 1 和 2 的预期收益率和标准差见表 3.1。

表 3.1

	资产 1	资产 2
预期收益率	0.14	0.08
标准差	0.20	0.15
相关系数	0.6	

我们考虑以下几种组合的情况，见表 3.2：

表 3.2

组合标记	投资于资产 1 的比例	投资于资产 2 的比例	组合的预期收益率	组合的标准差
R	0	100%	8%	0.15
C	10%	90%	8.6%	0.1479
最小方差组合	17%	83%	9.02%	0.1474
D	50%	50%	11%	0.1569
S	100%	0	14%	0.20

稍有微积分知识的读者就明白，最小方差组合中投资于资产 1 的比例可以这样求出

$$w_{\min} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

图 3.1 描绘了不同组合的预期收益率和标准差之间的关系。而且，用初等数学就可以证明，这条描绘标准差——预期收益率关系的曲线是一条双曲线。

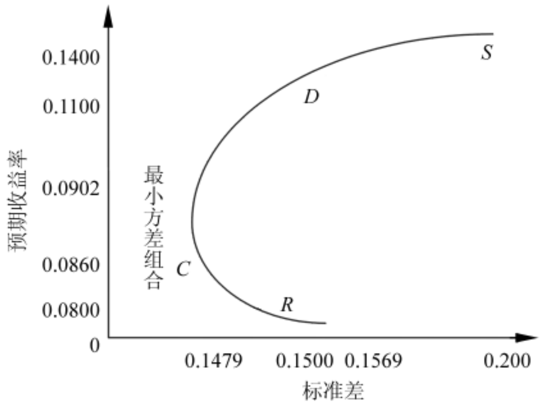

图　3.1

情况 3：多项有风险资产的组合

假定现在有 n 项有风险资产，它们的预期收益率记为 $E(r_i)$：$i=1,\cdots,n$，彼此之间的协方差记为 σ_{ij}：$i,j=1,\cdots,n$（当 $i=j$ 时，σ_{ii}就表示方差）。$w_1,\cdots,w_n$ 表示相应的资产在组合中的比重。于是投资组合的预期收益率和方差就应当是

$$E(r)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)$$

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}$$

下面我们只讨论 $\sigma^2>0$ 的情况。以后将可看到，这样限定是有道理的，并得到经验事实的支持。优化投资组合就是在要求组合有一定的预期收益率的前提条件下，使组合的方差越小越好，即求解以下的二次规划

$$\min_{w}\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}w_iE(r_i)=E(r)$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$$

因为可能有的读者对数学规划不熟悉，我们稍作解释。第一个式子表示选择组合的比例系数使组合的方差这一目标函数最小化，同时必须满足下面两个式子的约束条件。

对于每一给定的 $E(r)$，可以解出相应的标准差 σ，每一对（$E(r)$，σ）构成标准差——预期收益率图（图 3.2）的一个坐标点，这些点就连成图 3.2 中的曲线。同样可以从数学上证明，这条曲线是双曲线，这就是最小方差曲线。

最小方差曲线内部（即右边）的每一个点都表示这 n 种资产的一个组合。其中任两个点所代表的两个组合再组合起来得到的新的点（代表一个新的组合）一定落在原来两个点的连线的左侧，这是因为新的组合能进一步起到分散风险的作用。这也就是曲线向左凸的原因。

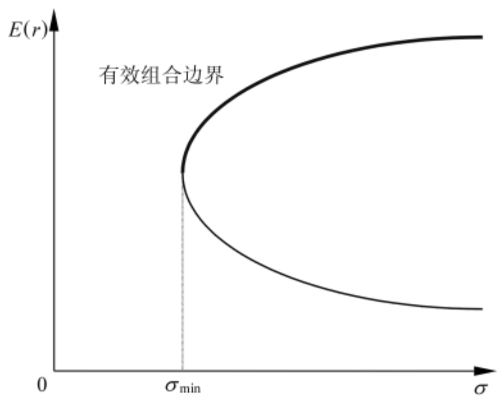

图　3.2

实际上，最小方差曲线只有左上方的那一段是有意义的，与其对称的左下方的那一段是没有意义的。因为在承受同样风险（同样的标准差）的情况下，上面的点所代表的投资组合的预期收益率比下面的点所代表的组合的预期收益率高。因此，我们称最小方差曲线左上方的那一段为有效组合边界。显然，只有在有效组合边界上的点所代表的投资组合才是符合正确的投资策略的优化组合。不过请注意，这里的组合还只包括有风险资产。和情况1不同的是，我们现在还没有引进无风险证券。

尽管我们在这里论证时用了一点优化的手段（求解二次规划），但实际上有效组合边界的存在和确定是和个别投资者的效用（收益/风险偏好）没有关系的。这也就印证了在本章开头所说的话，但事情还不止如此。

为了看得更清楚起见，我们来看任一位投资者的收益/风险效用函数。在标准差——预期收益率图上，我们画出等效用曲线（见图3.3）。因为承受高的风险要求高的风险补偿，所以等效用曲线是递增的。在已经承受较高风险的情况下，要进一步增加风险，就会要求更高的风险补偿；相反，在预期收益已经比较低时，要进一步降低收益，也会要求降低更多的风险。这就是经济学里边际效用递减的原理。所以等效用曲线是向右下方凸的（数学

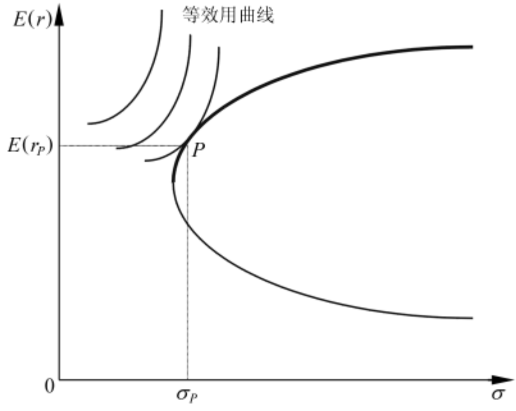

图　3.3

上称为凸函数)。越向左上方移动,等效用曲线所表示的效用函数值就越大。显而易见,如果这位投资者要从这里的 n 种有风险资产来选择投资组合的话,一定应该是他的等效用曲线和有效组合边界相切的那一点 P 所代表的组合是最佳选择,见图 3.3。

为了分析的简单起见,我们假定这 n 种有风险资产在投资组合里的比重是一样的,即有 $w_i=\dfrac{1}{n}, i=1,\cdots,n$。于是组合的方差可写成

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\sigma_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sigma_{ij}$$

因为 $\sigma_{ii}=\sigma_i^2$,所以上式右端的第一项是 n 项有风险资产的方差的和。又因为每一项有风险资产的方差是有限的数,分母是 n^2,所以当 n 变得很大时,这一项会趋于零。但第二项不会趋于零,而是趋于协方差的平均值。记 $\bar{\sigma}_{ij}=\dfrac{1}{n^2-n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sigma_{ij}$ 即协方差的平均值,就有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sigma_{ij}=\frac{n^2-n}{n^2}\bar{\sigma}_{ij}$$

当 n 变得很大时,就趋于协方差的平均值 $\bar{\sigma}_{ij}$。

由此可以得出重要的结论:当投资组合含有许多种有风险资产时,个别资产的方差将不起作用。各项资产之间的协方差有正有负,它们会起互相对冲抵消的作用,但不会完全对冲抵消。因而组合的方差就近似等于平均的协方差(即未被抵消的部分)。为什么不会完全对冲抵消而使平均的协方差等于零呢?因为各项资产的收益变动存在某种“同向性”。这种同向性的风险是所有的不同资产都同时承受的,被称为系统风险或市场风险,而可以对冲抵消的风险就被称为非系统风险或企业风险。于是有:

> 通过扩大投资组合(即增加所包含的资产的种类)进行风险分散化,可以消除非系统风险(企业风险),但不能消除系统风险。

表 3.3 和图 3.4 记录了从纽约股票交易所随机地挑选股票构成等权重的股票组合,随着股票种类数的增多,组合的年收益率的波动性(用收益率的标准差来度量)的变化情况。从图表中可以看出,在股票的种类数超过 30 种以后,风险再降低的程度就不明显了。事实上,平均波动性不会低于 19.2%,这就是无法通过分散化消除的系统风险(市场风险)。

表 3.3

组合中的股票数	组合年收益率 波动性的平均数(%)	组合波动性与 单个股票波动性的比例
1	49.24	1.00
2	37.36	0.76
4	29.69	0.60
6	26.64	0.54
8	24.98	0.51

续表

组合中的股票数	组合年收益率 波动性的平均数(%)	组合波动性与 单个股票波动性的比例
10	23.93	0.49
20	21.68	0.44
30	20.87	0.42
40	20.46	0.42
50	20.20	0.41
100	19.69	0.40
200	19.42	0.39
300	19.34	0.39
400	19.29	0.39
500	19.27	0.39
1 000	19.21	0.39

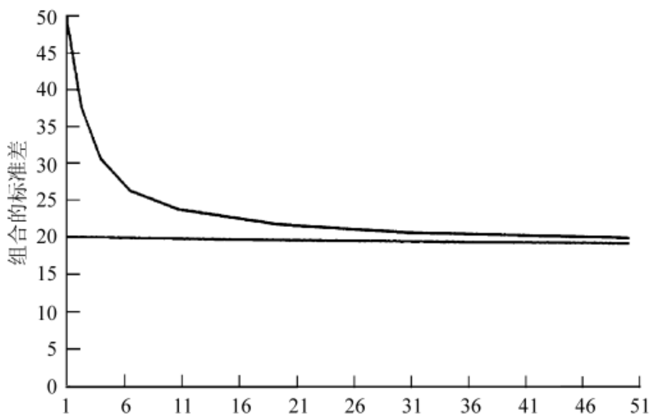

图 3.4

非系统风险是企业特有的风险,诸如企业陷入法律纠纷、罢工、新产品开发失败,等等。系统风险则指整个市场所承受到的风险,如经济的景气情况、市场总体利率水平的变化等因为整个市场环境发生变化而产生的风险。

因为投资者可以通过分散化投资降低以至于消除非系统风险,所以,持有风险分散化投资组合的投资者比起不进行风险分散化的投资者,可以要求相对比较低的投资回报率(预期收益率)。这样,在市场交易中就处于比较有利的竞争地位。市场的均衡定价将根据竞争优势者的行为来确定。因此,市场定价的结果,将只对系统风险提供风险补偿,只有系统风险才是市场所承认的风险。所以,

只有市场所承认的风险(即系统风险)才能获得风险补偿。

对于有风险资产而言,通过市场交易定出的均衡价格,其收益率只包含系统风险的风

险补偿而不对非系统风险提供风险补偿，这一点一定要牢记。

因此，如果我们讨论市场上所有有风险资产的可能组合的话，包含全部有风险资产的可能组合的双曲线的有效边界上的点所代表的投资组合，一定是通过充分的风险分散化而消除了非系统风险的投资组合。

4. 两基金分离定理

现在我们来介绍重要的两基金分离定理。

> 两基金分离定理：在所有有风险资产组合的有效组合边界上，任意两个分离的点都代表两个分离的有效投资组合，而有效组合边界上任意其他的点所代表的有效投资组合，都可以由这两个分离的点所代表的有效投资组合的线性组合生成。

这个定理的数学证明其实并不困难，但对于不熟悉数学推理的读者来说可能会觉得繁琐，所以我们把证明放到本章的附录里，这里先作一点说明。

由前面情况 2 的介绍知，过任意两个分离的各自代表有风险资产的点可以生成一条双曲线。有效组合边界上的两个分离的点可以看作两项有风险资产，它们也就可以生成一条双曲线。有效组合边界本身是一条双曲线。任意两条不同的双曲线不可能在同一侧有两个分离的切点。而如果这两条双曲线在这两个点是相交的话，则由两个点生成的双曲线一定会有一部分落在有效组合边界所围区域的外面。由有效组合边界的定义知这是不可能的，所以这两条双曲线一定重合，亦即两基金分离定理成立。

两基金分离定理在金融上的涵义则是令人吃惊的。有一类专门从事分散化投资的金融中介机构叫做共同基金。共同基金一方面发行小面额的受益凭证作为自己的负债，另一方面则把筹集到的大笔资金进行分散化投资，形成自己的投资组合。如果有两家不同的共同基金，它们都投资于有风险资产，而且都经营良好，经营良好意味着它们的收益/风险关系都能达到有效组合边界。那么，两基金分离定理告诉我们，任何别的投资于有风险资产的共同基金，如果经营良好（即能够达到有效组合边界）的话，其投资组合一定与原来那两个共同基金的某一线性组合等同。只要找到这样两家不同的经营良好的共同基金，把自己的资金按一定的比例投资于这两家基金，就可以与投资于其他经营水平高的共同基金获得完全一样的效果。这一结论对投资策略的制定无疑有重要的意义。

5. 资本市场线

现在我们在投资组合中引入无风险资产。

在所有可能有风险资产组合所构成的双曲线所围区域的有效组合边界左下端，就是最小方差组合。因为有系统风险存在，最小方差组合不是无风险的，其预期收益率也一定高于无风险利率 r_f。于是，在标准差——预期收益率图中，有效组合边界和表示预期收益率大小的纵坐标轴是不相接触的，而代表无风险证券的收益/风险的坐标点是落在这根轴上的。因而，在加入无风险证券后，代表新的组合的点一定落在连接 r_f 点和包含所有可能的有风险资产组合的双曲线所围区域及其边界的某一点的半直线上。

这样的半直线当然有无数多条。但我们很容易从图中发现，当半直线围绕 r_f 点逆时针旋转时，不管投资者的收益/风险偏好如何（即不管效用函数的曲线形状如何），越在上面的半直线上的点，其效用值越大。于是，效用值最大的半直线一定是与有效组合边界相切的那一条，即连接 r_f 点和 M 点的半直线，见图 3.5。

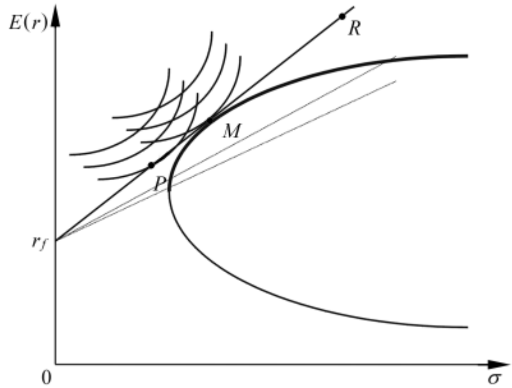

图 3.5

这条半直线实际构成了无风险证券和有风险资产组合的有效组合边界。这条半直线被称为资本市场线（CAL—capital market line）。

现在我们再看一下前面情况 1 里所介绍的。那里的一项有风险资产不会落在所有有风险资产的有效组合边界上，更不会就是切点 M 所代表的投资组合，所以那里所讲的组合就不会是有效组合。在包含无风险证券时，代表有效组合的点必须落在资本市场线上。

在这个包括无风险证券和有风险资产组合的有效组合边界（即资本市场线）上，两基金分离定理实际上依然成立。不过在这里，其中一项基金是无风险证券，而另一项则是切点 M 所代表的有风险资产的组合。资本市场线上任意一点（如 P 点）所代表的投资组合，都可以由一定比例的无风险证券和由 M 点所代表的有风险资产组合生成。

因此得出一个在金融上有很大意义的结果。对于从事投资服务的金融机构来说，不管投资者的收益/风险偏好如何，只需要找到切点 M 所代表的有风险投资组合，再加上无风险证券，就能为所有的投资者提供最佳的投资方案。投资者的收益/风险偏好，就只需反映在组合中无风险证券所占的比重。

这一最佳投资方案的设计与投资者的收益/风险偏好无关的结果，看来更能说明两基金分离定理中“分离”一词的涵义。如前所述，代表最小方差组合的点位于 r_f 点的右上方，从而保证了切点（M 点）的存在性（如果最小方差组合的预期收益率与无风险收益率相等的话，双曲线上的切点会不存在，资本市场线会变成双曲线的渐近线）。资本市场线在 M 点右上方的部分所包含的投资组合（如 R 点），是卖空了无风险证券（即以无风险利率贷款）后，将所得的资金投资于 M 点所代表的有风险资产组合。

如果 M 点所代表的有风险资产组合的预期收益率和标准差分别是 $E(r_M)$ 和 σ_M，投资于这一有风险资产组合的资金比例是 w_M，投资于无风险证券的资金比例是 $1-w_M$，则加上无风险证券后的组合的预期收益率 $E(r_p)$ 和标准差 σ_p 就应是

$$E(r_p)=r_f+\frac{[E(r_m)-r_f]}{\sigma_M}\sigma_p$$

$$\sigma_p=w_M\sigma_M$$

剩下的任务是要搞明白 M 点所代表的有风险资产组合是什么样的组合。

6. 市场组合

市场组合是这样的投资组合，它包含所有市场上存在的资产种类，各种资产所占的比例和每种资产的总市值占市场所有资产的总市值的比例相同。

举例来说，一个很小的市场只有 3 种资产：股票 A、股票 B 和无风险证券。股票 A 的总市值是 660 亿元，股票 B 的总市值是 220 亿元，无风险证券的总市值是 120 亿元。市场所有资产的总市值是 1 000 亿元。于是，一个市场组合包括所有这 3 种证券，股票 A 的价值在其中占 66%，股票 B 的价值占 22%，无风险证券占 12%。因此，市场组合是一个缩小了的市场盘子。

有风险资产的市场组合就是指从市场组合中拿掉无风险证券后的组合。这样，在上面的例子里，有风险资产的市场组合里，股票 A 和股票 B 的比例是 3∶1(660/220)，即股票 A 占 75%，股票 B 占 25%。

现在我们断言：

> 资本市场线与有风险资产的有效组合边界的切点 M 所代表的资产组合就是有风险资产的市场组合。

首先，任何市场上存在的资产必须被包含在 M 所代表的资产组合里。不然的话，因为理性的投资者都会选择资本市场线上的点作为自己的投资组合，不被 M 所包含的资产就会变得无人问津，其价格就会下跌，从而收益率会上升，直到进入 M 所代表的资产组合。其次，当市场均衡时，对任何一种资产都不会有过度的需求和过度的供给。因为所有的理性的投资者所选择的有风险资产的比例都应同 M 所代表的资产组合里的投资比例相同，所以，在市场处于均衡时，各种有风险资产的市场价值在全部有风险资产的市场总价值里的比重应当和在 M 所代表的资产组合里的比重相同。由此说明 M 所代表的资产组合就是有风险资产的市场组合。

这样就引出了被动的，但很有效的指数化的投资策略。这种策略分两步做：第一步是按照市场的组成比例来构筑有风险资产的组合，这样也一定实现了风险的分散化；第二步是将资金按照投资者的收益/风险偏好分投到无风险证券和所构筑的有风险市场组合中去。这种策略调节起来也非常方便。如果觉得风险偏大，则可适当增大投资于无风险证券的比例，否则反之。在各个金融市场中，已经有好些反映市场总体价格水平变化的指数，如著名的标准普尔 500(Standard & Poor's 500)指数、日经 225 指数、《金融时报》100(FTSE100)指数、恒生指数，以及中国内地的上证指数、深证指数等。表 3.4 是《金融时报》刊载的全球各国主要金融市场指数。它们的构成成份都反映了对应的市场所交易的各

种资产的构成比例。以此类指数为基础而开发的指数产品，往往可以用来作为有风险市场组合的替代品。所以这种投资策略被称为指数化的投资策略。这种被动式的指数化的投资策略在西方被养老基金、共同基金等金融机构广泛地采用，并被用作评估其他主动式的投资策略绩效的依据。

表 3.4

WORLD MARKETS AT A GLANCE

Country	Index	Jul 8	Jul 7	Jul 6	1999 High	1999 Low	✠ Yield	✠ P/E
Argentina	General	20063.53	20234.52	20455.57	23162.96 6/5	14484.90 14/1	3.7	17.6
Australia	All Ordinaries	3086.3	3067.3	3081.9	3145.20 27/4	2804.80 14/1	2.77	24.7
	All Mining	677.2	662.3	671.9	705.80 7/5	552.10 12/4		
Austria	ATX Index	1253.51	1256.20	1261.26	1326.28 4/5	1011.25 22/1	1.91	14.2
Ended lower, although banks gained ground following broker upgrades for German banks.								
Belgium	BEL20	3099.85	3124.48	3147.69	3691.92 6/1	3076.59 2/6	1.65	18.9
Moved lower for the third day running.								
Brazil	Bovespa	11651.0	11745.0	11674.0	12488.00 13/5	5057.00 14/1	6.88	na
♣Moved lower in early trading.								
Canada	TSE 100♦	434.76	435.94	440.25	441.80 5/7	376.30 3/3	1.58	24.3
	Metals Minls♦	3907.95	3814.62	3851.02	3877.98 3/5	2853.44 18/2		
	TSE300Comp♦	7159.90	7172.10	7235.04†	7254.50 5/7	6180.30 3/3		
	Portfolio§§	3882.05	3897.04	3931.75	3949.57 5/7	3281.55 3/3		
♣Lost ground in early trading as interest rate concerns countered improving resources stocks.								
Chile	IGPA Gen♥	4973.98	4967.77	4945.54†	4967.77 7/7	3297.63 14/1	2.95	17.4
China	Shanghai B	49.67	49.01	50.36	61.18 29/6	21.38 9/3	1.06	39.4
	Shenzhen B	104.98	97.19	100.72	125.42 29/6	41.56 10/3		
Colombia	IBB	(u)	976.69	979.03	1237.28 14/5	850.79 4/2	2.35	7.5
Czech Republic	PX 50	481.3	481.1	(c)	521.50 25/5	333.40 1/3	na	na
Finished with modest losses after the weak opening on Wall Street.								
Denmark	CopenhagenSE	666.33	664.58	668.88	668.88 6/7	565.51 16/3	1.69	18
Moved higher in thin summer volumes on modest gains for bluechips.								
Egypt	Cairo SE Gen	484.9	483.28	482.22	484.90 8/7	396.42 11/1	na	na
Moved higher in healthy volumes.								
Finland	Hex General	8115.38	8178.14	8199.32	8199.32 6/7	5679.65 10/2	1.08	31.4
Nokia fell 1.1 per cent to push the broad market lower.								
France	SBF 250	2966.75	2977.53	2992.04	2999.61 5/7	2507.84 13/1	2.21	20.4
	CAC 40	4631.13	4662.20	4692.51	4697.84 5/7	3958.72 13/1		
Ended lower with bid candidate Elf Aquitaine slipping 2.4 per cent on profit-taking.								
Germany	FAZ Aktien	1777.84	1769.10	1769.91	1777.84 8/7	1489.80 4/3	1.28	20.6
	XETRA Dax	5607.10	5588.50	5612.90	5625.62 5/7	4668.52 3/3		
Reversed early losses to end modestly higher. Banks a firm feature after upgrades.								
Greece	Athens Gen	4245.34	4285.84	4314.70	4350.13 5/7	2798.21 13/1	1.29	30.6
	FTSE/ASE 20	2487.01	2524.44	2560.01	2588.66 5/7	1758.87 13/1		
Dragged lower by profit-taking in banks.								
Hong Kong	Hang Seng	14226.30	14257.44	14372.61	14506.74 5/7	9076.33 10/2	2.3	23.9
	HSCC Red Chip	1290.38	1310.35	1348.89	1357.26 5/7	659.52 8/2		
Hungary	Bux	7277.23	7109.59	7107.56	7277.23 8/7	5253.03 4/3	na	na
Ended 2.4 per cent up following the release of better than expected trade figures.								

因此我们可以清楚地看到，这种最优投资策略的制定，确实是与个别投资者的效用函数无关的。这种投资策略的产生，是市场整合的结果。虽然它经常有悖于人们的常识和感觉，却是金融学的本质特性。学习和研究金融工程的读者必须牢记这一点。

由市场组合（可以看作一个基金）和无风险证券（可以看作另一个基金）构成了新的两基金分离定理：所有的合乎理性的投资组合都是市场组合和无风险证券的一个线性组合，而所有这样的线性组合构成了资本市场线，参见图 3.5。这一新的两基金分离定理成为资本资产定价模型的基础。

7. 资本资产定价模型（CAPM）

前述资本市场线理论就是资本资产定价模型（CAPM-capital asset pricing model）的核心内容。资本资产定价模型的提出，标志着分析金融学走向成熟。这一模型在 1965 年前后由威廉・夏普（William Sharpe）、约翰・林特纳（John Lintner）和简・莫辛（Jan Mossin）分别独立地提出。自马柯维茨的开创性工作到提出资本资产定价模型，其间相隔长达 12 年，足见现代金融学发展道路的艰难与曲折。

资本资产定价模型有许多前提性的假设条件，主要包括对市场的完善性和环境的无摩擦性（本章前面的分析实际上已经蕴涵着这些假设）。现在我们对主要的假设条件作一简单的介绍：

1）存在许多投资者，与整个市场相比，每位投资者的财富份额都很小，所以投资者都是价格的接受者，不具备“做市”的力量，市场处于完善的竞争状态。

2）所有的投资者都只计划持有投资资产一个相同的周期。所有的投资者都是“近视”的，只关心投资计划期内的情况，不考虑计划期以后的事情。

3）投资者只能交易公开交易的金融工具如股票、债券等，即不把人力资本（教育）、私人企业（指负债和权益不进行公开交易的企业）、政府融资项目等考虑在内。并假设投资者可以不受限制地以固定的无风险利率借贷（容许卖空无风险证券）。

4）无税和无交易成本，即市场环境是无摩擦的。

5）所有的投资者的行为都是理性的，都遵循马柯维茨的投资组合选择模型优化自己的投资行为。

6）所有的投资者都以相同的观点和分析方法来对待各种投资工具，他们对所交易的金融工具未来的收益现金流的概率分布、预期值和方差等都有相同的估计，这就是一致预期假设。

资本资产定价模型只有在这些条件成立的前提下才成立。

资本资产定价模型进一步要讨论的是单项有风险资产在资本市场上的定价问题。描述任何有风险资产组合的风险的标准差 σ_p 可表示为

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中 w_i：$i=1,\cdots,n$ 是各项资产在组合中的权重。如果市场上一共就有 n 项有风险资产，而组合 p 就是有风险资产的市场组合 M 的话，有

$$\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{n} w_{jM} \sigma_{ij}$$

从而

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{n} w_{iM} \sigma_{iM} \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中,w_{iM}是第 i 种资产在有风险资产的市场组合中的比重。

由此我们发现,有风险资产的市场组合的总风险只与各项资产与市场组合的风险相关性(各项资产的收益率与市场组合的收益率之间的协方差)有关,而与各项资产本身的风险(各项资产的收益率的方差)无关。这样,在投资者的心目中,如果 σ_{iM}越大,则第 i 项资产对市场组合的风险的影响就越大,在市场均衡时,该项资产应该得到的风险补偿也就应该越大。于是得出以下的证券市场线(SML—security market line):

$$E(r_i) = r_f + \frac{[E(r_M) - r_f]}{\sigma_M^2} \sigma_{iM}$$

和

$$E(r_i) = r_f + \beta_i (E(r_M) - r_f)$$

其中 $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$被称为第 i 项资产的 β 系数。这一证券市场线模型的推导,我们也在附录中介绍。图 3.6 画出了 β 系数和预期收益率之间的关系,这就是证券市场线。

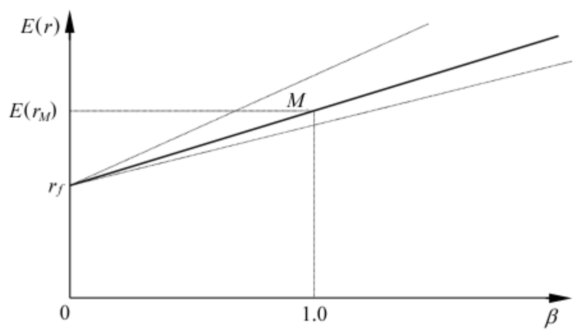

图 3.6

β 系数的一个重要性质是具有线性可加性。若在一包含 n 项资产的投资组合里,各项资产的比重是 w_i,则组合的 β 系数为

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

组合的收益率就是

$$E(r_p) = r_f + \beta_p (E(r_M) - r_f)$$

证券市场线说明,一项有价证券的风险补偿应当是它的 β 系数乘以有风险资产的市场组合的风险补偿。如果一项资产的 β 系数大于 1,该项资产的风险补偿就大于市场组合的风险补偿,意味着这项资产在市场上的价格波动会大于市场的平均价格波动。如果一项资产的 β 系数小于 1,情况则反之,它的价格波动也会小于市场的平均价格波动。从道理上讲,也可以有 β 系数为负的情况。这意味着该项证券的收益与整个市场存在负相关的

关系。从我们已经介绍过的利率的期限结构理论知,无风险利率会随着时间而变化,因此 r_f 点会在轴上上下移动。当 r_f 点的位置变动时,如果证券市场线的斜率不变,则证券市场线发生上下平移。此时说明整个市场对待风险的态度没有发生变化。如果证券市场线的斜率变大,即绕着 r_f 点逆时针方向旋转,说明整个市场对风险的厌恶加大,对同样的风险要求有更大的风险补偿,市场趋于保守。如果证券市场线的斜率变小,即绕着 r_f 点顺时针方向旋转,情况则反之,整个市场对风险的厌恶减小,对同样的风险要求比较小的风险补偿,市场更富于进取精神。

附带提一句,证券市场线的斜率为零的情况在实际中是不会发生的,但这种情况在理论上很有用处。这时说明投资者对风险采取完全无所谓的态度,不对有风险资产要求任何风险补偿。这就是风险中性的情况。风险中性假设与无套利均衡之间存在非常深刻的联系,我们将逐步展开这方面的讨论。

资本资产定价模型有很多用途,最主要有两个方面。第一,在投资基金的实际运作时,经理人员往往只经营他们所熟悉的若干种有价证券,而不是去经营一个市场组合。所以,证券市场线可以用来评估他们的经营业绩。第二,证券市场线常常用来作为确定资本成本的依据,尤其是对一些非竞争性项目(如军事项目或其他秘密项目)来说,是非常有用的。

8. 小结

两基金分离定理和资本资产定价模型是现代投资理论中非常重要的内容。这一理论结果告诉我们,最佳投资组合的设计与个别投资者的收益/风险偏好无关。这一点对于金融工程的产品设计是有指导意义的。另一方面,这一理论又指出指数化的投资策略尽管是一种被动的,但实际上是一种有效的策略,还可以作为其他积极的投资策略业绩衡量的基准。因此,这一理论成果有非常实际的应用价值。它还揭示了指数产品作为基本投资工具的重要意义。

指数化投资策略能够提供的是市场的平均回报。而任何积极的投资策略企图获得高于市场平均回报的收益,因此,如果一种积极投资策略是成功的,就意味着"击败"了市场。要击败市场只在以下的情况是可能的:市场本身存在缺陷。这涉及现代金融理论中一个非常深刻的概念,即市场的效率。如果市场始终是充分有效率的,击败市场就是不可能的。反过来说,积极投资策略的成功都是建立在市场失效的基础上的。我们在下一章(第四章)还会提到这一点,但要到后面第九章才会更加深入地讨论这一概念。

资本资产定价模型也是现代金融学研究中具有里程碑意义的成果,具有极大的理论和实践的重要性。正因为如此,后人对资本资产定价模型开展了许多实证方面的研究工作,希望用经验事实来证明证券市场线的正确性。比较近期的实证检验及其分析结论产生了一些争议。如法马(Eugene F. Fama)等在 90 年代初发表的重要论文,检验的结果认为股票的平均收益率与 β 值无关,因而资本资产定价模型的意义就值得怀疑。但随即又有人提出了不同的意见,通过别的试验给出了不同的解释。

资本资产定价模型遭致质疑的还有一个重要原因,在于这一定价模型是一阶段的。从这个角度出发,以默顿(Robert Merton)为首,后来在研究连续时间金融学(指交易可以不断地发生)时发展出多阶段的资本资产定价模型(ICAPM——intertemporal capital asset pricing model)。因为要考虑多阶段的效用最大化问题，除了资产的投资收益，还要考虑其他的收入（如工薪收入）、消费支出等。通过建立多阶段的动态规划优化模型寻求均衡解，可以获得类似证券市场线的结果。这是资本资产定价模型的重要推广。因为连续时间模型的数学表达式比较复杂，我们不在这里展开讨论，有兴趣的读者可以参阅有关资料。

另外，如果从证券的换手率的角度研究，如果两基金分离定理成立，会导出所有的证券在市场上的换手率都相同这样明显与实际不符的结论。换手率被认为是证券流动性的一种度量（换手率越高，说明变现成本越低），从而成为新近研究资本市场微观结构的一个热点课题。海外学者从换手率的角度对美国资本市场的研究，以及我们自己最近对新兴的中国资本市场的研究，实证结果都表明在实际的市场上并不是两基金分离，而是近似地成立三基金分离。也就是说，从统计意义上看，市场上所有的交易都可以看作是在两个有风险证券的投资组合（其中有一个近似地是市场组合），再加上无风险证券之间的交易。

尽管如此，资本资产定价模型对于现代金融理论和商务实践的发展来说其意义是无法否认的。迄今为止，它仍然是投资理论的重要组成部分，并对金融资产的定价乃至实证会计的研究起着重要的支持作用。

练习题

设证券市场包括无风险证券和 N 种股票，市场无摩擦，某年 1～5 月份股票 A 和股票市场组合 M 的收益率（单位%/年）如下：

月份	1	2	3	4	5
r_{Ai}	31.5	27.5	25.5	19.5	31.5
r_M	22	20	18	16	24

设股票收益率满足 $r_{Ai}=E(r_{Ai})+\varepsilon_{Ai}$，求：

1）市场均衡时的无风险利率 r_f；

2）计算 r_A 的系统风险 σ_S^2 和个别风险 σ_I^2。

第三章数学附录

1. 两基金分离定理的证明

我们的证明需要用到矩阵代数的知识。先来定义一些符号：$U=\{\sigma_{ij}\}$：$i,j=1,\cdots,n$ 是协方差阵（当 $i=j$ 时，σ_{ii}就表示方差）。因为 $\sigma^2>0$，所以矩阵 U 严格正定。$\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}^T$ 表示各项有风险资产在组合中的权重向量。$\vec{r}=\{E(r_1),\cdots,E(r_n)\}^T$ 代表组合中各项资产的预期收益率的向量。$\vec{1}=\{1,\cdots,1\}^T$ 是单位向量，$\vec{0}=\{0,\cdots,0\}^T$ 是零向量。对于任一给定的 $E(r)$，求解以下二次规划

$$\min_{\vec{w}} \frac{1}{2}\vec{w}^T U\vec{w}$$
$$\text{s.t.}\ \vec{w}^T\vec{r}=E(r)$$
$$\vec{w}^T\vec{1}=1$$

其中目标函数前面加上$\frac{1}{2}$纯粹是为了运算的方便。

定义拉格朗日函数如下：

$$\min_{\{\vec{w},\lambda,\mu\}} L=\frac{1}{2}\vec{w}^T U\vec{w}+\lambda(E(r)-\vec{w}^T\vec{r})+\mu(\vec{1}-\vec{w}^T\vec{1})$$

求解这一优化问题，假定 $\vec{w}$ 是对应于 $E(r)$的优化解，即 $\vec{w}$ 构成的组合是最小方差曲线上的一个点。则必定满足下面的方程组

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{w}}=U\vec{w}-\lambda\vec{r}-\mu\vec{1}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=E(r)-\vec{w}^T\vec{r}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\mu}=\vec{1}-\vec{w}^T\vec{1}=0$$

因为是二次规划，所以一阶优化条件既是必要条件，又是充分条件。

从第一个方程解出

$$\vec{w}=\lambda(U^{-1}\vec{r})+\mu(U^{-1}\vec{1})$$

两边分别乘以 $\vec{r}^T$ 和 $\vec{1}^T$，得到以下方程组

$$E(r)=\lambda(\vec{r}^T U^{-1}\vec{r})+\mu(\vec{r}^T U^{-1}\vec{1})$$
$$\vec{1}=\lambda(\vec{1}^T U^{-1}\vec{r})+\mu(\vec{1}^T U^{-1}\vec{1})$$

由这个方程组可以解出