

国家自然科学基金重大项目(金融工程)丛书

# 金融工程原理

## 无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明 著



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

# 第五章 期权定价与动态无套利均衡分析

至今为止,我们讨论的无套利分析技术都是一阶段的。本章通过介绍期权定价理论的基本原理,来讨论多阶段的动态无套利分析方法,即动态复制技术。

布莱克(Fischer Black)和舒尔斯(Myron Scholes)1973年发表了第一个期权定价公式,被认为是现代金融学的一项具有里程碑意义的突破性成果。这项理论成果及其以后的多种变形,极大地推动了衍生工具市场的发展。布莱克-舒尔斯期权定价模型(简称B-S模型)发表的时间和芝加哥期权交易所正式挂牌交易标准化期权合约几乎是同时(文章发表在交易开始后的一个月,但理论成果的获得时间则要早得多)。不久,德克萨斯仪器公司就推出了装有根据这一模型计算期权价值程序的计算器。现在,几乎所有从事期权交易的经纪人都持有各家公司出品的此类计算机,利用按照这一模型开发的程序对交易估价。这项工作对金融创新和各种新型金融产品的面世起到了重大的推动作用。为此,对期权定价理论的完善和推广做出巨大贡献的默顿和舒尔斯一起荣膺1997年度的诺贝尔经济学奖(布莱克不幸在1995年去世,否则一定也应当分享诺贝尔经济学奖的殊荣)。

期权定价理论的核心原理是所谓的动态无套利均衡分析,即动态复制技术。意思是用于复制期权这样一种衍生工具的证券组合的头寸需要不断地进行调整,才能维持住无套利均衡关系。布莱克-舒尔斯期权定价模型本身是用随机微分方程来刻画的,但为了便于理解动态复制技术,我们将先介绍二叉树定价模型。这一模型最早是由夏普、柯克斯(John C. Cox)、罗斯和鲁宾斯坦(Mark Rubinstein)等人提出的。

## 1. 期权简介

期权是指未来的选择权,它赋予期权的持有者(购买者,或多头)一种权利而不必承担义务,可以按预先敲定的价格购买或者出售一定数量和一定品质的资产。因为期权代表了一种权利而不必承担义务,所以在市场上成为具有一定价值的金融工具(有价证券),但是由期权所要购买或者出售的资产(称为标的资产或标的物)衍生出来的,所以期权是一类衍生工具(衍生证券)。

有关期权有以下专用术语:

- 按预定价格赋予购买权利的期权称为买权(call),赋予出售权利的则称为卖权(put)。
- 预先敲定的价格称为预定价或者执行价(因为执行期权时就按这一预先敲定的价格买或卖)。
- 期权到一定的日期后会失效,这一日期被称为失效日或到期日。美式期权是在到期日和到期日之前都可以执行的期权,欧式期权则是只有在到期日方可执行的期权。我们将用小写字母  $c$  和  $p$  表示欧式买权和卖权,用大写字母  $C$  和  $P$  表示美式买权和卖权。

期权和期货一样,标的物如果是普通商品(如农副产品、工业原材料、能源产品,等等),称为商品期权;如果标的物是金融工具或者虚拟的金融工具(如指数),则称为金融期权(如股票期权、指数期权、利率期权、外汇期权,等等)。金融工程的创新活动,已经创造出许多期权的变形品种,如顶(cap)、底(floor)、套(collar)等,现在已经出现了第二代、第三

表 5.1

## LISTED OPTIONS QUOTATIONS

Option/Strike	Exp.	-Call-		-Put-		Option/Strike	Exp.	-Call-		-Put-	
		Vol.	Last	Vol.	Last			Vol.	Last	Vol.	Last
IXC Com	45 Aug	1105	27/16	...	...	Merck	70 Jul	323	21/16	213	17/16
Imcline	20 Aug	320	4/16	...	...	70/1/16	70 Aug	1463	31/2	56	31/4
Imunex	120 Jul	260	83/16	35	4 1/4	70/1/16	75 Jan	455	53/16	3	83/16
InfinityB	10 Jul	991	17 1/2	...	...	Mercint	22 1/2 Jul	1250	12 1/2	...	...
28 1/8	30 Jul	288	5/16	...	...	35 1/4	30 Jul	500	6	34	3/4
Infoseek	35 Jul	23	10	260	15/16	MerrLyn	65 Jul	10	9 1/8	296	1/2
45 3/16	45 Jul	257	4/16	103	33/4	74 13/16	70 Jul	234	6 1/8	179	17 1/16
45 3/16	50 Jul	478	2 1/4	...	...	74 13/16	75 Jul	684	33/16	119	3
Inktomi	110 Jul	192	12	48	7 1/8	74 13/16	80 Jul	939	1 1/2	14	6 1/4
116 1/2	125 Aug	270	12 1/4	2	25	74 13/16	80 Oct	1032	6 1/2	...	...
116 1/2	130 Jul	321	3	...	...	74 13/16	85 Jul	196	3/4	...	...
Inprise	5 Jan	290	2 1/8	...	...	74 13/16	90 Jul	298	3/8	200	15
IntgDv	10 Jul	116	1 1/16	195	7/16	74 13/16	90 Jan	248	6 1/8	200	19 1/2
10 7/8	12 1/2 Nov	422	1 1/2	...	...	Metamor	22 1/2 Aug	252	2 1/16	...	...
Intel	45 Jul	1	1 11/16	212	3/16	Metrcm	15 Oct	300	4	...	...
57	50 Jul	119	7 1/4	410	7/16	MtrndFbr	47 1/2 Nov	505	2 7/8	...	...
57	52 1/2 Jul	88	5 1/8	566	3/4	Metzler	25 Nov	560	5	...	...
57	55 Jul	447	3 1/4	1344	17/16	MicrTc	35 Jul	320	4	1244	17/16
57	55 Aug	94	4 3/4	230	2 1/2	38	37 1/2 Jul	114	2 1/4	252	11 3/16
57	57 1/2 Jul	674	2	130	2 1/16	38	40 Jul	940	1 1/2	806	3
57	60 Jul	3515	1	187	4	38	40 Oct	700	5	67	6 1/4
57	60 Aug	1071	27/16	200	5 1/2	38	42 1/2 Jul	306	7/16	117	4 1/8
57	65 Aug	451	1	...	...	38	45 Jul	866	3/8	370	7 1/8
57	70 Jul	354	1/16	181	14 1/4	38	50 Jul	655	1/16	26	10 1/2
Intelligrp	10 Jan	...	...	200	3 3/4	38	50 Oct	461	2 7/16	...	...
I B M	90 Jul	325	33 1/4	44	1/8	38	60 Jan	213	2 1/16	11	23
122 1/16	110 Jul	731	13 1/2	1628	5/8	Micsft	65 Jan	30	25 1/4	202	1 1/8
122 1/16	115 Jul	355	8 1/8	354	1 1/16	86 3/4	75 Jul	229	11 1/8	143	1/4
122 1/16	120 Jul	743	5 3/4	798	2 3/4	86 3/4	80 Jul	1366	7 1/8	1075	3 1/4
122 1/16	120 Aug	258	9 1/8	75	6	86 3/4	80 Aug	324	9 1/8	84	2 1/2
122 1/16	125 Jul	1750	3 1/8	218	5 1/8	86 3/4	82 1/2 Jul	1490	5 1/4	117	1 1/4
122 1/16	125 Aug	424	6 1/4	21	8 1/4	86 3/4	85 Jul	2025	3 3/4	389	2
122 1/16	130 Jul	1246	1 1/2	48	8 1/4	86 3/4	85 Aug	210	6 1/4	53	4 1/4
122 1/16	130 Aug	858	4 1/2	1	11 1/4	86 3/4	87 1/2 Jul	505	2 1/2	92	4 1/8
122 1/16	135 Jul	528	7/16	...	...	86 3/4	90 Jul	1933	1 1/8	193	5
In Pap	55 Jul	525	3/8	33	4	86 3/4	90 Aug	433	3 3/8	17	6 1/4
InvTech	40 Oct	200	1 1/8	...	...	86 3/4	90 Oct	574	6 1/2	5	8 3/4
Iomega	5 Jul	427	1/8	...	...	86 3/4	90 Jan	264	9 1/2	...	...
4 3/8	5 Aug	282	7/16	...	...	86 3/4	92 1/2 Jul	357	1 1/16	1	7 1/2
4 3/8	5 Feb	20	1 3/16	200	1 1/8	86 3/4	95 Jul	1059	1/2	...	...
4 3/8	7 1/2 Aug	40	1/16	450	3	86 3/4	100 Jul	250	1/4	...	...
IridmWr	5 Oct	120	4 3/4	270	1 1/8	86 3/4	100 Oct	403	2 1/8	18	16 1/4
97 1/16	7 1/2 Jul	25	2 1/16	218	15 1/16	86 3/4	105 Jan	302	4 1/2	...	...
97 1/16	7 1/2 Aug	125	2 1/8	400	2	86 3/4	120 Jan	864	2 1/4	...	...
97 1/16	10 Jul	696	1 1/4	284	2 3/8	Millip	35 Jul	500	4	...	...
97 1/16	12 1/2 Jul	102	5/8	238	4	MindSpr	37 1/2 Jul	251	5 1/8	56	2 1/4
97 1/16	12 1/2 Oct	483	17/16	5	6 1/8	40 3/8	40 Jul	313	3 3/8	405	3 3/8
97 1/16	15 Aug	1355	1 1/16	5	7 1/2	40 3/8	40 Oct	313	8 1/4	...	...
97 1/16	15 Oct	465	1 1/8	...	...	40 3/8	40 Jan	296	11 3/4	...	...
97 1/16	20 Oct	27	1/2	250	12 1/2	MirRst	20 Aug	309	3 1/8	...	...
97 1/16	30 Jul	...	...	200	20	Monsanto	40 Jul	199	1 1/4	142	2
Jackpot	7 1/2 Dec	...	...	200	3 1/16	39 1/4	40 Aug	5151	2 1/2	27	3
JohnJn	90 Jul	295	2 3/4	15	1 1/2	MSDWDi	85 Jul	127	11	403	15 1/16
K Swiss	30 Jul	...	...	800	1/4	94 1/16	90 Jul	294	6 1/8	62	2
37 3/8	35 Jul	...	...	250	1 1/4	94 1/16	95 Jul	2907	4 1/8	20	4 3/8
37 3/8	40 Jul	516	1 19/16	125	4 1/4	94 1/16	100 Jul	2652	2 1/8	53	7 1/2
37 3/8	40 Aug	500	3 3/8	...	...	94 1/16	100 Aug	345	4 1/2	...	...
KL A Tnc	50 Jul	20	10 1/2	679	3/8	MorganJP	140 Aug	349	5 1/2	...	...
K mart	15 Jul	610	1 1/16	10	1/4	Motorola	75 Jul	116	16	500	1/8

代期权品种。期权是金融工程师所使用的花样最多的衍生金融工具。有的期权合约是标准化了的,在交易所集中交易;还有许多期权品种是所谓的柜台交易(OTC-over the counter)品种,是由金融工程师们根据客户的要求采取量体定做(tailored)的方式设计出来的。表 5.1 是《华尔街日报》(Wall Street Journal)1999 年 6 月 29 日登载的 Intel,IBM 等公司的股票期权在芝加哥期权交易所(CBOE—Chicago Board Options Exchange)的报价(全部是收盘价)。第 1 列是该股票在纽约证券交易所(NYSE—New York Security Exchange)当天的价格(也是收盘价)。第 2 列是期权的预定价(即执行价)。第 3 列是期权的失效日(即到期日),CBOE 交易的是美式期权,失效日用到期月份表示,失效日一般指到期月份的第 3 个星期五后的一天(星期六),即美国东部时间晚 11 时 59 分,但执行期权的最后时限是在星期五下午 5 时 30 分之前向经纪人发出执行指令。期权本身的市场价格称为期权费(option premium)。后面两组各两列分别显示的是买权和卖权当天的成交量和期权费的收盘价。通常,每一份期权合约赋予购买或出售 1 整手股票(100 股)的权利,所报的期权价格则是买卖 1 股股票的期权费。如果预定价在 30 美元到 100 美元之间,每个价位之间相差 5 美元,低于 30 美元的每个价位间相差 2.5 美元,高于 100 美元时会拉大价位差(例如 10 美元)。

我们可以发现,对于买权来说,预定价越高,期权费就越低,卖权则反之。道理是显而易见的。

到马上要失效时,对于买权来说,如果当时标的物股票的市价低于预定价,则买权没有任何价值,将被放弃而不执行。对于卖权来说,如果当时标的物股票的市价高于预定价,则卖权没有任何价值,将被放弃而不执行。图 5.1 是买权和卖权在到期时的损益状态图(payload profile)。

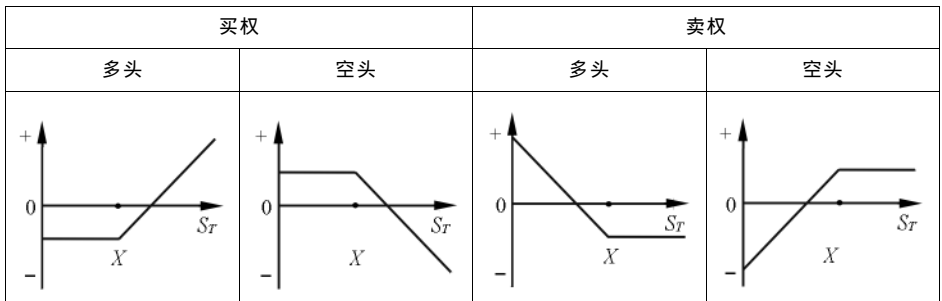


图 5.1

对于买权来说,如果现在标的物股票的价格高于执行价(预定价),则此时买权处于实值状态(in-the-money);如果现在标的物股票的价格低于执行价(预定价),则此时买权处于虚值状态(out-of-the-money)。对于卖权来说,情况正好反过来。期权的执行价(预定价)正好等于标的物股票的价格时,称为处于两平状态(at-the-money)。假想期权现在马上要失效,此时期权的价值称为期权的内涵价值(intrinsic value)。处于虚值状态的期权的内涵价值总为零。在处于实值状态的期权未到期时,卖权的内涵价值是预定价减去当时标的物市价的差,买权的内涵价值则是标的物市价减去预定价的差。请注意,在期权未失

效前,期权费(期权的市场价格)往往大于期权的内涵价值。期权费减去期权的内涵价值的差是期权的时间价值。在到期日,所有期权的时间价值都变为零。处于虚值状态的期权只有时间价值而没有内涵价值。因为期权在失效前,即使处于虚值状态,标的物的价格在剩余的时间里还有可能变到实值状态,所以有时间价值存在。这就是为什么处于虚值状态的期权在市场上也能以正的价格(期权费)出售的缘故。

下面我们都以股票期权为例作讨论。

## 2. 期权定价的基本无套利关系

所有金融工具的定价都是根据无套利均衡关系给出的,期权当然也如此。因此期权的价格(期权费)必须遵守以下基本的无套利关系。

- 1) 买权的价值从不高于标的物股票本身的价值,卖权的价值从不高于预定价。
- 2) 欧式卖权的价值从不高于预定价用无风险利率折现的现值(为什么? 请用无套利均衡分析方法作分析)。
- 3) 期权的价值决不为负。
- 4) 美式期权的价值决不低于欧式期权。
- 5) 距失效日时间长的美式期权的价值决不低于距失效日时间短的同一个美式期权的价值。
- 6) 美式期权的价值决不低于现在马上就执行该期权所实现的期权价值,即有

$$C(t) \geq \max\{S(t) - X, 0\}$$

$$P(t) \geq \max\{X - S(t), 0\}$$

其中  $t$  是目前的时间,  $S(t)$  是目前标的物股票的价格,  $X$  是预定价,  $C(t)$  和  $P(t)$  分别是目前美式买权和卖权的市场均衡价。

我们用一简单的例子来说明这一无套利关系。假如现在股票的价格是 100 元,预定价是 90 元,6 个月后到期的美式股票买权,如果市价是 9 元的话,就出现套利机会,因为不满足上述关系式。此时可以立即执行期权,以 90 元的预定价买入股票后立即在股市上以市价 100 元出售,可以赚取 10 元差价,马上拿出 9 元来再买入同样的买权,就可以无风险地套取 1 元的净利润。显然,欧式期权不具有这一性质。欧式期权只有到期才能执行,令  $T$  是到期日的时间,欧式期权遵循的规律是

$$c(T) = \max\{S(T) - X, 0\}$$

$$p(T) = \max\{X - S(T), 0\}$$

欧式期权的价格用小写字母表示。

现在我们来考察欧式期权和美式期权定价之间的关系。

上面这两个式子是到到期日时欧式期权与到期时标的物股票及预定价之间的关系,我们要考察未到期时的情况。我们先要假设标的物股票在期权的有效期内是不分红的。先来看欧式买权。

下面我们以  $v_{(T-t)}$  记以无风险利率  $r_f$  为折现率,从时刻  $T$  折到时刻  $t$  的折现因子(参见第二章)。显然,只要  $r_f > 0$ ,就有  $v_{(T-t)} < 1$ 。

我们有

$$c(t) \geq \max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\}$$

因为期权的价值不会为负,所以只需证明  $c(t) \geq S(t) - Xv_{(T-t)}$  即可。我们用反证法,假定  $c(t) < S(t) - Xv_{(T-t)}$ ,我们在时间  $t$  构筑如下的对冲头寸:卖空 1 股股票,购买 1 份欧式买权,同时购买价值为  $Xv_{(T-t)}$  的无风险证券。即时现金流和到期时的现金流见表 5.2。

表 5.2

交易	即时现金流(时刻 $t$ )	到期时现金流(时刻 $T$ )
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(T)$
购买 1 份欧式买权	$-c(t)$	$\max\{S(T) - X, 0\}$
购买无风险证券	$-Xv_{(T-t)}$	$X$
净现金流	$S(t) - Xv_{(T-t)} - c(t)$	$\max\{S(T) - X, 0\} - [S(T) - X]$

因为到期时的净现金流  $\max\{S(T) - X, 0\} - [S(T) - X] \geq 0$ ,按假定即时净现金流  $S(t) - Xv_{(T-t)} - c(t) > 0$ ,显然出现无风险套利机会。由此反证,上述不等式关系成立。

再由前面的无套利基本关系 1) 知,必定有

$$\max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\} \leq c(t) \leq S(t)$$

这里有一个有趣的数学现象,如果  $T \rightarrow \infty$ ,则  $v_{(T-t)} \rightarrow 0$ ,就有  $c(t) = S(t)$ ,即距到期日很远的欧式买权的价值几乎与(不分红的)标的物股票的价值一样。但是实际在市场交易的期权的到期期限都不是很长的(一般不超过 1 年)。

现在来看美式买权。美式买权可以在到期前提前执行,当然并不妨碍它到期再执行。因此,美式买权的价值不应小于欧式买权,即有

$$C(t) \geq \max\{S(t) - Xv_{(T-t)}, 0\}$$

但是,如果我们提前执行美式买权,在时刻  $t$ ,执行美式买权实现的价值是  $\max\{S(t) - X, 0\}$ ,显然这是不划算的,因为实现的价值不到期权应有的价值。于是得出结论

不分红股票的美式买权不可能提前执行。

(如果有人要提前执行美式买权,你就可以构筑无风险套利的组合头寸,请读者自己试着做一下。)

既然美式买权不可能提前执行,那就和欧式买权没有区别,因此有

$$C(t) = c(t)$$

卖权的情况如何呢? 同样的论证方法可以证明,对于欧式卖权,一定有

$$p(t) \geq \max\{Xv_{(T-t)} - S(t), 0\}$$

但对美式卖权来说,情况很不一样。首先,肯定应该有  $P(t) \geq p(t)$ ,所以也有

$$P(t) \geq \max\{Xv_{(T-t)} - S(t), 0\}$$

如果提前执行美式卖权的话,在时刻  $t$ ,执行美式卖权实现的价值是  $\max\{X - S(t), 0\}$ ,如果卖权处于实值状态,由前面的无套利基本关系 1) 知,又一定有  $p(t) \leq X$  和  $P(t) \leq X$ ,此时如果股票价格  $S(t)$  很低的话,就有可能出现  $p(t) < X - S(t)$  和  $P(t) < X - S(t)$  的情况。但美式卖权可以立即提前执行,所以理性的持有者不会让  $P(t) < X - S(t)$  的情况

出现。所以美式卖权的价值不会低于其内涵价值。欧式卖权则不然,这说明欧式卖权在这种情况下实际上具有负的时间价值。

归结起来,就有这样的关系

$$C(t) = c(t) \quad \text{和} \quad P(t) \geq p(t)$$

### 3. 买权和卖权的平价关系

不分红股票的欧式期权有如下的买权和卖权平价关系

$$S(t) = c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$$

这里买权和卖权有相同的预定价  $X$ 。这个平价关系从直观上可以这样理解:现在(时刻  $t$ ) 持有有一个买权的多头、一个卖权的空头,再加上价值等于预定价的现值的无风险债券的多头,这样的证券组合在到期时(时刻  $T$ )可以确保得到 1 份股票,所以是 1 份股票的复制品,因此与现在持有 1 份股票的多头的价值相等。

现在我们采用无套利均衡分析方法来证明这一平价关系。用反证法,假如复制证券与被复制的股票有不同的市场价格,比如说  $S(t) < c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$ ,此时对股票做多头,同时卖空复制证券,得到的现金流如表 5.3。

表 5.3

交易	即时现金流 (时刻 $t$ )		到期时现金流(时刻 $T$ )	
			$S(t) < X$	$S(t) \geq X$
购买 1 股股票	$-S(t)$	$S(T)$	$S(T)$	
卖空 1 份欧式买权	$c(t)$	0	$-[S(T) - X]$	
购买 1 份欧式卖权	$-p(t)$	$X - S(T)$	0	
卖空无风险证券	$Xv_{(T-t)}$	$-X$	$-X$	
净现金流	$-S(t) + c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$	0	0	

如果  $S(t) < c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$ ,就出现无风险套利机会,定价是失衡的。如果  $S(t) > c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)}$ ,则反过来做复制证券的多头同时卖空股票,一样出现无风险套利机会。由此证明了欧式买权和卖权的平价关系。

我们在第二章讨论远期利率时曾经解释过,到时刻  $T$  进行交割的股票在时刻  $t$  时的远期价格如果记为  $F$ ,则与时刻  $t$  的股票价格  $S(t)$  及无风险利率之间有套利均衡关系  $S(t) = Fv_{(T-t)}$ (这里的写法比第二章里的更一般化)。如果远期价格正好等于期权的预定价,即  $F = X$ ,由上述欧式买权和卖权的平价关系知,此时欧式买权和卖权的均衡价格应当相等,即  $c(t) = p(t)$ 。如果  $F > X$ ,则  $c(t) > p(t)$ ;如果  $F < X$ ,则反之。

再来看不分红股票的美式买权和卖权之间的关系。因为有  $C(t) = c(t)$  和  $P(t) \geq p(t)$ ,所以

$$S(t) \geq C(t) - P(t) + Xv_{(T-t)}$$

但还有进一步的关系可以推出。现在我们进行如下的组合头寸的交易(见表 5.4)。

表 5.4

交易	即时现金流 (时刻 $t$ )	执行卖权时现金流(时刻 $\bar{t}$ )	
		$S(\bar{t}) < X$	$S(\bar{t}) \geq X$
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(\bar{t})$	$-S(\bar{t})$
购买 1 份美式买权	$-C(t)$	$C(\bar{t})$	$C(\bar{t})$
卖空 1 份美式卖权	$P(t)$	$-[X - S(\bar{t})]$	0
购买无风险证券	$-X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$
净现金流	$S(t) - C(t) + P(t) - X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - X + C(\bar{t})$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} + C(\bar{t}) - S(\bar{t})$

因为美式卖权是有可能提前执行的,所以  $t \leq \bar{t} \leq T$ 。现在我们看卖权执行时的情况。当  $S(\bar{t}) < X$  时,显然有  $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - X + C(\bar{t}) \geq 0$ 。 $S(\bar{t}) \geq X$  时的情况略微复杂一点。因为买权肯定有  $C(\bar{t}) \geq \max\{S(\bar{t}) - Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}, 0\} \geq S(\bar{t}) - Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$  的关系,所以  $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} + C(\bar{t}) - S(\bar{t}) \geq Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} \geq 0$ 。因为不管是否提前执行美式卖权(美式买权不可能提前执行),也不管会发生什么情况,未来的净现金流都不为负,所以,现在的净现金流不能为正,否则就出现无风险套利机会。于是得到  $S(t) - X \leq C(t) - P(t)$ 。最后,我们有

$$S(t) - X \leq C(t) - P(t) \leq S(t) - Xv_{(T-t)}$$

这就是对不分红股票的美式买权和卖权的无套利均衡限定关系。

现在我们来考虑标的物股票分红对期权价格的影响,我们假定股票在到期日前分发已知数额的红利。首先有

$$\begin{aligned} C(t) &\geq c(t) \geq S(t) - PV(D) - Xv_{(T-t)} \\ P(t) &\geq p(t) \geq Xv_{(T-t)} - S(t) + PV(D) \end{aligned}$$

其中  $PV(D)$  是期间发放的红利折现到  $t$  时刻的现值。

上面两个不等式的最右端实际上分别是买卖股票的远期合约的多头和空头的现值,远期合约的交割价格(预定价)就是  $X$ ,到期日是  $T$ 。对于远期合约的多头来说,到期时的价值是  $S(T) - X$ ,期间要分发红利  $D$ ,因为到期交割时红利已经被拿走,而在  $t$  时刻则红利尚未发放,所以在折算到现值时要把红利的现值扣除。对于空头来说,到期时远期合约的价值是  $X - S(T)$ ,因为空头方会领到红利,在计算现值时应当把红利的现值加进去。期权价值不应低于远期合约的价值,美式期权的价值不应低于欧式期权的价值,所以有上述关系式。如果上述不等式限制被破坏,就会出现无风险套利机会。

于是,对在到期日前有已知红利支付的欧式期权来说,有以下买权和卖权的平价关系

$$S(t) = c(t) - p(t) + Xv_{(T-t)} + PV(D)$$

这个关系式的涵义是非常明显的。对于美式期权来说,则有

$$S(t) - PV(D) - X \leq C(t) - P(t) \leq S(t) - Xv_{(T-t)}$$

我们先来证明第二个不等式。因为如上所述,对于不发放红利的股票的美式期权来说,第二个不等号是成立的,股票在除红以后,一定会引起股价下跌(除红即因红利的发放而从股票的价值中扣除掉红利的价值),从而使买权的价值下降而使卖权的价值上升,因此不等式就更加能够成立。

下面来证明第一个不等式,办法是先用欧式买权和无风险证券的空头和美式卖权的多头的组合头寸来复制股票的相反头寸,进而观察对冲的结果,然后再利用  $C(t) \geq c(t)$  导出最终结果。我们照样采用反证法,假设有  $C(t) - P(t) < S(t) - PV(D) - X$ , 构筑如表 5.5 的标的物股票的多头头寸和与它对冲的复制头寸。

表 5.5

交易	即时现金流 (时刻 $t$ )	执行卖权时现金流(时刻 $\bar{t}$ )	
		$S(\bar{t}) < X$	$S(\bar{t}) \geq X$
卖空 1 股股票	$S(t)$	$-S(\bar{t})$	$-S(\bar{t})$
红利的影响	$-PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$	$PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$	$PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$
购买 1 份欧式买权	$-c(t)$	$c(\bar{t})$	$c(\bar{t})$
卖空 1 份美式卖权	$P(t)$	$-[X - S(\bar{t})]$	0
购买无风险证券	$-X$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1}$
净现金流	$S(t) - PV_{(\bar{t}-t)}(D)$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - X + c(\bar{t})$	$Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} + c(\bar{t}) - S(\bar{t})$
	$-X - c(t) + P(t)$	$+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$	$+PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D)$

这里,当  $\bar{T} - \bar{t} \leq 0$  时,  $PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D) = 0$ 。  $\bar{T}$  指分发红利的时刻。当  $S(\bar{t}) < X$  时,有  $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - X + c(\bar{t}) + PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D) \geq 0$ 。当  $S(\bar{t}) \geq X$  的时候,因为有不等式  $c(\bar{t}) \geq S(\bar{t}) - PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D) - Xv_{(\bar{t}-t)}$  成立,所以就一定会有以下关系成立:  $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} + c(\bar{t}) - S(\bar{t}) + PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D) \geq Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} - Xv_{(\bar{t}-t)} \geq 0$ 。因为  $C(t) \geq c(t)$ ,当然也有  $Xv_{(\bar{t}-t)}^{-1} + C(\bar{t}) - S(\bar{t}) + PV_{(\bar{T}-\bar{t})}(D) \geq 0$ 。如果  $C(t) - P(t) < S(t) - PV_{(\bar{t}-t)}(D) - X$ ,就出现无风险套利机会。

我们已经指出,不分红股票的美式买权不会提前执行,但对支付红利的股票的美式买权来说,情况可能不是如此。因为在每次除红后,股票的价格会下跌,跌幅的均衡值就等于所支付的红利的价值。股票价格下跌也就导致买权价值的下降,因此,

对于支付红利的股票而言,如果红利的数额比较大,有时在除红前的很短时间,美式买权有可能被提前执行。

如果在美式买权到期前,股票多次分红的话(比如分红  $n$  次),每次临近除红时,美式买权的价值都有  $C(t_i) \geq S(t_i) - PV_i(D) - Xv_{(T-t_i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ 。这里  $PV_i(D)$  是在  $t_i$  时刻后(包括  $t_i$ )所有红利在  $t_i$  的现值。如果此时提前执行,实现的价值就应该是  $S(t_i) - X$ 。如果  $S(t_i) - PV_i(D) - Xv_{(T-t_i)} \geq S(t_i) - X$ ,即  $PV_i(D) \leq X(1 - v_{(T-t_i)})$ ,提前执行是不明智的。而如果出现  $PV_i(D) > X(1 - v_{(T-t_i)})$  的情况,则有可能提前执行是好的策略。但如果对于  $k > i$ ,还有  $PV_k(D) > X(1 - v_{(T-t_k)})$  的情况出现,则要作进一步的分析。为了分析的简单起见,我们假定从  $t_i$  到期末  $T$  只有两次分红,分别在  $t_i$  和  $t_{i+1}$ 。如果  $[PV_i(D) - X(1 - v_{(T-t_i)})] - v_{(t_{i+1}-t_i)} [PV_{i+1}(D) - X(1 - v_{(T-t_{i+1})})] \geq 0$ ,则在  $t_i$  时刻执行为好,否则推迟到  $t_{i+1}$  时刻执行更好。这个式子可以化简为  $D_i \geq X(1 - v_{(t_{i+1}-t_i)})$ ,其中  $D_i$  是  $t_i$  时刻分发的红

利。如果预定价  $X$  和当时股票的价格很接近, 这个式子意味着红利率不小于无风险利率。即只有在时间区间  $[t_i, t_{i+1}]$  红利率不小于无风险利率时, 在时刻  $t_i$  提前执行买权才是明智的, 否则应当推迟到时刻  $t_{i+1}$ 。这一分析可以推广到从  $t_i$  到期末  $T$  有多次分红的情况。即只有在时间区间  $[t_i, T]$  红利率始终不小于无风险利率时, 在时刻  $t_i$  提前执行买权才是明智的, 否则就应当推迟。因为股票是有风险金融工具, 很难保证在  $t_i$  时刻之后红利率始终不小于无风险利率。所以, 对于美式买权来说最大的可能是: 要么到期再执行, 要么在最后一次除红日前执行。

#### 4. 动态无套利均衡分析

以上我们根据无套利原则归纳期权价值应当遵循的一些关系时, 从来没有考虑到标的物的股票的价格运动形态。因为期权是一种衍生工具, 它们的价值必定是依附于标的物的价格运动规律的, 所以, 光凭以上这些无套利关系还不能给出期权的定价。

关于标的物股票价格的运动规律我们将放到下一章讨论, 本章将着重讨论期权定价的基本分析方法——动态无套利均衡分析。

回顾一下在第一章所介绍的状态价格定价技术, 我们在已知债券 A 的价格变化规律和债券 B 在期末不同状态下的价格的条件, 可以用无套利均衡分析方法给出债券 B 目前的定价, 基本技术就是用债券 A 和无风险债券的组合来复制债券 B。但在那里, 我们仅仅考虑了 1 时期的定价问题, 如果要考虑多个相继时期的问题, 就要用到多时期的动态无套利均衡分析方法。

我们继续采用第一章的例子, 但把它扩展到 2 时期。假定债券 A 的价格运动规律如图 5.2, 无风险利率  $r_f = 2\%$ 。

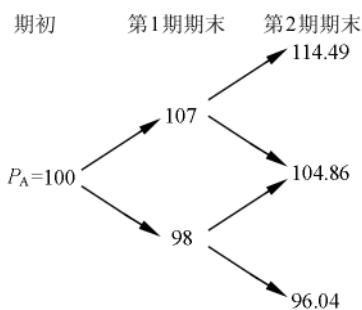


图 5.2

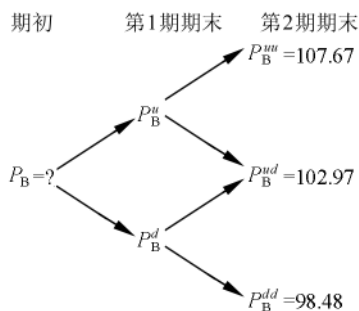


图 5.3

现在已知债券 B 在第 2 期期末 3 种不同状态下的价格如图 5.3, 要定出债券 B 现在的均衡价格。

先来看右上方的二叉树, 我们用  $\Delta^u$  份债券 A 和现在市场价值为  $L^u$  的无风险证券来构筑复制债券 B 的证券组合, 见图 5.4。

用联立方程组

$$\begin{cases} 114.49\Delta^u + 1.02L^u = 107.67 \\ 104.86\Delta^u + 1.02L^u = 102.97 \end{cases}$$

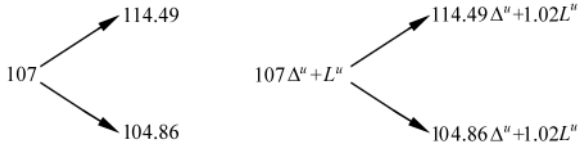


图 5.4

解出  $\Delta^u = 0.488, L^u = 50.78$ 。因此有  $P_B^u = 107\Delta^u + L^u = 103$ 。

用同样的方法处理右下方的二叉树,解出  $\Delta^d = 0.509, L^d = 48.62, P_B^d = 98\Delta^d + L^d = 98.5$ 。

最后我们来看左方的二叉树。用  $\Delta$  份债券 A 和价值为  $L$  的无风险证券的组合来复制债券 B,如图 5.5。

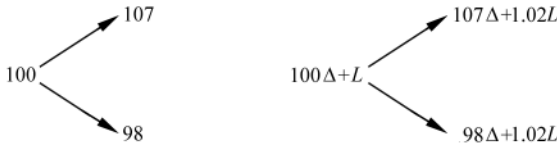


图 5.5

完全可以像第一章一样解出解出  $\Delta = 0.5$  和  $L = 48.53$ ,并由此算出债券 B 现在的市场价值  $P_B = 98.52941$ 。

这就是动态的无套利均衡分析方法。这里有一个关键点,就是所谓的自融资策略。稍微细心一点就可以发现,在第 1 期期末,我们以上方的状态为例,有

$$107\Delta + 1.02L = P_B^u(103) = 107\Delta^u + L^u$$

这说明,我们尽管调整了债券 A 和无风险证券在组合中的头寸,原来是  $(\Delta, L) = (0.5, 48.53)$ ,调整为  $(\Delta^u, L^u) = (0.488, 50.78)$ ,但组合的市场价值未变。实际上就是卖掉了一部分债券 A,将所得增加到无风险证券的投资中去。也就是说,尽管调整了组合中的头寸,但投资者不需要追加资金,也不会有资金富余出来。要注意的是,头寸的数值(如  $\Delta, L$ )解出来可能是负值,这是容许的,负值意味着对证券的卖空,将卖空所得投资到另一种证券(不可能二者的数额都为负)。我们假设市场的交易规则是容许卖空的。

还要注意的,这种动态的无套利均衡分析方法是从期末倒推到期初的,即是由未来的最终值倒算出现在的值。这非常符合金融学中对价值的测算原理——金融学是面向未来的,由将来决定现在。

## 5. 期权定价——二叉树方法

现在出现一个问题,按照上一节的分析,用债券 A 和无风险证券就可以完全动态地复制出债券 B。如果债券 B 和复制的证券组合在任何一个时点的市场价格发生偏离,就会出现无风险套利机会。这样一来,债券 B 实际上就变成了债券 A (加上无风险证券)的衍生证券,是与债券 A 不相独立的一种有价值证券。在实际的市场中,情况当然并不都是这样。原因在于我们假设每过一个时期,市场只出现两种可能的状态(二叉树)。这样,无套利均衡分析就只

需要两项互相独立的证券(债券 A 和无风险证券)就可以复制出所有其他的证券。但市场实际不可能每次只出现两种可能的状态,而可能出现更多的状态。于是就需要更多的互相独立的证券才可能动态地复制其他的证券,这就是市场的动态完全性问题。

但是,对于期权的定价问题来说,情况有点特殊。期权本身就是衍生品,根据上一节的分析可知,期权的价值应当可以由标的物股票的价格、预定价、距到期的时间和当时的市场利率水平(指无风险利率)决定。因此,标的物股票和无风险证券看来就应当能够完全复制期权(当然还要加上预定价和距到期的时间等条件)。这样,倒过来看,二叉树定价对期权来说就具有特殊的意义。事实上,以后我们会讲到,无限细分二叉树的时期间隔,在一定的条件下,确实能完全地描述标的物股票价格变化过程中可能发生的各种可能的状态。

请注意,这一点很重要。一般地说,债券本身是原生工具,不会是另一种债券的衍生品。要动态地复制债券,必须寻找和构筑与它高度统计相关的证券组合,这涉及相当复杂的金融工程技术,在实际中不能简单地采用二叉树分析方法。股票的情况则更是如此。而像期权这样的衍生工具,本身与其标的物就有高度的相关性,复制相对比较容易,二叉树分析方法有相当高的实际意义。因此,衍生工具对金融工程师来说非常重要,它们本身可以作为有效的零部件来组合复制其他的金融工具,从而也就使其他的金融工具通过它们进行分解。组合的反面就是分解,组合分解技术是金融工程的核心技术。

下面,我们用二叉树来讨论期权定价问题,并以此加深对动态无套利均衡分析方法的

理解。  
首先讨论不分红股票的欧式买权,用一个简单的例子从 1 个时期的定价讨论开始。  
假设目前的无风险利率是 2%,股票的价格是 60 元,一个时期后(为简单起见,假设 1 年后),股票要么上升到 90 元,要么下跌到 30 元。如果一项买权的预定价是 60 元,那么期末的价值要么是 30 元,要么是 0 元,见图 5.6。

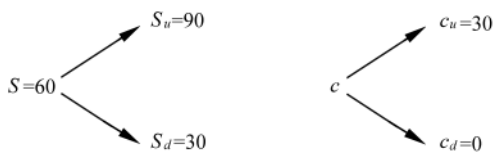


图 5.6

按照前面讲过的无套利均衡分析方法,用  $\Delta$  份股票和价值为  $L$  的无风险证券来复制这一买权,可解得  $\Delta=0.5$  和  $L=-14.71$ 。因此,买权现在的市场价值是  $c=15.29$ 。如果买权现在的市场价格偏离这一均衡价值,构筑买权和复制证券组合的相反头寸,就能进行无风险套利。

现在提一个问题:为什么  $\Delta$  的值是 0.5?

复制证券组合对标的物股票价格变化的敏感性应当与被复制的买权一样,即应有

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = \frac{30 - 0}{90 - 30} = 0.5$$

所以复制证券组合中应当包含  $\Delta=0.5$  份股票。

假如股票价格到期末上升到 90 元的概率为  $q$ ,则下降到 30 元的概率为  $1-q$ 。现在再

提一个非常重要的问题:期权的定价与这一概率分布有没有关系?

从上面所作的无套利均衡定价过程看,期权的定价与这一概率分布没有关系,因此也就与股票的预期收益率无关(对于不分红股票来说,预期收益率就是资本收益率的数学期望值(概率平均值),就我们的例子来说,就是  $E(r) = q \frac{S_u - S}{S} + (1 - q) \frac{S_d - S}{S} = \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}(1 - q)$ )。但从更深一层看,问题没有那么简单。

当我们对期权定价时,如果直接就是将期权未来的预期值(即概率平均值)折现,那么,期权的定价是应当与这一概率分布有关的。但无套利均衡分析不是这样做的(在什么情况下可以这样做,我们后面会讲到),无套利均衡分析只用到股票现在的价格  $S$ 。原因在于,在一个有效率的市场中,股票目前的均衡价格已经反映了其未来的收益。所以,期权的定价只需要用到股票目前的价格  $S$ 。

进一步的问题是,如果现在市场上出现一个利好的消息,股票价格上升的概率变大了,影响不影响期权的价值呢?答案是会发生影响的。概率的变化将引起目前股票价格的变化,进而影响到期权的价值。

所以,虽然从无套利均衡分析的过程来看,期权的定价并不直接与股票价格变化的概率相关,但实际上是通过股票目前市场价格的变化影响到期权的价值。

这涉及更深一层面的问题。我们一再强调过,金融工具(有价证券)在市场上的定价与投资者的风险偏好无关。这实际上指的是不发生直接的关系。整个市场的价格变化实际上是和市场参与者(不是指个别参与者)的风险偏好有关系的,进而也会影响到金融工具的定价。

下面我们导出二叉树定价的一般模型。先引入一些记号:

$u = 1 +$  股票价格上涨状态的收益率

$d = 1 +$  股票价格下跌状态的收益率

$\bar{r} = 1 + r_f$  (无风险收益率)

为了不发生无风险套利机会,必须有

$$d < \bar{r} < u$$

这一点请读者自己证明。

于是  $S_u = uS, S_d = dS$ , 复制买权的关系为

$$\Delta uS - \bar{r}L = c_u = \max\{uS - X, 0\}$$

$$\Delta dS - \bar{r}L = c_d = \max\{dS - X, 0\}$$

这里对无风险证券的头寸用负号(意味着卖空无风险证券或以无风险利率借款),纯粹是为了后面公式的整齐起见。

由此可以解出

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{S(u - d)}$$

$$L = \frac{dc_u - uc_d}{\bar{r}(u - d)}$$

请注意,因为

$$dc_u - uc_d = d\max\{uS - X, 0\} - u\max\{dS - X, 0\}$$

$$= \max\{udS - dX, 0\} - \max\{udS - uX, 0\} > 0$$

所以  $L > 0$ , 即在复制买权的证券组合里, 无风险证券一定是卖空的 (或以无风险利率借款)。最后, 买权的复制头寸是  $c = \Delta S - L$ 。

我们建议读者自己推导一下复制卖权头寸的公式。

## 6. 风险中性假设

现在我们讲解在金融学中极为重要的风险中性假设 (risk-neutrality)。

定义

$$p = \frac{\bar{r} - d}{u - d} \quad \text{和} \quad (1 - p) = \frac{u - \bar{r}}{u - d}$$

可以导出

$$\begin{aligned} c = \Delta S - L &= \frac{c_u - c_d}{u - d} - \frac{dc_u - uc_d}{\bar{r}(u - d)} = \frac{1}{\bar{r}} \left( \frac{\bar{r} - d}{u - d} \right) c_u + \frac{1}{\bar{r}} \left( \frac{u - \bar{r}}{u - d} \right) c_d \\ &= \bar{r}^{-1} [pc_u + (1 - p)c_d] \end{aligned}$$

请注意, 如果把  $p$  和  $1 - p$  作为概率的话, 这最后的一个等式表明, 买权的市场均衡价值相当于期末买权价值的预期值 (概率平均值) 用无风险利率折现后的现值。这一情况对于卖权来说也是一样的。但一般说来,  $p \neq q$ , 所以  $p$  和  $(1 - p)$  不是真实的概率。它们被称为风险中性概率, 理由我们很快就会解释。此外, 期权是有风险的金融工具, 要计算现值的话, 折现率也不应该是无风险利率。这都涉及到风险中性假设。

我们先有必要解释一下什么是风险厌恶、风险中性和风险喜好。

18 世纪著名数学家伯努利 (Daniel Bernoulli) 在研究赌博问题时发现, 人们往往对赌博可能输掉的钱看得比可能赢到的钱重。例如有一个掷硬币的赌局, 假定硬币是完全对称的, 正面朝上可以赢得 2 000 元, 反面朝上则 1 分钱也收不回。现在问, 入局费 (要下的赌注) 应当是多大, 才能使这一赌局成为一场公平的赌博?

所谓公平的赌博是指赌博结果的预期只应当和入局前所持有的资金量相等, 即赌博的结果从概率平均的意义上来说应当是不输不赢。那么, 我们的例子中的入局费就应当是  $50\% \times 2\,000 \text{ 元} + 50\% \times 0 \text{ 元} = 1\,000 \text{ 元}$ 。花费 1 000 元参加这一赌局, 使这一赌局成为一场公平的赌博。但是, 对于许多人来说, 不愿意花 1 000 元来参加这一虽是公平的赌局, 因为赌博是冒险的。有人也许只愿意花 300 元来入局, 有人甚至只愿意花 100 元来入局。所以, 他们实际上是分别要求有 700 元甚至 900 元的预期收益作为承受风险的补偿。这些人是风险厌恶型的, 在没有风险补偿时, 风险厌恶型的人拒绝公平的赌博。现代金融学认为理性的市场参与者都是风险厌恶型的, 但各人对风险的厌恶程度有所不同, 有人相对激进, 有人则相对保守, 对承受相同的风险, 要求不同的风险补偿, 激进者要求比较小的风险补偿, 保守者则反之。

如果有人愿意无条件地参加公平的赌博, 则这样的人被认为是风险中性的。风险中性者对风险采取无所谓的态度。例如有另外一个赌局是这样设计的: 硬币正面朝上可以赢得 4 000 元, 反面朝上则还要赔 2 000 元, 入局费也是 1 000 元, 这也是一场公平的赌博, 风险中性者也会无条件地参加。但这一赌局的风险显然比上一个赌局来得大。因此, 风险中性

者对风险的大小无所谓。如果我们把购置未来收益不确定的资产的投资活动看作赌博的话,风险中性的投资者对所有资产所要求的预期收益率都是一样的,而不管其风险如何,并不要求风险的补偿。因此,对所有资产所要求的预期收益率也就同无风险资产的收益率相同。这就是说,风险中性的投资者投资于任何资产所要求的收益率就是无风险收益率。

那么,是否存在风险喜好型的人呢?我们来看最典型的六合彩赌博(super lotter)。六合彩彩票一般由 50 个左右的数字组成,下面就算是从 1 到 50 这 50 个数字。博彩者随意圈定 6 个数字,如果与摇奖摇出的 6 个数字完全吻合,就能中大奖,比如说 3 000 000 元。为了简单起见,我们不考虑猜中 5 个、4 个、3 个数字的小奖(事实上,博彩的人都是冲着大奖来的)。如果彩票是 1 元一张,这是一场什么样的游戏呢?

3 000 000 元的大奖是非常诱人的,但中奖的概率只有  $\frac{1}{15\,890\,700}$ 。在不计小奖的情况下(即认为只要不是 6 个数字全部猜中,就 1 分钱也拿不到),每张彩票的预期收益是  $\frac{1}{15\,890\,700} \times 3\,000\,000 + \frac{15\,890\,699}{15\,890\,700} \times 0 = 0.20$  元。彩票是 1 元一张,所以这显然不是公平的赌博。但成千上万的人去购买六合彩彩票,说明当人们去博彩时,都是风险喜好型的。此时人们得到的非但不是风险的补偿,甚至是风险的折扣。风险喜好是赌徒的典型心态,市场的理性的参与者都不是赌徒,都是风险厌恶型的。这是投机者与赌徒的基本区别,投机者是市场的理性参与者,他们接受风险的目的是为了获得风险的补偿。投机者是风险厌恶型的,他们不是赌徒!

在一个假想的风险中性的世界里,所有的市场参与者都是风险中性的,那么,所有的资产不管其风险大小或是否有风险,预期收益率都相同,都等于无风险收益率。而且,所有资产现在的市场均衡价格都应当等于其未来收益的预期值,加上考虑到货币的时间价值,就都是未来预期值用无风险利率折现后的现值。这就是我们为什么把  $p$  和  $(1-p)$  叫做风险中性概率,而采用无风险利率作折现率的原因。

风险中性假设是和套利均衡分析紧密联系在一起的。当无风险套利机会出现时,所有的市场参与者就都会进行套利活动,而不管其对风险的厌恶程度如何。由此出发,就可以得到这样一个合乎逻辑的推理结果:

无套利均衡分析的过程和结果与市场参与者的风险偏好无关。

因为理性的市场参与者都被认为是风险厌恶型的,要他们接受风险就一定要给予风险的补偿。因此,在有风险资产的预期收益率里,都包含有风险的补偿在内。对风险的厌恶程度愈烈,要求的风险补偿就愈大。如果对一个问题的分析过程与市场参与者的风险偏好无关,那么其结果也就无所谓风险补偿的问题。于是就引出了风险中性假设。

所谓风险中性假设是

如果对一个问题的分析过程与投资者的风险偏好无关,则可以将问题放到一个假定的风险中性的世界里进行分析,所得的结果在真实的世界里也应当成立。

利用风险中性假设可以大大地简化问题的分析,因为在风险中性的世界里,对所有的资产(不管风险如何)都要求相同的收益率(无风险收益率),而且,所有资产的均衡定价都可以按照风险中性概率算出未来收益的预期值,再以无风险利率折现得到。最后,将所得的结果放回真实的世界,就获得有实际意义的结果。

利用风险中性假设的分析方法进行金融产品的定价,其核心环节是构造出风险中性概率。无套利均衡分析方法不涉及参与者的风险偏好,因此适合于风险中性假设的分析方法。我们从上面对期权定价的二叉树方法的例子知道,无套利和风险中性概率之间存在相互依存的关系。我们在以后通过引入鞅的概念讲解无套利基本定理时,会更深入地讨论这一问题。

## 7. 利用风险中性假设的二叉树定价

现在我们可以利用风险中性假设的分析方法来对多时期的期权进行定价。先来看 2 时期的情况(见图 5.7)。

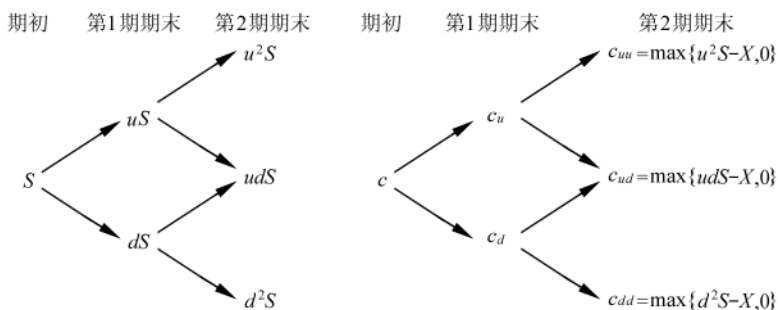


图 5.7

先从第二期期末倒推到第一期期末,有

$$c_u = \bar{r}^{-1} [p c_{uu} + (1-p) c_{ud}]$$

$$c_d = \bar{r}^{-1} [p c_{ud} + (1-p) c_{dd}]$$

再从第一期期末倒推到期初,得出

$$c = \bar{r}^{-2} [p^2 c_{uu} + 2p(1-p) c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]$$

不难推导出  $n$  期的一般定价公式

$$c = \bar{r}^{-n} \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} c_{u^j d^{n-j}}^{(n-j)}$$

$$= \bar{r}^{-n} \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max \{ u^j d^{n-j} S - X, 0 \}$$

此处,概率  $p$  和  $(1-p)$  与前面一样,是  $p = \frac{\bar{r}-d}{u-d}$  和  $(1-p) = \frac{u-\bar{r}}{u-d}$ 。

这一结果应该和采用自融资的动态无套利均衡分析方法的定价结果一样,但推算要容易得多。为了验证这一点,我们用下面的数字例子来做一遍(见图 5.8)。

无风险利率为 2%, 即有  $\bar{r} = 1.02$ , 另外,由图知  $u = 1.2, d = 0.8$ , 于是有  $p = \frac{\bar{r}-d}{u-d} =$

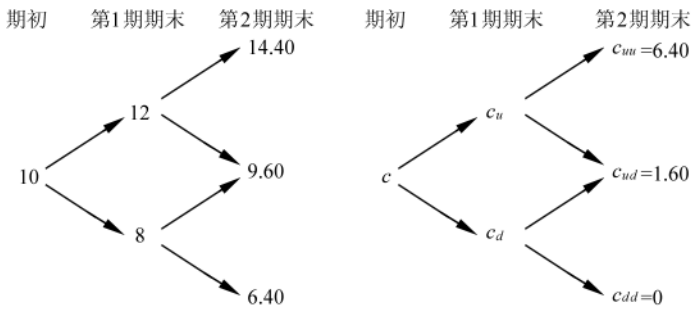


图 5.8

$$\frac{1.02 - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.55, (1 - p) = 0.45.$$

1) 利用风险中性假设计算

$$c = \bar{r}^{-2} [p^2 c_{uu} + 2p(1 - p)c_{ud} + (1 - p)^2 c_{dd}]$$

$$= \left( \frac{1}{1.02} \right)^2 [0.55^2 \times 6.40 + 2 \times 0.55 \times 0.45 \times 1.60 + 0.45^2 \times 0] = 2.62$$

2) 采用动态复制技术计算

$$\Delta^u = \frac{c_{uu} - c_{ud}}{uuS - udS} = \frac{6.40 - 1.60}{14.4 - 9.6} = 1.0$$

$$L^u = \frac{dc_{uu} - uc_{ud}}{r(u - d)} = \frac{0.8 \times 6.40 - 1.2 \times 1.60}{1.02(1.2 - 0.8)} = 7.84$$

因此,  $c_u = \Delta^u uS - L^u = 1.0 \times 12 - 7.843 = 4.157$ 。同理, 算得  $c_d = 0.862$ 。

再倒推到期初, 有  $\Delta = 0.824, L = 5.616$ , 所以  $c = \Delta S - L = 2.62$ , 两种算法的结果一样。

## 8. 小结

动态无套利均衡分析与静态无套利分析不同之处在于复制组合的构成头寸要进行动态的调整, 我们在本章中介绍的分析方法有一个要点是自融资策略。在上面的数字例子里, 复制  $c$  的组合  $\Delta S - L = 2.623$  中,  $\Delta = 0.824, L = 5.616$ 。到了第一期期末, 如果标的物股票价格上涨, 在复制  $c_u$  的组合中, 股票的头寸变成  $\Delta^u = 1.0$ , 原来的股票头寸只有  $\Delta = 0.824$ , 就不够了! 这时, 需要补进 0.176 份股票, 此时每份股票的市价是 12 元, 需要融资  $0.176 \times 12 = 2.112$  元。所谓自融资就是再卖空价值为 2.112 元的无风险证券 (即以无风险利率再借入 2.112 元), 此时组合中无风险证券的空头头寸应为  $5.616 \times 1.02 + 2.112 = 7.84$  元, 这正好就是  $L^u$  的数字。这说明, 在第一期期末时, 我们只是调整了组合中股票头寸和无风险证券头寸的比重, 整个组合的价值没有变化, 都是股票价格上升后和无风险证券加上 1 期利息后的组合价值 4.157 元。这就是自融资策略! 其他节点的情况也都是是一样的。

风险中性假设是现代金融理论中极为重要的理论假设。它的成立在本质上是因为在无套利均衡分析中, 复制组合的头寸和被复制证券的头寸实现了完全的风险对冲, 整个组