国家自然科学基金重大项目(金融工程)丛书

金融工程原理

无套利均衡分析

不懂得无套利均衡分析，就是不懂得现代金融学的基本方法论，当然，也就不懂得金融工程的基本方法论。

宋逢明 著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

第六章　布莱克-舒尔斯期权定价模型

我们在第五章用二叉树定价方法介绍了动态无套利均衡分析方法并引入了风险中性假设。我们在本章中通过介绍布莱克-舒尔斯期权定价模型来深化这些概念。

布莱克和舒尔斯在 1973 年发表的第一个期权定价模型中，蕴含着一个极为深刻的思想，即他们意识到期权的风险实际上在标的物的价格及其运动中就得到反映，而且标的物的价格还反映了市场对未来的预期。因此，要研究期权定价必须首先刻画标的物价格的运动规律，而这也是所有后续的期权定价理论的出发点。他们的原始研究是面向以不分红股票作为标的物的欧式期权。因此，首先要对标的物即股票的价格运动规律做出研究。

1. 股票价格运动的规律

二叉树定价看起来有很不合理的地方，因为证券价格的运动看来不是要么按 u 变大，要么按 d 变小的。证券价格可能取任何值！二叉树定价的合理性何在呢？我们在研究股票价格运动的规律后将得到解释。

我们要用一些随机过程的知识，所以这里先做一点解释。所谓随机过程（随机序列或随机链）是一族无穷多个相互有关的随机变量 $\{S(t)\}$，其中参数 t 的变化如果是连续的，如 $t\in[0,\infty)$，则是随机过程；如果 t 的变化是离散的，如 $t=0,1,\cdots$，则是随机序列或随机链。$S(t)$ 可以是 1 维的变量，也可以是多维的向量，即可以是 $S(t)=\{S_1(t),\cdots,S_N(t)\}$。

假如一年 365 天都能观察到股票的价格如下：

$$S_0 \quad \widetilde{S}_1 \quad \widetilde{S}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{S}_{364} \quad \widetilde{S}_{365}$$

除了当前时刻 $t=0$ 之外，后面的股票价格上都加上一个波折号～，因为它们都是随机变量。

每天的收益率可以这样计算：

$$\left(\frac{\widetilde{S}_1}{S_0}\right) \quad \left(\frac{\widetilde{S}_2}{\widetilde{S}_1}\right) \quad \cdots \quad \left(\frac{\widetilde{S}_{364}}{\widetilde{S}_{363}}\right) \quad \left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{\widetilde{S}_{364}}\right)$$

于是每天的收益率可表示成

$$1+\frac{\widetilde{R}_t}{365}=\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}$$

这里 $\widetilde{R}_t$ 实际上是“按日计息”的日利率，按照习惯以年率的形式表示。要计算年利率 $\widetilde{R}$，就应该是

$$1+\widetilde{R}=\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{S_0}\right)=\left(\frac{\widetilde{S}_1}{S_0}\right)\left(\frac{\widetilde{S}_2}{\widetilde{S}_1}\right)\cdots\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{\widetilde{S}_{364}}\right)=\left(1+\frac{\widetilde{R}_1}{365}\right)\left(1+\frac{\widetilde{R}_2}{365}\right)\cdots\left(1+\frac{\widetilde{R}_{365}}{365}\right)$$

要处理这个连续乘积是比较麻烦的，因此通常换算为以连续计息方式计息的连续复利

$$\frac{r_t}{365}=\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_t}{365}\right)=\log\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_{t-1}}$$

这个 r_t 是连续计息的连续复利利率，也以年率表示。从而有连续计息的年利率

$$r=\log(1+\widetilde{R})=\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_1}{365}\right)+\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_2}{365}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{\widetilde{R}_{365}}{365}\right)$$

$$=\frac{1}{365}(r_1+r_2+\cdots+r_{365})$$

请注意，在这里虽然 $r_1,r_2,\cdots,r_{365}$ 是按日计算的，但实际上可以按照任何的时间间隔计算，即有

$$r=\frac{1}{n}(r_1+r_2+\cdots+r_n)$$

下面对股票价格的运动方式给出基本的假设：

1）所有的 r_t 都是独立同分布的；

2）股票的价格变化是连续的。

由这两个条件知，当时间间隔取得很小，即 n 可以取很大数值时，由中心极限定理知随机变量 r（股票的连续复利收益率）服从正态分布，价格的年变化 $1+\widetilde{R}=\left(\frac{\widetilde{S}_{365}}{S_0}\right)$ 就服从对数正态分布。这里要注意的是，第二个条件是必需的。如果不保证股票的价格变化是连续的，则还有其他的随机过程的概率分布满足第一个条件，例如普哇松过程，描述的是按常数概率跳跃的随机过程。

因此，在满足以上两个条件时，有

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\sim N(\mu T,\sigma^2 T)$$

这意味着有数学期望值

$$E\left[\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\right]=\mu T$$

和方差

$$Var\left[\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)\right]=\sigma^2 T$$

数学期望值和方差之所以都正比于时间长度 T，是因为前面的条件 1)，组成随机过程的各个微小时间间隔上的随机变量之间是互相独立的。

令 $y=\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(0)}\right)$，则 $y\sim N(\mu T,\sigma^2 T)$，而 $\widetilde{S}(T)=S(0)e^y$。进行简单的变量替换，可求出 $\widetilde{S}(T)$ 的数学期望值

$$E(\widetilde{S}(T))=S(0)\exp\left(\mu T+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

因此，请注意，一定有

$$E(\widetilde{S}(T))>S(0)\exp(\mu T)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如果对对数正态分布的含义不清楚的话,在这里很容易搞错。

对于二叉树定价来说,如果从 $t=0$ 时刻到 $t=T$ 时刻,所分的阶段数越来越多,即二叉树越分越细密,适当地选择二叉树中的 u 和 d(使 u 和 d 都"足够快"地趋于 1),当所分的阶段数趋于无穷大时,股票的价格变化就趋向于对数正态分布。

理由是:二叉树各个阶段股票价格的变化是互相独立的,而且变化的概率分布是同分布的。因此满足前述条件 1)。至于条件 2),是使 u 和 d 的选择使它们都"足够快"地趋于 1,从数学上就能证明股票价格的变化趋于连续。于是,由中心极限定理知,当所分的阶段数 $n\to\infty$时,股票收益率的变化将趋于服从正态分布(价格变化趋于对数正态分布)。

为了看清楚这一点,我们来观察二叉树定价时价格的变化规律。有

$$\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)=\begin{cases}u,\ \text{按照概率}\ q\\ d,\ \text{按照概率}\ 1-q\end{cases}$$

因此均值(数学期望值)为

$$E\left[\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)\right]=q\log(u)+(1-q)\log(d)$$

方差为

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)\right]=q(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2$$

对于 n 个阶段的二叉树,因为各个阶段之间价格变化是互相独立的,其均值和方差就应为

$$E\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right]=n[q\log(u)+(1-q)\log(d)]$$

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)\right]=nq(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2$$

如果我们这样选择 u,d 和 q:

$$u=\exp(\sigma\sqrt{T/n})$$

$$d=1/u=\exp(-\sigma\sqrt{T/n})$$

$$q=0.5+0.5\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}$$

显然当 $n\to\infty$时,有

$$n[q\log(u)+(1-q)\log(d)]\to\mu T$$

$$nq(1-q)\left[\log\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2\to\sigma^2T$$

u 和 d 的选择方法使它们都"足够快"地趋于 1。二叉树各阶段之间股票收益的对数的变化是独立同分布的,由中心极限定理知无限细分时会使股票价格趋于服从对数正态分布,而 u,d 和 q 的选择保证了连续计息收益率在单位时间的均值和方差分别是 μ 和 σ^2。因此,适当选择参数,二叉树无限细分确实能够描述股票价格的运动规律。

2. 布莱克-舒尔斯期权定价模型

布莱克-舒尔斯期权定价模型有一系列假设条件,主要有:

1）市场的无摩擦性，包括：

i）无税，无交易成本；

ii）所有的资产可以无限细分；

iii）没有卖空限制。

2）从时刻 $t=0$ 到 $t=T$，都可以以一相同的不变的利率借贷，利率按连续复利 r 计算。

3）从时刻 $t=0$ 到 $t=T$ 股票不分红。

4）标的物股票价格的变化遵循对数正态分布的随机过程，包括以下条件：

i）股票价格连续变化；

ii）在整个期权生命期内，股票的预期收益和收益方差保持不变；

iii）任何时间段股票的收益和其他时间段股票的收益互相独立；

iv）任何时间段股票的复利收益率服从正态分布，即有

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N(\mu(t_2-t_1),\ \sigma^2(t_2-t_1))$$

当然，布莱克-舒尔斯原始模型定价的是欧式期权，即必须到到期日才能执行的期权。

在以上所有假设条件下，股票价格的运动遵循一种称之为带漂移的几何布朗运动的规律，在数学上则表现为称作伊藤过程的一种随机过程。可以这样表示：

$$\mathrm{d}S = \mu^* S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}z$$

其中

S 是标的物（股票）的价格；

μ^* 是所谓漂移率，$\mu^*=\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$，所以 μ^* 是连续计算收益率的股票在单位时间内收益的预期收益率，而 μ 即前面所述的连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的数学期望值；

σ 是波动率，即连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的标准差；

$\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{dt}$ 是称之为维纳过程（即布朗运动）的一种随机过程，ε 满足标准正态分布，数学期望值为 0，方差为 1。

请注意，如我们前面所指出的，连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数实际就是单位时间连续计息的复利收益率。

我们在本章的数学附录中证明，满足上述伊藤过程的股票的连续计息复利收益率服从正态分布，即价格变化服从对数正态分布。所以这一伊藤过程的数学模型确实描绘了股票价格的连续变化规律。

对伊藤过程的研究有一个重要的数学结果，这就是所谓的伊藤引理。

伊藤引理：如果 $f=f(S,t)$ 是衍生品的价格（取决于标的物股票的价格 S 和时间 t），则有以下的关系

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu^* S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

显然，$f=f(S,t)$ 可以统一地表示买权或卖权的价格。

布莱克-舒尔斯期权定价模型采用的是典型的动态无套利均衡分析技术。在上述假设条件下，采取一种动态交易策略，来复制欧式买权到期末的现金流。这一复制技术是在期初 $t=0$ 购买一个由标的物股票和一种无风险证券构成的证券组合，然后不断地动态调整其头寸使之保持住无套利均衡关系，一直到到期日 $t=T$。这样，现在 $t=0$ 时刻欧式期权的价值就一定等于复制组合在 $t=0$ 时刻的价值。这一动态复制过程有以下三个特点：

1）与复制 1 份欧式买权相对应，股票的头寸始终小于 1 股。

2）所对应的股票头寸的大小称为套头比或期权的德尔塔（Δ），德尔塔这样定义

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

其中 f 表示买权或者卖权。我们回想一下，在上一章讨论二叉树定价时，我们选择的复制组合中的股票头寸就是 Δ，与这里的涵义实际上是一样的。

3）套头比（即 Δ）不停地发生变化，所以为了复制 1 份期权，需要随时调整复制组合中股票的头寸，但这种调整是无成本的（自融资的）。

具体地说，这一动态复制过程就是用期权、标的物股票和一种无风险证券来构筑一个无套利均衡的组合头寸：

用 $\Delta=\frac{\partial f}{\partial S}$份标的物股票（股票的价格是 S）的多头（即买入）和无风险证券的空头（卖出）来复制 1 份期权（其价格以 f 表示）。无风险证券的空头的价值记为 L。为了使复制在全过程成立，必须始终动态地保持住以下关系：

$$f = \frac{\partial f}{\partial S}S - L$$

移项整理一下，变成

$$L = - f + \frac{\partial f}{\partial S}S$$

经过一段微小的时间 δt，两边的价值变化为

$$\delta L = - \delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\delta S$$

伊藤过程刻画了 δS，而伊藤引理刻画了 δf，将前述的关系代入，得到有趣的结果

$$\delta L = \left(- \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\delta t$$

请注意，在上面的表达式的右边，随机项 z 不再出现。这意味着 1 份期权的空头和 Δ 份股票的多头能实现风险的完全对冲，而 Δ 的大小是动态地调整变化的。所以，右边这二者的组合和与之等值的无风险证券是完全等价的。即二者组合的收益率应当等于无风险收益率 r_f，有

$$\frac{\delta L}{L} = r_f \delta t$$

即有

$$\frac{\delta L}{\delta t} = r_f L$$

令 $\delta t \to 0$ 并在上述关系式里展开 δL 和 L，就得到布莱克-舒尔斯随机微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+r_f S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r_f f$$

这个随机微分方程刻画了动态调整组合头寸保持无套利均衡的规律。

按照期权到期时的情况可以定出这个微分方程的终端条件如下：当 $t=T$ 时，

对于买权来说，有 $c=f(T)=\max(S(T)-X,0)$；

对于卖权来说，有 $p=f(T)=\max(X-S(T),0)$。

其中 X 是期权中预先指定的标的物的价格（预定价即执行价）。根据终端条件，可以倒向解出上述微分方程的初始值的表达式，就得出布莱克-舒尔斯的期权定价公式：

$$c=S(t)N(d_1)-Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$p=Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_2)-S(t)N(-d_1)$$

其中 $N(\cdot)$是累计正态分布函数，而

$$d_1=\frac{\log(S(t)/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

数学表达式看起来有点可怕，但实际上都已编制好程序装入计算器里，经纪人可以随时很方便地用它们给期权定价。

布莱克-舒尔斯随机微分方程有多种不同的解法，可以得到同样的结果。在布莱克和舒尔斯的原始论文里，是通过变量替换把微分方程转变成一个标准的抛物型方程（热扩散方程）解出。许多解法主要依赖于数学技巧，缺乏明显的金融涵义。我们在本书中只介绍利用风险中性假设的解法，因为我们认为这种解法具有比较深刻的金融学涵义，并可为后面介绍等价鞅测度模型做准备。

3. 风险中性定价

我们在第五章已经介绍过风险中性假设，如果再分析一下上面的布莱克-舒尔斯随机微分方程，就发现可以采用风险中性假设来定价。

在布莱克-舒尔斯随机微分方程中，通过动态对冲（称为 Δ 对冲）的办法，使风险因为完全的对冲而消除掉，方程中不再含有随机项 z。除此之外，细心的读者会发现，方程中也不再含有 μ。这一点同样是意味深长的。股票的预期收益率中含有风险补偿，因而会与投资者的风险偏好有关。不含 μ（μ 是连续计算收益率的股票在单位时间内收益的自然对数的数学期望值，即预期的单位时间连续计息的复利收益率），说明问题与投资者的风险偏好无关。这样，风险中性假设将可适用。

于是，我们可以把求解布莱克-舒尔斯随机微分方程的期权定价问题先放到一个“风险中性”的世界里去研究。在这个假想的世界里，所有的市场参与者都是风险中性的，他们对于有风险资产的收益，都不需要风险的补偿。因此，在这个假想的世界里，所有资产的预期收益率都相等，即都等于无风险收益率 r_f。为了更一般起见，假设现在的时刻是 t，则有如下关系式

$$E^*\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

请注意，这里的 E^* 表示采用风险中性概率求数学期望。下一步的分析必须非常仔

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

细。当我们把真实世界的问题转移到风险中性的世界中时，我们并没有改变标的物股票价格运动和变化的方式。所以，在假想的风险中性的世界里，股票价格仍然应该服从对数正态分布。而且，从直观上想象，波动率 σ 也应当保持不变（关于这一点，严格的数学证明比较麻烦，在本书中就不证了）。不同的是 μ。为了有所区别起见，我们在假想的风险中性的世界里，把 μ 记为 $\overline{\mu}$。

前面我们讨论服从对数正态分布的价格变化的规律时已经指出过价格预期值（数学期望值）的正确表达式应该是

$$E(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(\mu(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

在风险中性的世界里，这个关系式也应该成立，不过应该改写为

$$E^*(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(\overline{\mu}(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))$$

同时我们有

$$E^*(\widetilde{S}(T)) = S(t)\exp(r_f(T-t))$$

所以有

$$\overline{\mu} = r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$$

这里一定要注意 $\overline{\mu}$ 的含义，建议读者回过头去看一下本章前面讲述过的 μ 的定义。

在一个风险中性的世界里，未来带有不确定性的现金流的数学期望值（概率平均值）用无风险利率折现后的现值就应该是均衡定价（回忆前一章关于公平赌博的讨论）。我们以买权为例，期末 $t=T$ 时的取值是

$$\max[\widetilde{S}(T) - X, 0]$$

其中 $\widetilde{S}(T)$ 是随机变量，在真实的世界里，服从真实概率 P，在风险中性世界里，服从风险中性概率 P^*。

在风险中性世界里的定价就应当是

$$c(S(t),t) = \mathrm{e}^{-r_f(T-t)}E^*\{\max[\widetilde{S}(T) - X, 0]\}$$

记 $f^*(\widetilde{S}(T))$ 为风险中性概率的密度函数，就可把上式写成

$$\begin{aligned} c(S(t),t) &= \mathrm{e}^{-r_f(T-t)}\int_0^\infty \max[\widetilde{S}(T) - X, 0] f^*(\widetilde{S}(T))\mathrm{d}\widetilde{S}(T) \\ &= \mathrm{e}^{-r_f(T-t)}\int_X^\infty [\widetilde{S}(T) - X] f^*(\widetilde{S}(T))\mathrm{d}\widetilde{S}(T) \end{aligned}$$

我们知道，即使在风险中性的世界里，股票的价格也是服从对数正态分布的，即在风险中性的世界里，我们有

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N(\overline{\mu}(T-t), \sigma^2(T-t))$$

作变量替换

$$z = \frac{\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right) - \overline{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

可以化作标准正态分布的形式，即

$$z \sim N(0,1)$$

代入原积分式后，就有

$$c(S(t),t) = S(t)\int_{-\bar{d}}^{\infty} e^{z\sigma\sqrt{T-t}+(\bar{\mu}-r_f)(T-t)}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz - Xe^{-r_f(T-t)}\int_{-\bar{d}}^{\infty}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

$$= S(t)e^{(\bar{\mu}-r_f+\sigma^2/2)(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}}\frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dw - Xe^{-r_f(T-t)}\int_{-\infty}^{\bar{d}}\frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dw$$

$$= S(t)N(\bar{d}+\sigma\sqrt{T-t}) - Xe^{-r_f(T-t)}N(\bar{d})$$

此处，

$$\bar{d} = \frac{\log(S(t)/X) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

代入

$$\bar{\mu} = r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$$

就有

$$\bar{d} = \frac{\log(S(t)/X) + (r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2$$

又有 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$，于是得到

$$c(S(t),t) = S(t)N(d_1) - Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

这就是布莱克-舒尔斯随机微分方程的解。因为问题本身与投资者的风险偏好无关，所以在风险中性世界里的解也就是真实世界里的解。

现在我们来看一下 $N(d_2)$ 的涵义。在假想的风险中性的世界里，到到期日股票价格高于预定价的概率是

$$P^*(\tilde{S}(T) > X) = P^*\left[z > \frac{\log\left(\frac{X}{S(t)}\right) - \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= P^*\left[z > -\frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= P^*\left[w < \frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$= N\left[\frac{\log\left(\frac{S(t)}{X}\right) + (r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] = N(d_2)$$

所以，$N(d_2)$ 是在风险中性世界里，股票价格高于预定价的（风险中性）概率。由风险中性定价的原理知，假如一份期权到期末时，如果标的物股票的价格高于期权的预定价，则到期时期权的价值为 1 元，否则价值为 0。这样，这份期权现在的定价就是 $N(d_2)$ 元。

另外，从布莱克-舒尔斯期权定价公式看，因为有

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-d_1)$$

所以 $N(d_1)$实际上就是动态套头比。

4. 布莱克-舒尔斯期权定价公式的推广

我们在这一节里对布莱克-舒尔斯期权定价公式加以推广。

（1）标的物股票支付已知红利的情况

首先考虑标的物股票支付已知红利的欧式期权。

假如现在是时刻 t，欧式买权的到期日是 T，标的物股票将在时刻 t_1 支付已知数额的红利 D，有 $t<t_1<T$。

因为在买权的到期日之前要支付红利，因此标的物的价值不是股票本身，而应该是股票减去红利本身的现值。于是，标的物股票的现在的价值 $S(t)$由两个部分构成：

1）发生在 t_1 时刻的无风险的红利（因为红利的数额是预先确定的）。

2）支付红利后到 T 时刻时股票的价值的现值。这一部分价值是有风险的，故记为 $S_{\text{risky}}(t)$，有

$$S_{\text{risky}}(t) = S(t) - De^{-r_f(t_1-t)}$$

请注意，以上分析对于在时刻 t 到时刻 T 之间多次发生已知数额红利的情况也是适用的。在更一般的情况，有

$$S_{\text{risky}}(t) = S(t) - D^*$$

其中 D^* 是所有在时刻 t 到时刻 T 之间发生的红利在时刻 t 的现值。

于是我们可以直接利用布莱克-舒尔斯期权定价公式来定价了，只要用 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$即可，有

$$c(t) = (S(t) - D^*)N(d_1) - Xe^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log((S(t) - D^*)/X) + (r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

请注意，不但要在期权定价公式中以 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$，而且在积分限 d_1 和 d_2 中也都要用 $S_{\text{risky}}(t)$来代替 $S(t)$。

下面我们用风险中性假设来分析。

按照风险中性假设，利用布莱克-舒尔斯微分方程的终端条件积分来为欧式买权定价时，是按以下两个公式来计算的

$$c(t) = e^{-r_f(T-t)}E^*\{\max[\widetilde{S}(T) - X, 0]\}$$

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right) \sim N(\overline{\mu}(T-t), \sigma^2(T-t))$$

其中 $\overline{\mu}=r_f-\frac{1}{2}\sigma^2$。

重要的是，在布莱克-舒尔斯定价公式中，$S(t)$实际上只是通过上面描述对数正态分

布的关系起作用的。因为标的物股票在期间要分红,所以下述关系式

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

不再成立,因为期间有分红行为发生,而应代之以

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{S_{\text{risky}}(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

这实际上是把分红的影响消除掉。这里蕴涵的关系就是

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{S_{\text{risky}}(t)}\right)\sim N(\overline{\mu}(T-t),\sigma^2(T-t))$$

这样积分的结果就一定是上面指出的布莱克-舒尔斯微分方程的解。

（2）标的物股票具有已知的红利率

同样的分析方法可用来为标的物股票在每单位时间连续按比例发放红利的情况。对这种情况的分析非常重要,因为许多重要的标的物如股票指数、外汇等的期权定价,都可以转化为这种形式讨论。我们假定在任何时间段 $\mathrm{d}t$ 标的物股票都发放红利 $\eta S\mathrm{d}t$,这等价于在每一刻都将剩余股票价值的比例为 $\eta\mathrm{d}t$ 的部分分走。以连续复利计算,意味着到期末,还剩下原来股票价值的 $\exp(-\eta(T-t))$。所以,在现在时刻 t,标的物股票的价值由两部分组成:比例为 $1-\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}$ 的部分是作为红利在到期日 T 之前发放的,剩下比例为 $\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}$ 的部分是 1 份标的物股票在到期日 T 的价值的现值(在时刻 t)。跟上面一节同样的做法,我们可用 $S(t)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}$ 来代替 $S(t)$,得到布莱克-舒尔斯模型的解

$$c(t)=S(t)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}N(d_1)-X\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\log(S(t)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}/X)+(r_f+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

和前一小节的分析一样,我们再讨论一下利用风险中性假设的定价方法,但是从更为一般的基础上讨论。风险中性假设的定价方法基本上就是用风险中性概率对期权的期末终端值算出数学期望值(概率平均值),再用无风险利率折现,即

$$c(t)=\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}E^{*}\{\max[\widetilde{S}(T)-X,0]\}$$

这里的关键是要找出到期日 T 时价格为 $\widetilde{S}(T)$ 的标的物股票在时间 t 时的价值 $Y(t)$。例如,对于不分红股票来说,$Y(t)=S(t)$,而对于分红的股票(已知红利的数额)来说,则有 $Y(t)=S(t)-D^{*}$,其中 D^{*} 是期间所分红利在时间 t 的现值。在假想的风险中性的世界里,有

$$E^{*}\left[\frac{\widetilde{S}(T)}{Y(t)}\right]=\exp(r_f(T-t))$$

$$\log\left(\frac{\widetilde{S}(T)}{Y(t)}\right)\sim N(\overline{\mu}(T-t),\sigma^2(T-t))$$

在原来计算布莱克-舒尔斯模型的积分式里,以 $Y(t)$ 代替 $S(t)$(包括在积分限里),就能够计算出风险中性定价,定价结果在真实的世界里也成立。

现在在标的物股票具有已知的(单位时间)红利率 η 的情况下,有

$$Y(t)=S(t)\mathrm{e}^{-\eta(T-t)}$$

以 $Y(t)$ 代替 $S(t)$ 代入原来的积分式(包括在积分限里),积分的结果一定和直接解算

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

微分方程的结果一样。

（3）外汇期权的定价

外汇期权的定价类似于支付已知红利率的股票为标的物的期权的定价。例如，德国马克对美元的汇率在时刻 t 的汇率是 0.66 美元/德国马克，则可取 $S(t)=0.66$ 美元。记 r_f^{DM} 是马克的无风险利率，$r_f^{\$}$ 是美元的无风险利率。则在任何时间段 dt，1 德国马克就相当于支付 $r_f^{DM}S(t)dt$ 的美元"红利"。于是，到期日 T 时刻的 1 个德国马克，对应于时刻 t，只相当于 $\exp(-r_f^{DM}(T-t))$ 个德国马克。因此，如果要求到期日 T 时刻标的资产价值为 1 德国马克的期权，在时刻 t 的美元价值就应是 $e^{-r_f^{DM}(T-t)}S(t)$，代入布莱克-舒尔斯微分方程求解或者用风险中性假设求积分，就都能得到欧式外汇期权的定价公式

$$c(t)=S(t)e^{-r_f^{DM}(T-t)}N(d_1)-Xe^{-r_f^{\$}(T-t)}N(d_2)$$

$$p(t)=-S(t)e^{-r_f^{DM}(T-t)}N(-d_1)+Xe^{-r_f^{\$}(T-t)}N(-d_2)$$

$$d_1=\frac{\log(S(t)e^{-r_f^{DM}(T-t)}/X)+(r_f^{\$}+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

（4）分红股票美式买权的近似解

我们考虑分红股票的美式买权，假定标的物股票在时刻 t_1 分红，这里 $t<t_1<T$。美式买权的持有者要么在临近除红时刻 t_1 执行期权，要么到到期日时刻 T 执行期权。因此，我们可以把这个美式买权近似地看作两个欧式买权中取大的值的那一个。这两个欧式买权是：

1）到时刻 t_1 到期的欧式买权，标的物股票不分红；

2）到时刻 T 到期的欧式买权，标的物股票在时刻 t_1 分派红利 D。

我们以 $c(S(t),\tau-t)$ 标记到期日为 τ，不分红股票的欧式期权在时刻 t 的价值（用布莱克-舒尔斯定价公式求出），则分红股票的美式买权的近似解是

$$C(t)=\max[c(S(t),t_1-t),c(S(t)-De^{-r_f(t_1-t)},T-t)]$$

这一近似解很显然可以应用到多次分红的情况。

这个近似解略微偏小一点儿。盖斯克（R. Geske）、罗尔（R. Roll）和瓦莱（R. Whaley）的研究给出了在布莱克-舒尔斯模型条件下求解分红股票美式买权定价的精确解。有兴趣的读者可以参阅有关文献。

需要指出的是，在布莱克-舒尔斯模型条件下，美式卖权没有解析解存在，只能求近似解。

关于期权定价公式应用于其他方面的推广，我们将另外讨论。

5. 其他方面的推广

布莱克-舒尔斯期权定价公式还有其他方面的一些推广。

（1）关于波动率的讨论

在布莱克-舒尔斯期权定价公式里，波动率 σ 作为常数处理。在实际中，波动率 σ 是可能随机变化的，即 σ 可以是一个随机变量。此时，我们可以用期权生命期内各时间段方差的和来代替 $\sigma^2(T-t)$。例如，某一股票的收益的自然对数的标准差（年率）在后面 3 个月中

每个月分别是 36%，42%和 28%，则采用布莱克-舒尔斯期权定价公式时的波动率应当这样计算

$$\sigma\sqrt{T-t}=\sqrt{\frac{1}{12}(0.36^2+0.42^2+0.28^2)}=0.179$$

要注意的是，这种处理方法只适合于波动率只跟时间和标的物股票价格有关的情况。例如，在二叉树定价模型里，只要知道每个节点的波动率就能稍作变形来应用原来的方法定价。但如果波动率不仅与时间和标的物股票价格有关，还有其他因素的影响，或者说波动率和股票价格的变化不是高度相关的，情况就变得比较复杂，也就不能像这样简单地处理。

（2）跳跃式的价格变化

在布莱克-舒尔斯期权定价模型中，假定标的物股票价格的变化遵循的是热扩散型的随机过程。但有时股市会发生激剧的价格变动，这时价格变化应当被看作是发生了跳跃。如果向上跳跃和向下跳跃是对称的，这可以看作是波动率突然变大。如果跳跃的发生是不对称的，向上跳跃的概率变大时，处于虚值状态的买权的价值会变大（特别是在接近到期时）；向下跳跃的概率变大时，处于虚值状态的卖权的价值会变大。

（3）利率的变化

布莱克-舒尔斯期权定价模型假设利率是不变的。一般说来，利率的变化对期权的价值影响并不大（除非是利率期权）。如果在期权的生命期内，市场无风险利率要发生变化，意味着国库券收益曲线不是平坦的，那么，在波动率不变时，可以用到期日与期权相同的零息票债券的累计收益率来代替 $r_f(T-t)$。即使波动率发生变化，利率变化对期权价值的影响也是不大的。

6. 小结

本章我们讨论布莱克-舒尔斯期权定价公式及其基本推广。布莱克-舒尔斯期权定价模型有一系列的前提假设条件，其中对标的物股票价格的运动规律的假设是非常基本的。股票收益的变化被认为服从对数正态分布，股票价格运动则遵循伊藤过程。这一假设在理论上和市场的有效率性假设很好地相吻合（关于市场的有效率性将在第九章详加讨论）。但近期的实证研究发现，连续复利收益率的分布并不严格地服从正态分布，有“胖尾”的现象。对这一现象的合理的理论解释还在发展。

一定要牢记的是，μ 是单位时间股票收益复利收益率的数学期望值（概率平均值），而不是股票价格在单位时间收益率的预期值（概率平均值），后者应该是 $\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$。这一点很容易发生混淆。

布莱克-舒尔斯的期权定价模型实际上采用的是动态复制技术，即动态无套利均衡分析方法。这一方法的核心仍然是构筑完全对冲的组合头寸。因为对冲是需要不断地动态调整的，所以采用的是所谓德尔塔（Δ）对冲。正因为对冲的结果消除了不确定性，所以这种定价方法一定与投资者的风险偏好无关，由此可以引用风险中性假设。与风险中性假设相联系，在布莱克-舒尔斯期权定价公式里，不再出现单位时间股票收益复利收益率

的概率平均值 μ。在假想的风险中性的世界里，波动率 σ 保持相同，而采用不同的 $\bar{\mu}=r_f-\frac{1}{2}\sigma^2$。

值得一提的是，德尔塔对冲是 1 阶对冲（后面第十章还要讨论），布莱克-舒尔斯模型是借助伊藤引理建立在这一 1 阶对冲的基础之上的。1 阶对冲是否能建立严格的价格均衡，取决于市场的效率和其他与市场的微观结构有关的问题。所以，布莱克-舒尔斯模型的成立，实际上是依赖于市场的有效率性（前面我们已经指出，用伊藤过程描述标的物股票价格运动方式，本身就依赖于市场的有效率性）。它之所以能相当准确地用作衍生品定价的工具，恰好说明了衍生品市场是非常高效率的市场。考虑更高阶对冲的定价模型的研究可能是有意义的，但其有用性一定是和市场本身的效率结合在一起的。因此，市场微观结构的研究将为各种定价技术建立基础。这也是近来关于市场微观结构的研究成为金融学研究的一个热点的原因。

期权定价公式的基本推广应用的要点是用 $Y(t)$ 代替 $S(t)$。因此，技术的关键在于找出正确的 $Y(t)$。

近似算法在金融工程的资产定价技术中占有非常重要的地位。对于实际交易的定价来说，尤其如此。美式卖权的定价没有解析解，所以近似解法就更为重要。发展快速的近似算法应当是金融工程研究的一个非常重要的领域。

练习题

已知日元兑美元的即期汇率为 $S(t)$，X 是某欧式日元买权的执行价格，到期日为 T，日元的利率为 r^{JPY}，美元的利率为 r^{USD}，连续复利计息，求 $c(S(t),t)$（以美元为单位）。

第六章数学附录

1. 伊藤引理的证明

两个变量的函数 $f=f(S,t)$ 的泰勒展式为

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2+\cdots$$

将伊藤过程也写成差分形式

$$\Delta S=\mu^* S\Delta t+\sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

由此可以推出

$$\Delta S^2=\sigma^2 S^2\varepsilon^2\Delta t+0(\Delta t)$$

因为 ε 服从标准正态分布，有 $E(\varepsilon)=0$ 和 $\mathrm{Var}(\varepsilon)=1$，由此可以推出 $E(\varepsilon^2)=1$。如果我们求 $\varepsilon^2\Delta t$ 的方差，我们有

$$\mathrm{Var}(\varepsilon^2\Delta t)=(\Delta t)^2 E(\varepsilon^2-E(\varepsilon^2))^2$$

所以，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\mathrm{Var}(\varepsilon^2\Delta t)$ 是 Δt 的高阶小量。这意味着，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\varepsilon^2\Delta t$ 将变成不再是随机变量，即 $\varepsilon^2\Delta t\to \mathrm{d}t$。所以有

$$\mathrm{d}S^2=\sigma^2 S^2\mathrm{d}t$$

将这个结果代入上面的泰勒展式，略去二阶以上(包括二阶)的高阶小量，就得到

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\mathrm{d}t$$

再把 $\mathrm{d}S=\mu^* S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$ 代入，就有

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu^* S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z$$

这就是伊藤引理的结果。

如果 f 只是 S 一个变量的函数 $f=f(S)$，则同样的推导导出的伊藤引理的结果是

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S\mathrm{d}z$$

2. 关于伊藤过程的说明

股票价格运动服从伊藤过程

$$\mathrm{d}S=\mu^* S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z$$

其中

$$\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$$

是布朗运动，我们先来讨论它的性质。

因为 $\varepsilon \sim N(0,1)$，**所以** $\mathrm{d}z \sim N(0,\mathrm{d}t)$，**而** $\sigma \mathrm{d}z \sim N(0,\sigma^2 \mathrm{d}t)$。**布朗运动的每一连续瞬间都是独立同分布的随机变量，所以有** $\int_{t_1}^{t_2} \sigma \mathrm{d}z \sim N(0,\sigma^2(t_2 - t_1))$。

我们把前面只含一个变量 $f = f(S)$ **的伊藤引理中的微分方程**

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S \mathrm{d}z$$

改写成积分形式

$$f(S(t_2)) = f(S(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\mu^* S + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}\sigma S \mathrm{d}z$$

取 $f(S) = \log S$，**则** $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{S}$，$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}S^2} = -\frac{1}{S^2}$，**于是有**

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) = \left(\mu^* - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\sigma \mathrm{d}z = \mu(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2}\sigma \mathrm{d}z$$

因此，

$$\log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) \sim N(\mu(t_2 - t_1),\ \sigma^2(t_2 - t_1))$$

从而服从伊藤过程的股票的价格变化服从对数正态分布。由此也说明了 μ **和** μ^* **的关系。**