财会数学

蔡　芷　编著

（修订本）

立信财经丛书　立信会计出版社

财会数学

（修订本）

蔡 芷 编著

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

财会数学/蔡芷编著.—修订版.—上海:立信会计出版社,1993.8(1999.8重印)
ISBN 7-5429-0136-2

Ⅰ.财... Ⅱ.蔡... Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第36249号

出版发行	立信会计出版社
电　　话	(021)64695050×215
	(021)64391885(传真)
	(021)64388409
地　　址	上海市中山西路2230号
邮　　编	200235
E-mail	*lxaph@sh163c.sta.net.cn*
出 版 人	陈惠丽

印　　刷	上海申松立信印刷厂
开　　本	850×1168毫米　1/32
印　　张	15.25
插　　页	2
字　　数	375千字
版　　次	1993年8月第1版
印　　次	2001年8月第14次
印　　数	187 001—190 000
书　　号	ISBN 7-5429-0136-2/F·0132
定　　价	16.50元

如有印订差错　请与本社联系

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

修 订 说 明

《财会数学》初版于1982年，主要作为教学用书。十年来多次重印，今根据教学的使用情况和读者的宝贵意见，进行了修订。

修订后的《财会数学》分作二篇。第一篇为初等代数，其中除包括中学代数基本内容共十一章外，还编有财会专业内容：利息、年金、投资决策等三章；第二篇为线性代数，除包括高校教材：行列式、矩阵、线性方程组等三章基本内容外，还编有经济数学内容：投入产出分析。教学上可根据具体情况选择内容。

修订本仍保持初版本的编写体系，以数学知识为经，以专业应用为纬。各章次在阐述数学的基本概念、基本方法之后，再举述有关的应用例题。每章末附有习题。

对于本书的缺点和错误，编者恳切希望得到读者的批评和指正。

编　　者

1993年8月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一篇　初等代数

初等代数是初等数学中的基本部分，也是学习数学所应掌握的基础知识，它的内容较为丰富，应用比较广泛。本篇选取一些主要内容，一方面作为复习，一方面介绍一些应用。

第一章　和　　式

数学计算中最简单的计算是加法。当有若干个数字相加时，通常采用求和记号“Σ”（希腊字母）表示。它可以使数学的表达形式简洁，有时还可以使运算方法便捷。所以在经济分析中，常使用和式记号。本书有关章节也使用记号“Σ”表示求和。

第一节　和式的概念

有 n 个数：$a_1, a_2, \cdots, a_n$，它们之和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

可记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

并把它叫做和式。这个和式由三项要素构成：

一、加数 a_i

表示求和中的各个加数，右下角的 i 叫做 a 的足标。

二、加数的起讫范围 $i=1, \cdots, n$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

表示加数 a_i 的足标 i 是从下标 1 开始，按自然数顺序 1，2，…，直至上标 n 为止，即从 a_1 起至 a_n 止。足标 i 也可以改用其他字母，如 $j,k,\cdots$，等等。

三、求和记号 Σ

表示对加数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 求和的数学符号。

第二节　写成和式

例 1　把 $4+5+6+7+8+9$ 写成和式。

解　各个加数是按自然数顺序从 4～9，所以记作

$$4+5+6+7+8+9=\sum_{i=4}^{9} i$$

各个加数也可看作

$$4+0,\quad 4+1,\quad \cdots,\quad 4+5,$$

$$3+1,\quad 3+2,\quad \cdots,\quad 3+6,$$

所以，也可写成

$$\sum_{i=0}^{5}(4+i) \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{6}(3+i)$$

足标 i，表示变量序号，亦称标号变量，一般是非负整数，可以从零开始，也可以从其他自然数开始。

例 2　把自然数中 100 以内的奇数之和，写成和式。

解　加数 1，3，5，…，99，可以看作：

$$2\times 0+1,\quad 2\times 1+1,\quad 2\times 2+1,\quad \cdots,\quad 2\times 49+1,$$

或看作

$$2\times 1-1,\quad 2\times 2-1,\quad 2\times 3-1,\quad \cdots,\quad 2\times 50-1,$$

所以

$$1+3+5+\cdots+99=\sum_{i=0}^{49}(2i+1)$$

或

$$1+3+5+\cdots+99=\sum_{i=1}^{50}(2i-1)$$

例 3　把 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ 写成和式。

解　各个加数的分母可看作：

$$2^1,2^2,2^3,\cdots,2^7,$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\\&=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^7}\\&=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{2^i}\end{aligned}$$

从以上三例可知，每个和式的项数都等于它的上标数与下标数之差再加1。

例1的项数是：$9-4+1=6$　（项）

例2的项数是：$49-0+1=50$　（项）

例3的项数是：$7-1+1=7$　（项）

第三节　展开和式

和式的展开是将标号变量按自然数顺序，从下标到上标逐个代入，写成加法形式，必要时，求出和式的数值。

例1　把$\sum\limits_{i=1}^{10}(i+b)$展开（$b$是常量）。

解　和式中i是标号变量，b是常量。所以，按自然数顺序从下标1至上标10，逐个代入标号变量i，即

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i+b)&=(1+b)+(2+b)+\cdots+(10+b)\\&=(1+2+\cdots+10)+10b\\&=55+10b\end{aligned}$$

例2　把$\sum\limits_{n=1}^{5}\frac{2^n}{n}$展开，并求值。

解　标号变量是n，用自然数1～5逐个代入，所以

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{2^n}{n}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}$$

$$=2+2+\frac{8}{3}+4+\frac{32}{5}=17\frac{1}{15}$$

第四节 双重和式

一、双重和式的写法

例 1 把下表中 a_{ij}20 个数之和，写成和式。

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{matrix}$$

解 上表有四行、五列，表中元素 a_{ij}(即和式中的加数)，有两个足标。第一个足标 i 表示元素在表中的行次；第二个足标 j 表示元素在表中的列次。例如，a_{34}表示位于第三行、第四列的元素。

现在，先求各行之和。第一行元素的足标 i 都等于 1，足标 j 从 1～5。所以，第一行之和：

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=\sum_{j=1}^{5}a_{1j}$$

同理，第二、第三、第四行之和，分别为：

$$\sum_{j=1}^{5}a_{2j},\quad \sum_{j=1}^{5}a_{3j},\quad \sum_{j=1}^{5}a_{4j}$$

这四行之和：

$$\sum_{j=1}^{5}a_{1j}+\sum_{j=1}^{5}a_{2j}+\sum_{j=1}^{5}a_{3j}+\sum_{j=1}^{5}a_{4j}$$

就是上表 20 个数之和。

接着，把这个加法算式中每一项($\sum\limits_{j=1}^{5}a_{ij}$) 看作一个元素，这四个元素的差别在于第一个足标 i 的取值不同($i=1,2,3,4$)，是有

序的变化，按照写成和式的方法，

$$\sum_{j=1}^{5}a_{1j}+\sum_{j=1}^{5}a_{2j}+\sum_{j=1}^{5}a_{3j}+\sum_{j=1}^{5}a_{4j}$$
$$=\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{5}a_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}$$

这种两个求和记号“$\sum\sum$”连写的和式，就叫做双重和式。它就是上表中 20 个 a_{ij}之和。

二、双重和式的展开

例 2 把双重和式$\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{2}x_{ij}$展开。

解 先按双重和式中任何一个和式记号下端的标号变量进行展开，然后，再对另一个和式记号的标号变量继续展开。即

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}x_{ij}=\sum_{j=1}^{2}x_{1j}+\sum_{j=1}^{2}x_{2j}+\sum_{j=1}^{2}x_{3j}$$
$$=x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{32}$$

或

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}x_{ij}=\sum_{i=1}^{3}x_{i1}+\sum_{i=1}^{3}x_{i2}$$
$$=x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{12}+x_{22}+x_{32}$$

第五节 和 式 的 性 质

性质一 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$

证 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

性质一说明两个变量之和的和式，等于两个变量的和式之和。

性质二 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+nc$ （c 是常数）

证 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+c)=(a_1+c)+(a_2+c)+\cdots+(a_n+c)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+nc$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i+nc$$

性质二说明和式中的常数展开后，应乘以和式的项数。

性质三 $\sum_{i=1}^{n}c=nc$ （c 是常数）

证 由性质一，$\sum_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}c$

由性质二，$\sum_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum_{i=1}^{n}a_i+nc$

比较两式，证得

$$\sum_{i=1}^{n}c=nc$$

性质三说明把常数写成和式的特殊情况，它表示 n 个 c 之和。

性质四 $\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i$ （k 是常数）

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}ka_i&=ka_1+ka_2+\cdots+ka_n\\&=k(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=k\sum_{i=1}^{n}a_i\end{aligned}$$

性质四说明和式中变量的系数可以移出，作为和式的系数。

性质五 $\sum_{i=1}^{n}(ka_i+c)=k\sum_{i=1}^{n}a_i+nc$ （k,c 是常数）

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(ka_i+c)&=\sum_{i=1}^{n}ka_i+\sum_{i=1}^{n}c\\&=k\sum_{i=1}^{n}a_i+nc\end{aligned}$$

性质五包括了前面的性质一、二、三、四。

性质六 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$

证 原式的左边对第一个和式记号下的标号变量 i 进行展开，

$$\text{左边}=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$$

原式的右边对第二个和式记号下的标号变量 i 进行展开，

$$\text{右边}=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$$

展开后的和式完全相同，所以证得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

性质六说明双重和式中的两个和式记号，可以交换次序。

性质七 $\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{i=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$

证 原式的左边是两个和式的乘积，即

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j&=\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\end{aligned}$$

原式的右边是双重和式，展开后，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j&=\sum_{i=1}^{m}a_i(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\end{aligned}$$

可见左边等于右边，即证得

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$$

性质七说明两个标号变量不同的和式之积，可以写成一个双重和式。

例 1 求 $\sum_{n=1}^{10}(3n+4)$ 的值。

解 根据和式性质，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(3n+4)&=3\sum_{n=1}^{10}n+10\times4\\&=3\times(1+2+\cdots+10)+40\\&=3\times55+40=205\end{aligned}$$

例 2 展开 $\sum_{n=1}^{5}(n+n^2)k$ （k 为常数）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com