

财会 数学

蔡 芷 编著

(修订本)

立信财经丛书 立信会计出版社

财会数学

(修订本)

蔡 芷 编著

立信会计出版社

图书在版编目 (CIP)数据

财会数学/蔡芷编著. —修订版. —上海:立信会计出版社, 1993.8(1999.8重印)
ISBN 7-5429-0136-2

I.财... II.蔡... III.经济数学 IV.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 36249 号

出版发行 立信会计出版社
电 话 (021)64695050×215
(021)64391885(传真)
(021)64388409
地 址 上海市中山西路 2230 号
邮 编 200235
E-mail *lxaph@sh163c.sta.net.cn*
出 版 人 陈惠丽

印 刷 上海申松立信印刷厂
开 本 850×1168 毫米 1/32
印 张 15.25
插 页 2
字 数 375 千字
版 次 1993 年 8 月第 1 版
印 次 2001 年 8 月第 14 次
印 数 187 001—190 000
书 号 ISBN 7-5429-0136-2/F·0132
定 价 16.50 元

如有印订差错 请与本社联系

修 订 说 明

《财会数学》初版于1982年,主要作为教学用书。十年来多次重印,今根据教学的使用情况和读者的宝贵意见,进行了修订。

修订后的《财会数学》分作二篇。第一篇为初等代数,其中除包括中学代数基本内容共十一章外,还编有财会专业内容:利息、年金、投资决策等三章;第二篇为线性代数,除包括高校教材:行列式、矩阵、线性方程组等三章基本内容外,还编有经济数学内容:投入产出分析。教学上可根据具体情况选择内容。

修订本仍保持初版本的编写体系,以数学知识为经,以专业应用为纬。各章次在阐述数学的基本概念、基本方法之后,再举述有关的应用例题。每章末附有习题。

对于本书的缺点和错误,编者恳切希望得到读者的批评和指正。

编 者

1993年8月

目 录

第一篇 初等代数	1
第一章 和式	1
第一节 和式的概念	1
第二节 写成和式	2
第三节 展开和式	3
第四节 双重和式	4
第五节 和式的性质	5
第六节 和式的运算	8
第七节 应用	9
习题一	12
第二章 阶乘与连乘	14
第一节 阶乘的概念	14
第二节 阶乘的运算	15
第三节 连乘的概念	16
第四节 连乘的性质	18
第五节 应用	20
习题二	22
第三章 近似计算	24
第一节 基本概念	24
第二节 近似数的加减法	26

第三节	近似数的乘除法	27
第四节	尾数的取舍方法	29
第五节	近似公式	32
第六节	应用	33
习题三	34
第四章	比与比率	37
第一节	比的概念	37
第二节	比的性质	39
第三节	比的使用	40
第四节	比率的概念	43
第五节	比率的使用	45
第六节	常用的比率	46
第七节	应用	51
习题四	54
第五章	比例	57
第一节	比例的概念	57
第二节	比例的性质	58
第三节	正比例	61
第四节	反比例	62
第五节	应用	65
习题五	76
第六章	指数式与根式	80
第一节	基本概念	80
第二节	指数的运算法则	82
第三节	指数的推广	85

第四节	根式的运算	87
第五节	应用	89
习题六	95
第七章	对数	99
第一节	基本概念	99
第二节	性质与法则.....	100
第三节	重要公式.....	103
第四节	常用对数.....	105
第五节	自然对数.....	112
第六节	计算器求对数.....	115
第七节	应用.....	118
习题七	124
第八章	代数方程	129
第一节	基本概念.....	129
第二节	方程的性质.....	131
第三节	一元一次方程.....	133
第四节	二元一次方程组.....	135
第五节	一元二次方程.....	138
第六节	分式方程.....	144
第七节	无理方程.....	146
第八节	应用.....	149
习题八	156
第九章	不等式	160
第一节	基本概念.....	160
第二节	不等式的性质.....	162

第三节	一元一次不等式	165
第四节	一元一次不等式组	166
第五节	一元二次不等式	169
第六节	分式不等式	172
第七节	应用	174
	习题九	178
第十章	等差数列	181
第一节	基本概念	181
第二节	基本公式	183
第三节	元素公式	186
第四节	等差中项	189
第五节	应用	193
	习题十	203
第十一章	等比数列	206
第一节	基本概念	206
第二节	基本公式	208
第三节	元素公式	210
第四节	等比中项	213
第五节	应用	218
	习题十一	233
第十二章	利息	236
第一节	基本概念	236
第二节	单利	239
第三节	复利	244
第四节	连续复利	248

第五节	银行贴现	253
	习题十二	258
第十三章	年金	265
第一节	基本概念	265
第二节	单利年金	268
第三节	复利年金	278
第四节	特殊年金	286
	习题十三	303
第十四章	投资决策	310
第一节	基本指标	310
第二节	方案评选	316
第三节	设备更新	329
第四节	有价证券	351
第五节	商品交易	358
	习题十四	366
第二篇	线性代数	376
第十五章	行列式	376
第一节	二阶行列式	376
第二节	三阶行列式	378
第三节	高阶行列式	382
第四节	子行列式	384
第五节	行列式的性质	388
第六节	克莱姆(Cramer)法则	391
第七节	应用	393
	习题十五	397

第十六章	矩阵	400
第一节	矩阵的概念.....	400
第二节	矩阵的运算.....	402
第三节	特殊矩阵.....	407
第四节	矩阵的初等变换.....	410
第五节	逆矩阵.....	412
第六节	线性方程组的矩阵解法.....	422
第七节	应用.....	427
	习题十六.....	434
第十七章	线性方程组	437
第一节	基本问题.....	437
第二节	解的判别法则.....	439
第三节	线性方程组的解法.....	444
第四节	解的结构.....	447
第五节	应用.....	448
	习题十七.....	449
第十八章	投入产出分析	452
第一节	投入产出表.....	452
第二节	投入系数表.....	457
第三节	逆系数矩阵.....	461
第四节	对外贸易.....	464
第五节	劳动就业.....	466
第六节	物价.....	469
	习题十八.....	476

第一篇 初等代数

初等代数是初等数学中的基本部分,也是学习数学所应掌握的基础知识,它的内容较为丰富,应用比较广泛。本篇选取一些主要内容,一方面作为复习,一方面介绍一些应用。

第一章 和 式

数学计算中最简单的计算是加法。当有若干个数字相加时,通常采用求和记号“ Σ ”(希腊字母)表示。它可以使数学的表达形式简洁,有时还可以使运算方法便捷。所以在经济分析中,常使用和式记号。本书有关章节也使用记号“ Σ ”表示求和。

第一节 和式的概念

有 n 个数: a_1, a_2, \dots, a_n , 它们之和

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

可记作

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

并把它叫做和式。这个和式由三项要素构成:

一、加数 a_i

表示求和中的各个加数,右下角的 i 叫做 a 的足标。

二、加数的起讫范围 $i=1, \dots, n$

表示加数 a_i 的足标 i 是从下标 1 开始,按自然数顺序 1, 2, \dots , 直至上标 n 为止,即从 a_1 起至 a_n 止。足标 i 也可以改用其他字母,如 j, k, \dots , 等等。

三、求和记号 Σ

表示对加数 a_1, a_2, \dots, a_n 求和的数学符号。

第二节 写成和式

例 1 把 $4+5+6+7+8+9$ 写成和式。

解 各个加数是按自然数顺序从 4~9, 所以记作

$$4+5+6+7+8+9 = \sum_{i=4}^9 i$$

各个加数也可看作

$$\begin{aligned} &4+0, \quad 4+1, \quad \dots, \quad 4+5, \\ &3+1, \quad 3+2, \quad \dots, \quad 3+6, \end{aligned}$$

所以,也可写成

$$\sum_{i=0}^5 (4+i) \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^6 (3+i)$$

足标 i , 表示变量序号, 亦称标号变量, 一般是非负整数, 可以从零开始, 也可以从其他自然数开始。

例 2 把自然数中 100 以内的奇数之和, 写成和式。

解 加数 $1, 3, 5, \dots, 99$, 可以看作:

$$2 \times 0 + 1, \quad 2 \times 1 + 1, \quad 2 \times 2 + 1, \quad \dots, \quad 2 \times 49 + 1,$$

或看作

$$2 \times 1 - 1, \quad 2 \times 2 - 1, \quad 2 \times 3 - 1, \quad \dots, \quad 2 \times 50 - 1,$$

所以

$$1+3+5+\dots+99 = \sum_{i=0}^{49} (2i+1)$$

或

$$1+3+5+\dots+99 = \sum_{i=1}^{50} (2i-1)$$

例 3 把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ 写成和式。

解 各个加数的分母可看作:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^7,$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \\ &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^7} \\ &= \sum_{i=1}^7 \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

从以上三例可知,每个和式的项数都等于它的上标数与下标数之差再加1。

例 1 的项数是: $9-4+1=6$ (项)

例 2 的项数是: $49-0+1=50$ (项)

例 3 的项数是: $7-1+1=7$ (项)

第三节 展开和式

和式的展开是将标号变量按自然数顺序,从下标到上标逐个代入,写成加法形式,必要时,求出和式的数值。

例 1 把 $\sum_{i=1}^{10}(i+b)$ 展开 (b 是常量)。

解 和式中 i 是标号变量, b 是常量。所以,按自然数顺序从下标 1 至上标 10, 逐个代入标号变量 i , 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10}(i+b) &= (1+b) + (2+b) + \dots + (10+b) \\ &= (1+2+\dots+10) + 10b \\ &= 55 + 10b \end{aligned}$$

例 2 把 $\sum_{n=1}^5 \frac{2^n}{n}$ 展开, 并求值。

解 标号变量是 n , 用自然数 1~5 逐个代入, 所以

$$\sum_{n=1}^5 \frac{2^n}{n} = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5}$$

$$= 2 + 2 + \frac{8}{3} + 4 + \frac{32}{5} = 17 \frac{1}{15}$$

第四节 双重和式

一、双重和式的写法

例 1 把下表中 a_{ij} 20 个数之和, 写成和式。

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}$$

解 上表有四行、五列, 表中元素 a_{ij} (即和式中的加数), 有两个足标。第一个足标 i 表示元素在表中的行次; 第二个足标 j 表示元素在表中的列次。例如, a_{34} 表示位于第三行、第四列的元素。

现在, 先求各行之和。第一行元素的足标 i 都等于 1, 足标 j 从 1~5。所以, 第一行之和:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = \sum_{j=1}^5 a_{1j}$$

同理, 第二、第三、第四行之和, 分别为:

$$\sum_{j=1}^5 a_{2j}, \quad \sum_{j=1}^5 a_{3j}, \quad \sum_{j=1}^5 a_{4j}$$

这四行之和:

$$\sum_{j=1}^5 a_{1j} + \sum_{j=1}^5 a_{2j} + \sum_{j=1}^5 a_{3j} + \sum_{j=1}^5 a_{4j}$$

就是上表 20 个数之和。

接着, 把这个加法算式中每一项 ($\sum_{j=1}^5 a_{ij}$) 看作一个元素, 这四个元素的差别在于第一个足标 i 的取值不同 ($i=1, 2, 3, 4$), 是有

序的变化,按照写成和式的方法,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 a_{1j} + \sum_{j=1}^5 a_{2j} + \sum_{j=1}^5 a_{3j} + \sum_{j=1}^5 a_{4j} \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^5 a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 a_{ij} \end{aligned}$$

这种两个求和记号“ $\sum \sum$ ”连写的和式,就叫做双重和式。它就是上表中 20 个 a_{ij} 之和。

二、双重和式的展开

例 2 把双重和式 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij}$ 展开。

解 先按双重和式中任何一个和式记号下端的标号变量进行展开,然后再对另一个和式记号的标号变量继续展开。即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} &= \sum_{j=1}^2 x_{1j} + \sum_{j=1}^2 x_{2j} + \sum_{j=1}^2 x_{3j} \\ &= x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_{ij} &= \sum_{i=1}^3 x_{i1} + \sum_{i=1}^3 x_{i2} \\ &= x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} \end{aligned}$$

第五节 和式的性质

性质一 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

性质一说明两个变量之和的和式,等于两个变量的和式之和。

性质二 $\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc$ (c 是常数)

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \sum_{i=1}^n (a_i + c) &= (a_1 + c) + (a_2 + c) + \cdots + (a_n + c) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + nc \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i + nc$$

性质二说明和式中的常数展开后,应乘以和式的项数。

性质三 $\sum_{i=1}^n c = nc$ (c 是常数)

证 由性质一, $\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n c$

由性质二, $\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc$

比较两式,证得

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

性质三说明把常数写成和式的特殊情况,它表示 n 个 c 之和。

性质四 $\sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$ (k 是常数)

证 $\sum_{i=1}^n ka_i = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n$

$$= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$= k \sum_{i=1}^n a_i$$

性质四说明和式中变量的系数可以移出,作为和式的系数。

性质五 $\sum_{i=1}^n (ka_i + c) = k \sum_{i=1}^n a_i + nc$ (k, c 是常数)

证 $\sum_{i=1}^n (ka_i + c) = \sum_{i=1}^n ka_i + \sum_{i=1}^n c$

$$= k \sum_{i=1}^n a_i + nc$$

性质五包括了前面的性质一、二、三、四。

性质六 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$

证 原式的左边对第一个和式记号下的标号变量 i 进行展开,

$$\text{左边} = \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj})$$

原式的右边对第二个和式记号下的标号变量 i 进行展开,

$$\text{右边} = \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj})$$

展开后的和式完全相同, 所以证得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

性质六说明双重和式中的两个和式记号, 可以交换次序。

性质七 $\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$

证 原式的左边是两个和式的乘积, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j &= \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

原式的右边是双重和式, 展开后,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j &= \sum_{i=1}^m a_i (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

可见左边等于右边, 即证得

$$\sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j$$

性质七说明两个标号变量不同的和式之积, 可以写成一个双重和式。

例 1 求 $\sum_{n=1}^{10} (3n+4)$ 的值。

解 根据和式性质,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} (3n+4) &= 3 \sum_{n=1}^{10} n + 10 \times 4 \\ &= 3 \times (1+2+\cdots+10) + 40 \\ &= 3 \times 55 + 40 = 205 \end{aligned}$$

例 2 展开 $\sum_{n=1}^5 (n+n^2)k$ (k 为常数)