第一章　信号分析与处理技术基础

在生产和科学试验中，常常需要了解被测对象的各种物理参数的大小和变化情况，反映研究对象的状态或运动特征的这些物理量称为信号。信号中的有用信息是人们认识客观事物内在规律、研究事物之间相互关系、预测事物发展趋势的依据。研究从信号中提取有用信息的方法和手段称为信号分析,它是现代测试系统的一个组成部分,也是设计测试系统的依据。本章主要介绍频谱分析、相关分析、功率谱分析和数字信号处理的基本概念与应用，介绍信号频带宽度的确定方法，为正确选用和设计动态测试仪器提供科学依据。

第一节　信号的分类及描述

一、信号的分类

一般信号都是随时间变化的时间函数,因此,可以根据信号随时间变化的规律将信号分为确定性信号和随机信号。

1.确定性信号

它是可以用精确的数学关系式来表达的信号，给定一个时间值就可以得到一个确定的相应函数值。确定性信号根据它的波形是否有规律地重复分为周期性信号和非周期性信号。

周期性信号是按一定周期 T 重复的信号。简谐信号是最简单的周期信号，任何周期信号都可以看作是简谐信号的合成。

非周期信号没有重复周期，非周期信号包括瞬态信号和准周期信号两类。

准周期信号是由有限个简谐信号合成的一种非周期信号。设信号 $x(t)$ 由两个简谐信号合成,即

$$x(t) = A\sin2t + B\sin(\sqrt{3}t + \theta)$$

两个简谐信号的角频率分别为 2 和 $\sqrt{3}$，它们的周期分别为 π 和 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$。由于两个周期没有最小公倍数,或者说由于两个角频率的比值为无理数，它们之间没有一个共同的基本周期，所以信号 $x(t)$是非周期的，但它又是由简谐信号合成的，故称之为准周期信号。

确定性信号也可以按照它的取值情况分为连续信号和离散信号。连续信号是指在某一时间间隔内，信号的幅值可以取连续范围内的任意数值，这样的连续时间函数所表示的信号就是连续信号，常见的信号大都属于这一类，如图 1-1 中 a)、b)、c)、d)、e)所示。离散信号的离散性可以表现在时间或幅值上，例如每天中午测量一次室温，则测量记录的温度信号就是离散信号，而经过测试系统量化后的温度信号就是在时间和幅值上都离散的信号，又称为数字信号。

2. 随机信号

不能用精确的数学关系式来表达，也无法确切地预测未来任何瞬间的精确值的信号，称为随机信号。对于随机信号虽然也可以建立某些数学模型进行分析和预测，但只能是在概率统计意义上的近似描述，这种数学模型称为统计模

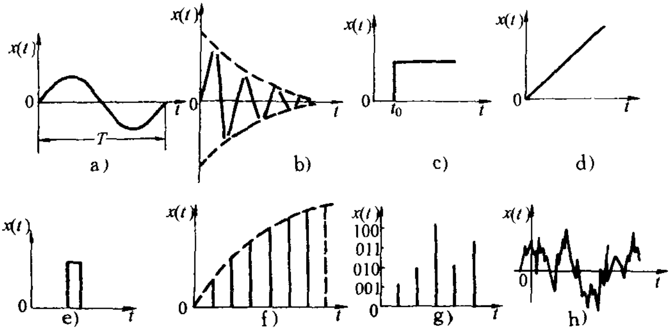


图 1-1 各种信号波形图

a)简谐信号；b)衰减振荡信号；c)阶跃信号；d)斜波信号；e)脉冲信号；f)时间离散信号；g)数字信号；h)随机信号

型。

确定性信号和随机信号之间并不是截然分开的，通常确定性信号也包含着一定的随机成分，而在一定的时间内，随机信号也会以某种确定的方式表现出来。判断一个信号是确定性的还是随机的，通常是以通过试验能否重复产生该信号为依据。如果一个试验重复多次，得到的信号相同（在试验误差范围内），则可认为是确定性信号，否则为随机信号。

二、信号的描述

任何一个信号都可以用时域和频域进行描述。表征信号的幅值随时间的变化规律称信号的时域描述；而频域描述是研究信号的频率结构，即组成信号的各频率分量的幅值及相位的信息，例如周期性方波可以看成是由一系列频率不同的正弦波叠加而成。

从时域图形中可以知道信号的周期、峰值和平均值等，可

以反映信号变化的快慢和波动情况。用时域描述的图形比较直观、形象，便于观察和记录。由频域描述的图形——频谱图中可以研究其频率结构。例如对振动信号进行频谱分析，可能从频谱图中看出该振动是由哪些不同的频率分量组成的，各频率分量所占的比例，以及哪些频率分量是主要的，从而找出振动源，以便排除或减小有害振动。

时域分析和频域分析是分析信号的两个方面，二者之间有着密切的关系并互为补充。例如信号重复周期的倒数就是基波频率，即 $1/T=f_0$；时域中脉冲信号的上升时间和脉宽决定了频域中组成脉冲信号的高频分量的多少，所以说时域描述和频域描述是一个信号在不同域中的两种表示方法。

第二节　周期信号的频谱

、周期信号的分解

正弦信号是简谐信号，而锯齿波、三角波、方波等都是非简谐信号。简谐信号是最简单的和最重要的周期信号。任意一个周期信号都可以用简谐信号来表达，两者之间联系的桥梁是傅里叶级数，所以傅里叶级数是周期信号分析的理论基础。

任何一个周期信号在满足狄里赫利条件时，都可以展开成傅里叶级数。

1.三角傅里叶级数

周期信号 $x(t)$ 的三角傅里叶级数表达式为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \qquad (1\text{-}1)$$

式中：ω_0——基波角　率，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，T 为信号周期；

a_0、a_n、b_n——傅里叶系数，n 为正整数。

傅里叶系数可由式(1-2)计算。

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos n\omega_0 t\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

a_b、b_n 可利用下列三角函数集的正交特性来求得

①　$$\int_0^{T_0} \sin nw_0 t \ \mathrm{d}t = 0$$

②　$$\int_0^{T_0} \cos nw_0 t \ \mathrm{d}t = 0$$

③　$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \sin nw_0 t \sin mw_0 t \ \mathrm{d}t &= 0 \ (m \neq n) \\ &= \frac{T_0}{2} \ (m = n)\end{aligned}$$

④　$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \cos nw_0 t \ \cos mw_0 t \ \mathrm{d}t &= 0 \ (m \neq n) \\ &= \frac{T_0}{2} \ (m = n)\end{aligned}$$

⑤　$$\int_0^{T_0} \sin nw_0 t \cos mw_0 t \ \mathrm{d}t = 0(\text{所有 } m , n)$$

上列各积分式的上下限可以取任意一个周期，既可取 $t_o \sim t_0 + T$(t_0是任一确定时刻)也可取 $-\dfrac{T}{2} \sim \dfrac{T}{2}$。

将式(1-1)中正弦、余弦项合并，可得

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \tag{1-3}$$

式中：

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi = \mathrm{tg}^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

式(1-1)和式(1-3)表明周期信号可以用一个常值分量 a_0 和无限多个谐波分量之和表示，其中 $A_1\cos(\omega_0 t - \varphi_1)$为一次谐波分量（或称基波）。基波的频率与信号的频率相同，高次谐波的频率为基频的整数倍。高次谐波又可分为奇次谐波(n 为奇数)和偶次谐波(n 为偶数）。这种把一个周期信号 $x(t)$分解为一个直流分量 a_0 和无数谐波分量之和的方法称为谐波分析法或傅里叶分析法。

2. 复数傅里叶级数

傅里叶级数也可以写成复指数函数形式。根据欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t \tag{1-4}$$

得

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

代入式(1-1)得

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{-j}{2}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})\right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}\right]$$

令

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

可得

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \tag{1-5}$$

如果把式(1-5)第三项中 n 值取为从 -1 到 $-\infty$,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0}$$

代入式(1-5)并合并各项则得

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \tag{1-6}$$

式(1-6)为傅里叶级数的复数形式。该式表明：周期信号可分解成无限多个指数分量之和。由欧拉公式可知，简谐信号可以用两项分别具有正负指数的项相加表示。因此，在复指数函数表示法中周期信号就由一组具有正负指数的函数组成。

将 a_n, b_n 代入式(1-6)中得

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{1-7}$$

C_n 称为复数傅里叶系数，它的模和相角表示 n 次谐波的振幅和相位,即

$$\left.\begin{aligned} |C_n| &= \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{A_n}{2} \\ \varphi_n &= \operatorname{arctg}\frac{-b_n}{a_n} \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

由于式(1-6)中谐波次数 n 值可正可负，因此势必会有 $(-\omega)$ 出现。这是因为从实数形式的傅里叶级数过渡到复数形式的傅里叶级数，用复数表示正弦和余弦，所以 $(-\omega)$ 完全

是由于用复数表示所引起的，无实际意义。

例 1-1：图 1-2所示方波的函数表达式为

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\dfrac{T}{2}\\ -1 & -\dfrac{T}{2}<t<0\end{cases}$$

试将其分解为傅里叶级数。

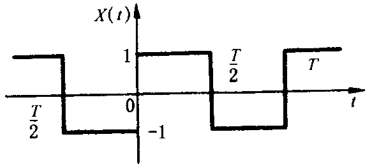


图 1-2 方波信号波形

解：因为函数波形对称原点,所以是一个奇函数,因而 $a_0=a_n=0$。

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$=2\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin n\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{T}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\cos n\omega_0 t\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{4}{n\pi} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\sin\omega_0 t+\frac{4}{3\pi}\sin 3\omega_0 t+\frac{4}{5\pi}\sin 5\omega_0 t+\cdots$$

$$=\frac{4}{\pi}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{3\pi}\cos\left(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{4}{5\pi}\cos\left(5\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)+\cdots \tag{1-9}$$

二、周期信号的频谱

由上述可知，利用傅里叶级数能确切地表达信号分解的结果，但不直观。为了既简单又明了地表示一个信号中包含

了哪些频率分量及各分量占的比例大小，通常用频谱图来表示。

以频率(或圆频率)为横坐标，幅值 A_n 或相角 φ_n 为纵坐标所作的图称为频谱图。频谱图通常包括幅频图（$A_n-\omega$ 图）、相频谱图（$\varphi_n-\omega$ 图）两部分，图 1-3 为周期性方波的频谱图。图中的线段称为谱线，每条谱线代表一个谐波分量。由于方波的偶次谐波幅值为零，所以图中只有奇次谐波。

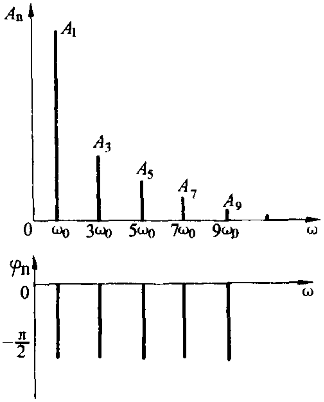


图 1-3　周期性方波频谱图

信号各谐波分量的相角 φ_n 与信号在时间轴上的位置有关。将信号沿时间轴移动将引起相角 φ_n 的变化，但各谐波分量相对角的差值不变。例如方波的各谐波相位角 φ_n 可以是零，也可能是 $\frac{\pi}{2}$ 或其它值，但它们的相位角相等，其相位谱由一组等高的谱线组成。

由频谱图可以看出周期信号的频谱具有如下几个特点：

(1)频谱是由不连续的谱线组成，每条谱线代表一个谐波分量，这种频谱称离散频谱。

(2)谱线之间的间隔等于基波频率 ω_0 的整数倍。即频谱中的每一条谱线只能出现在基波频率 ω_0 的整数倍上，各谐波的频率 $n\omega_0$ 都是基波频率的整数倍。

(3)工程中常见的周期信号，其谐波幅度总的趋势是随谐

波次数的增高而减小的。

从理论上讲，一个周期信号可以利用傅里叶级数分解成无穷多个或有限个谐波分量。但实际应用中不可能取无穷多项，只能取有限项近似地表示。这就不可避免地带来误差。例如，方波的傅里叶展开式为式(1-9)，图 1-4 为谐波项数的多少与方波近似的程度。图中阴影线部分为误差，可以看出谐波分量越多，叠加后的波形越接近实际信号的波形。

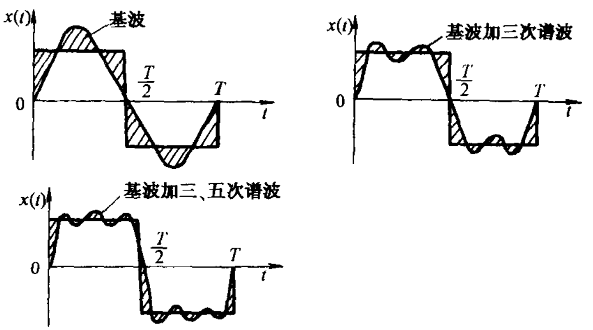


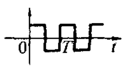
图 1-4　谐波项数与方波近似程度

因为谐波的幅度总趋势是随谐波次数的增高而减少的，信号的能量主要集中在低频分量，所以谐波次数过高的那些分量所占能量很少，高阶分量可忽略不计。那么应当取多少项合适呢？工程上提出了一个信号频带宽度的概念。信号频宽的大小与允许误差的大小有关，通常把频谱中幅值下降到最大幅值的 1/10 时所对应的频率作为信号的频宽，称为 1/10 法则。

信号的频宽也可以根据信号的时域波形粗略地确定。表 1-1 为常见周期信号的波形及其频带宽度。可以看出，对于有突跳的信号(如序号为 1、3 的波形)，其频带宽度较宽，可取

其基频的 10倍为频宽，对于无突跳的信号（如序号为 2、4 的波形），信号变化较缓，频宽较窄，可取基频的 3 倍为频宽。

常见周期信号的波形及其频宽表 1-1

序号	1	2	3	
波形				
频宽	$10\omega_c$	$3\omega_0$	$10\omega_0$	$3\omega_0$

在选择测量仪器时，测量仪器的工作频率范围必须大于被测信号的频宽，否则将会引起信号失真，造成较大的测量误差。因此，在设计或选用测试仪器前必须了解被测信号的频带宽度。

三、周期信号的强度

周期信号的强度用其峰值、均值、有效值和平均功率来表述，如图 1-5 所示。

1. 峰值

$$x_F = |x(t)|_{max} \tag{1-10}$$

即信号的最大瞬时值。

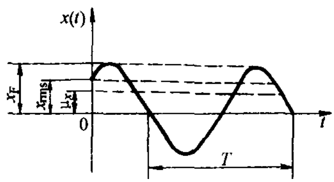


图 1-5 周期信号的强度表示

2. 均值

$$\mu_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

为信号的常值分量，表示信号的静态分量，反映了信号 $x(t)$ 在一个周期内的平均值。

3.有效值(或均方根值)

$$x_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

为信号的有效值(均方根值),它反映了信号的功率大小。

4.平均功率(或均方值)

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-13}$$

为信号的均方值,表示信号能量的大小,是信号强度方面的基本描述。

第三节 非周期信号的频谱

一、频谱密度函数

当周期信号的周期趋于无限大时，周期信号将演变成非周期信号。因此，非周期信号的频谱也可由周期信号的频谱导出。

如前所述,周期信号的指数函数表达式为式(1-6)。当周期 $T\rightarrow\infty$ 时, $n\omega_0\rightarrow\omega$, $\omega_0\rightarrow\Delta\omega$, $\Delta\omega$ 为无穷小量,即 $n\omega_0$ 的取值间隔为无穷小,所以 $n\omega_0$ 由离散量变成连续量,周期信号变为非周期信号。现用 ω 代替 $n\omega_0$,则式(1-6)可写成

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]e^{j\omega t}\Delta\omega$$

当 $T\rightarrow\infty$, $\Delta\omega\rightarrow\mathrm{d}\omega$, $\sum\rightarrow\int$,则有

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

将方括号中的部分用符号 $X(\omega)$表示,则有

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1-14}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1-15}$$

周期信号的频谱是离散的，谱线间的间隔为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。当信号周期趋于无限大时，周期信号就演变为非周期性信号；谱线间的间隔趋于无限小量 $d\omega$，非连续变量 $n\omega_0$ 变成连续变量 ω，T 用 $\frac{2\pi}{d\omega}$ 代替，求和运算变成求积分运算。

式(1-14)称为傅里叶变换(FF)，式(1-15)称为傅里叶反变换(FFT)，二者合称傅里叶变换对。傅里叶变换是将时域函数变换为频域函数。$X(\omega)$表示角频率为 ω 处的单位频带宽度内频率分量的幅值与相位，称为函数 $x(t)$的频谱密度函数(或简称频谱函数)。

频谱密度函数为复数，复数形式为

$$X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|X(\omega)|=\sqrt{X_R^2(\omega)+X_I^2(\omega)} \qquad \varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}$$

式中：$|X(\omega)|$——幅频谱函数；

$\varphi(\omega)$——相频谱函数；

$X_R(\omega)$、$X_I(\omega)$——分别为频谱密度函数的实部、虚部。

总之，非周期信号的频谱可由傅里叶变换得到，它是频率的连续函数，故频谱为连续谱。

例 1-2 求如图 1-6 所示矩形脉冲函数的频谱

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<\tau\\ 0 & |t|>\tau\end{cases}$$

解 根据傅里叶变换，其频谱函数为

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau}^{+\tau}e^{-j\omega t}dt$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]\Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}\right] = \frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{jw\tau} - e^{-jw\tau}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\omega\tau = 2\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}$$

其频谱函数的虚部为零，频谱函数为实函数，故相频谱为零，幅频谱图如图 1-7 所示。

当 $\omega = 0$ 时，$X(\omega)$取得最大值，即

$$X(0) = \lim_{\infty\to 0} 2\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} = 2\tau$$

当 $\omega = \frac{n\pi}{\tau}(n = 1,2,\cdots)$时，$X(\omega) = 0$。

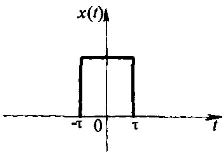


图 1-6 矩形脉冲函数

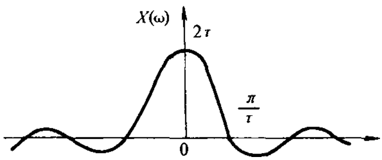


图 1-7 矩形脉冲频谱

由矩形单脉冲函数的频谱可以得出如下重要结论：

(1)如果脉冲宽度 τ 很大，信号的能量将大部分集中在 $\omega = 0$ 的附近[图 1-8a)]。

(2)当脉冲宽度不断增大，在极限情况下，$\tau\to\infty$，脉冲信号变成直流信号，频谱函数成为 $\omega = 0$ 的一条直线[图 1-8b)]。

(3)当脉冲宽度 τ 减少时，频谱中的高频分量增加，信号频带宽度增大[图 1-8c)]。

(4)对于无限窄的脉冲，即当 $\tau\to 0$ 时，频谱函数 $X(\omega)$变成一条平行于 ω 轴的直线，并扩展到全部频率范围，信号的

频带宽度趋于无限大[图 1-8d)]。这就是为什么可以采用冲击试验来代替正弦试验的原因。

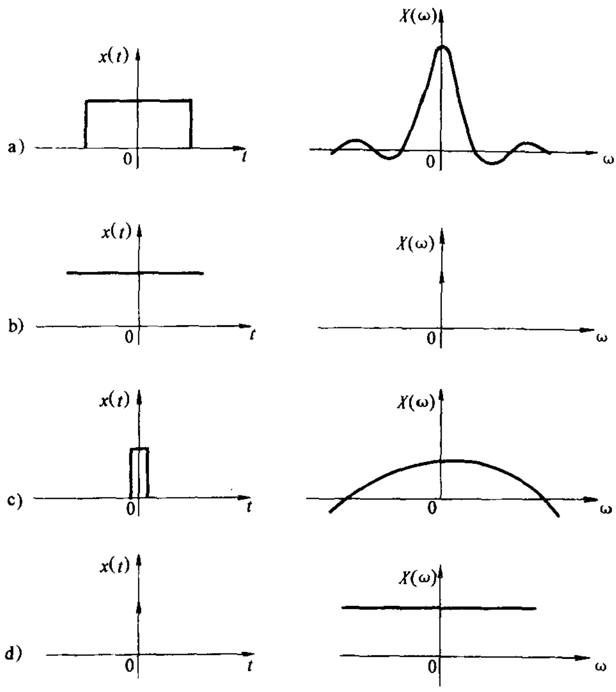


图 1-8　脉冲宽度与频谱的关系

对非周期信号来说，信号频宽可以取频谱图中第一次过零点的频率,如例 1-7所示的矩形脉冲函数,其频宽的角频率为$\frac{\pi}{\tau}$(rad/s),或 $1/2\tau$(Hz)。因此,在选择测量仪器时,如果被测信号是一个窄脉冲，那么测量仪器就必须有较宽的工作频率范围。

傅里叶变换的主要性质

傅里叶变换是信号分析的一种重要数学工具，为了进一步认识信号的时域描述与频率域描述之间的关系，下面将简单介绍一下傅里叶变换的主要性质。

1.线性叠加性

若 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的傅里叶变换分别为 $X_1(\omega),X_2(\omega)$，

则 $$a_1x_2(t)+a_2x_2(t)\xrightarrow{FT}a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

2.对称性

若 $x(t)\xrightarrow{FT}X(\omega)$

则 $$X(t)\xrightarrow{FT}2\pi x(-\omega)$$

对称性表明 若时域信号 $X(t)$与频谱函数 $X(\omega)$有相同波形,则 $X(t)$的频谱为$2\pi x(-\omega)$,它与 $x(t)$有相似的波形。

3.时延特性

若 $x(t)\xrightarrow{FT}X(\omega)$

则 $$x(t-t_0)\xrightarrow{FT}X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

时延特性表明：时域信号沿时间轴延迟时间 t_0,则在频域中乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$,即减小一个相位角 ωt_0,而幅频特性不变。

4.频移特性

若 $x(t)\xrightarrow{FT}X(\omega)$

则 $$x(t)e^{\pm jw_0t}\xrightarrow{FT}X(\omega\mp\omega_0)$$

频移特性表明：若时域信号 $x(t)$乘以因子 e^{jw_0t},则对应的频谱 $X(\omega)$将沿频率轴平移 ω_0。这种频率搬移过程,在电子技术中就是调幅过程。

例如 频移的频率左、右移 f_0 后，原函数将乘以 e^{+jw_0t}和

e^{-jw_0t}, w_0 为 $2\pi f_0$。如果有 $x(t) \rightleftharpoons X_{(f)}$,则有频率左移和频率右移：

$$x(t)e^{j2\pi f_0t} \rightleftharpoons X(f-f_0)$$

$$x(t)e^{-j2\pi f_0t} \rightleftharpoons X(f+f_0)$$

频率左、右移后将导致时间函数 $x(t)$与一余弦函数相乘,即

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t \rightleftharpoons [X(f-f_0)+X(f-f_0)]/2$$

$$x(t)\sin 2\pi f_0 t \rightleftharpoons [X(f-f_0)+X(f+f_0)]/2j$$

从频域角度看，调幅信号的频谱是原有信号 $x(t)$的频谱在频域中的位移。如果调制频率 f_0 选择过小,将导致频谱的混叠现象。

5. 时间尺度特性（或称比例特性）

若 $x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

则 $$x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

时间尺度特性表明：信号在时间域压缩 a 倍($a<1$)时，则在频域中频带加宽,幅值压缩 $1/a$ 倍；反之信号在时域扩展时($a>1$)，在频域中将引起频带变窄，但幅值增高。例如在处理低频信号时,利用磁带机慢录快放的方式,使时间尺度压缩,使频带展宽,以便提高分析仪器对低频信号的频率分辨率。由于频带加宽,要求后续处理设备的通频带相应增大,否则会造成失真。

第四节　随机信号

随机信号是不能用精确的数学关系式描述的信号，但它的变动服从统计规律，可以用概率统计特性来描述。对随机信号按时间历程所作的各次长时间观测记录称为样本函数，记作 $x_i(t)$。在同样条件下，互不相同的许多样本函数的集合