

第一章 绪 论

第一节 桥梁结构空间分析的必要性

随着我国交通事业和城市建设的迅速发展，新的桥梁结构形式不断涌现，工程技术人员在进行桥梁结构设计时，对结构的分析计算提出了更高的要求。从 20 世纪 70 年代开始，我国自行研制了面向桥梁结构设计实践的“桥梁综合计算程序”^[1,2,3]，它采用平面偏心梁元离散结构，考虑了桥梁结构的施工过程和荷载情况，通用性强，自动化程度高，在桥梁结构设计中发挥了重要作用。但是，由于它采用平面杆系内力分析模块，在一些新的桥式应用上存在很大的局限性。

例如，在城市桥梁建设中，由于道路线形限制，同时追求结构美观，桥梁上部结构的选型已日益采用箱形截面连续梁结构，出现了许多宽箱梁桥（宽度大于跨度）、斜交梁桥及弯梁桥。这些桥型的内力分析方法与传统的 T 梁桥分析方法有很大不同。如何合理确定结构的支承体系、支座位置设置及偏心调整、活载内力、偏载对结构受力的影响等问题常使设计工程师感到无所适从，而急待解决^[4,5]。

又如设计单拱面预应力混凝土系杆拱桥或钢管拱桥时，必须知道使用荷载作用下纵梁内力、横梁内力、支座反力的大小，以及拱的面内、面外稳定承载力、拱肋间横撑的数量及刚度等力学参数。应用平面分析方法及程序仅能计算出总的支座反力，而不能计算出单个支座反力大小；仅能计算出纵梁内力而无法得到横梁内力；仅能给出拱肋的使用阶段内力而无法计算拱肋的面内、面外

稳定极限承载力，从而导致了结构设计上的许多困难^[7,8]。

再如设计斜拉桥结构时，设计工程师除必须知道使用荷载作用下纵梁内力、横梁内力、支座反力的大小外，还应考虑施工过程中由于拉索力的不均匀对横梁产生的影响，成桥后换索时桥梁的通行情况等。应用平面分析方法及程序计算这些情况下的受力不能得到满意的解答，必须通过空间分析计算才能解决。

复杂结构空间内力计算方法及程序，国内外已有过一定的研究。如可以借助 SAP 系列、ADINA、ANSYS 系列分析程序对某一特定结构进行力学分析，但这些程序很难模拟桥梁结构在施工阶段及成桥阶段的工作情况。例如，结构体系转换，预应力损失、预应力及徐变引起的次内力、活载的影响面加载等；同时，这些分析程序计算的结果文件庞大，整理起来十分麻烦，不便于桥梁设计人员采用^[9,10]。

在我国目前进行基础设施建设中，迫切需要在国内外已有的研究成果基础上形成一套较为通用又便于工程技术人员使用的桥梁结构空间分析方法及设计程序^[11,12,13,14] 提出复杂桥梁结构设计的一般性原则和规定，作为桥梁设计规范的补充和完善。鉴于此，我们针对桥梁结构设计中存在的以上问题，在长期教学、科研及生产实践的基础上，开发了一套桥梁结构空间内力分析与设计程序，并在实际生产中得到了应用。为了验证分析程序的正确性，专题组进行了模型试验及现场桥梁试验，进行的主要试验有：2 个 12m 长，3.4m 宽的单拱面预应力混凝土箱拱组合体系桥模型试验；1 个 12m 长，1.2m 宽的两跨混凝土斜拉桥模型试验；1 个按 1:3 比例缩尺的混凝土斜拉桥节段模型试验；1 个按 1:6 比例缩尺的钢-混凝土组合桥面无背索斜拉桥塔柱梁节段模型试验；2 座人行钢斜拉桥实桥试验；1 座独塔混凝土斜拉桥实桥试验。弹性阶段及破坏阶段的理论分析结果均与试验结果吻合很好，证明了分析方法及程序的正确性及可靠性。

本书的主要目的是应现场工程师们的要求介绍我们近年来在桥梁复杂结构内力分析与设计应用中的研究成果。主要内容包

括：桥梁复杂结构空间分析与设计程序的基本原理；将桥梁复杂结构离散为力学模型及应用力学原理解决桥梁结构实际问题的基本方法。例如：桥梁结构施工过程的模拟，结构体系转换内力及位移计算，预应力张拉过程及内力计算，预应力损失计算，徐变及收缩次内力的计算，活载影响面加载，斜拉桥或系杆拱桥索力调整与控制，结构弹性失稳临界荷载及结构弹塑性失稳极限承载力分析计算。本书内容为桥梁结构工程师提供一套较为完整的处理桥梁复杂结构整体分析与设计的方法及手段，从而在理论与桥梁实际应用之间架起一座桥梁，使设计工程师能像处理平面问题一样处理空间问题。至于结构细节处理及构造原理，如结构的截面尺寸拟定、配筋计算、节点及受力复杂部位的处理等问题作者将另辟专著论述。

第二节 桥梁结构弹性空间内力分析方法简介

利用有限元法分析桥梁结构内力时，有多种离散模型，常用的有空间梁单元法、板壳元法、三维实体元法及较为实用的梁格法，如图 1-1。

一、空间梁单元法

空间梁单元法用一维空间梁元对结构进行离散。这种方法的特点是能直接给出计算截面的内力和变形。根据结构受载后截面是否保持平截面，可区分为自由扭转理论和翘曲扭转理论两种。

空间梁单元法按自由扭转理论分析的基本假定为：

1. 横截面尺寸与跨度相比很小，即可将实际结构视作位于剪切中心上的弹性梁元；
2. 平截面假定，即变形前的平截面变形后仍保持平截面；
3. 刚性截面假定，即变形后梁截面周边形状不变（无畸变）；
4. 截面剪切中心线与梁截面形心轴线相重合。

翘曲扭转理论考虑了受载后横截面不再保持平截面即发生了

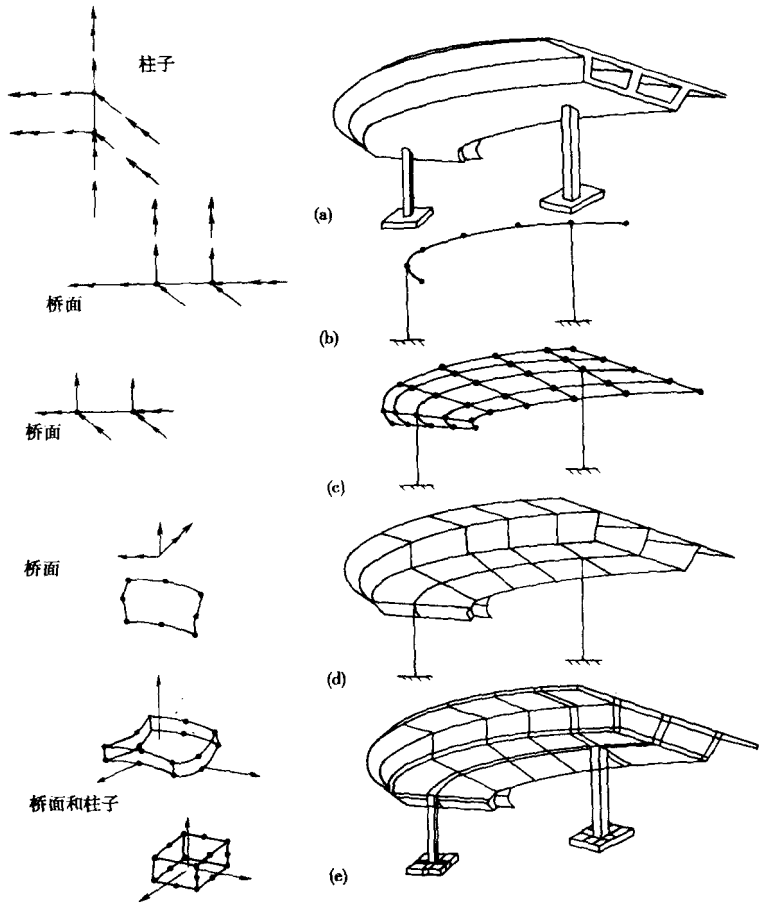
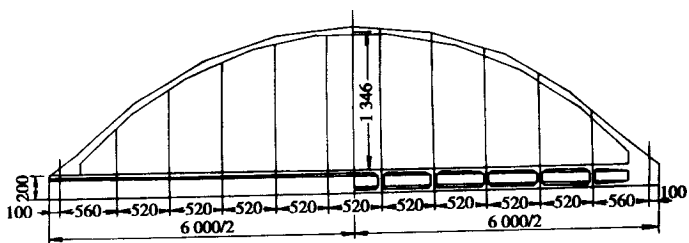


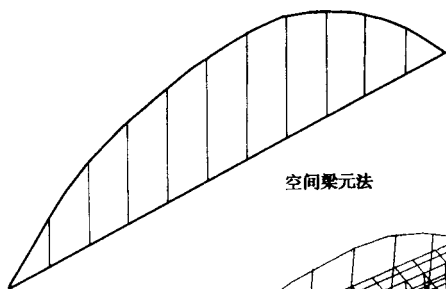
图 1-1 桥梁结构离散方法

翘曲，增加了截面双力矩阵和翘曲扭矩两项内力。

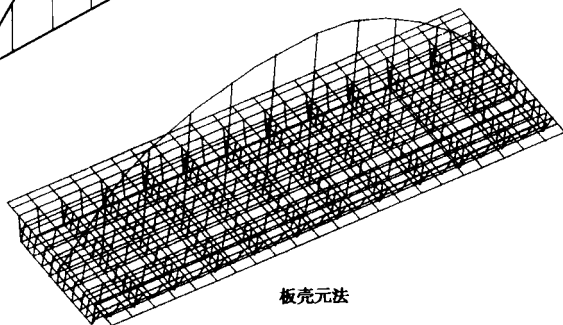
对于混凝土桥梁结构，理论计算和试验均证明，截面翘曲引起的正应力与按自由扭转理论所得应力值相比很小，通常误差不超过 5%~10%^[8,13]，一般按自由扭转理论进行分析便可以满足设计要求但对于钢箱梁，则必须考虑用翘曲扭转梁进行梁单元的离散^[14]。图 1-2 为一孔 60m 跨单拱面预应力混凝土箱拱组合体



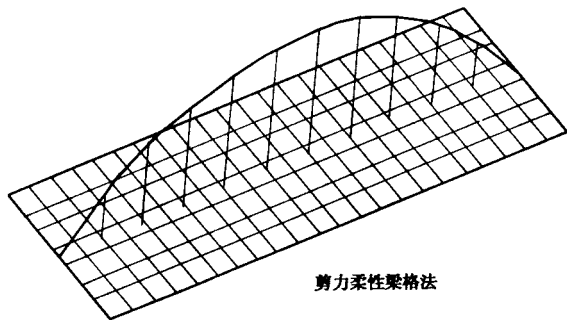
结构原型



空间梁元法



板壳元法



剪力柔性梁格法

图 1-2 箱拱组合体系桥梁计算图式

系桥的空间杆系离散图。位移计算结果见图 1-3。由空间梁单元法的离散图式及其基本假定可知，宽箱梁桥分析时，用空间梁单元法有很大的局限性。首先，宽梁桥不满足基本假定 1 及 3；其次，该方法不能得到横梁内力。图 1-2 中对组合体系桥的分析也表明用平面梁单元离散结构，仅能得到系梁、拱、吊杆内力，而无法得到横梁的内力。空间梁元的基本原理及公式这里不再赘述。可参见有关力学专著^[15,16]。

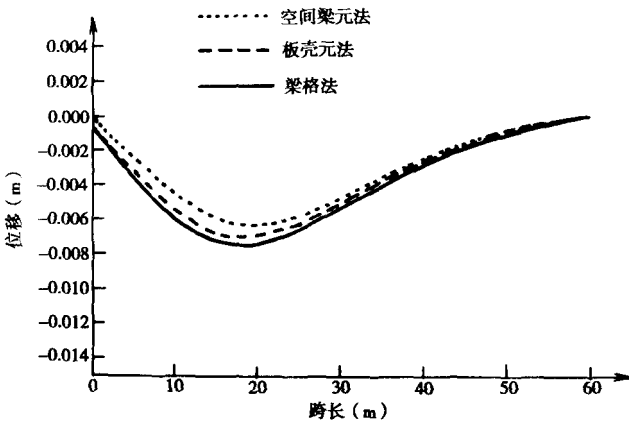


图 1-3 变位计算结果

二、板壳元法

众所周知，有限元法是把原型的连续体分割成许多细小的单元，在称为节点的离散点处连续起来分析复杂结构的方法。由于结构划分为简单单元的基本原理可以应用到所有形状的复杂结构上，理论上讲，它可以分析任何复杂形状的结构。钢筋混凝土桥梁通常做成空间箱形结构，采用板、壳单元进行离散，当板壳单元相当细密时，可以包括桥梁结构的各种受力行为，如弯曲变形、扭转变形和局部变形。图 1-2 为一孔 60m 跨单拱面预应力混凝土箱拱组合结构的空间板壳元离散图。其位移分析结果见图 1-3。

由图 1-3 知，用板壳元法与空间梁元法相比，变位基本一致。

虽然板壳元法是分析桥梁上部结构最通用的一种方法，但在实际应用时，它需要整理大量的输入、输出数据，容易出错，对计算结果作出正确评价及对结构受力行为进行解释都感到非常困难，给不出与现行设计规范有直接联系的内力结果，不便于工程技术人员使用。此外，板壳元法分析对有些结构也不是十分有效，如对混凝土箱梁桥，一般用板壳元法模拟结构顶、底板误差不大，而横梁尺寸一般比顶、底板大得多，用板壳元法模拟其受力，误差较大。由于桥梁结构施工过程复杂，又承受汽车或列车活载作用，用此法求各种工况下的最不利情况，计算工作量巨大，在应用上受到很大限制。因此，对桥梁结构分析应寻求一种实用、简便、有效的方法。

三、梁格法

梁桥法是分析桥梁上部结构比较实用有效的空间分析方法。它具有基本概念清晰、易于理解和使用等特点，因此在桥梁结构分析中得到了广泛的采用^[17,18,19,20]。梁格法的特点是用等效梁格来代替桥梁上部结构，分析梁格的受力状态就可得实桥受力状态。它不仅适用板式、梁板式及箱梁截面的上部结构，而且对分析弯、斜梁桥特别有效。图 1-2 为 60m 跨单拱面预应力混凝土箱梁组合结构的离散图。图 1-3 列出了梁格法分析结果。由图可见，梁格法与板壳元法计算结果非常接近。由于采用了纵向梁格和横向梁格，因此特别适合宽梁桥及系杆拱桥，纵向梁格代表结构纵向内力，横向梁格代表结构横向内力。

四、三维实体元法

桥梁结构设计过程中，对受力复杂部位有时需要知道结构的局部应力状态，以进行结构的合理配筋设计，如桥梁结构承台、斜拉桥塔柱及主梁锚固区段、系杆拱桥拱梁连接节点、梁桥梁端牛腿等。对此类结构的局部分析可以从整体结构中取出隔离体，按整体分析得到的隔离体截面内力或位移条件作为隔离体边界条件，采用三维实体元进行子结构分析。实体元可以采用四面体或六面

体单元。

从整体结构中取出隔离体进行局部分析时，隔离体的大小、内力、位移边界条件等因素对分析结果影响很大，这部分内容作者将作为专题研究，在本书以后的章节中不做详细探讨。

综上所述，复杂桥梁结构的空间分析方法应根据桥梁结构形式及不同设计阶段的设计深度进行选择。一般说来，对于宽跨比较小桥梁结构，可以采用空间梁单元法进行分析；对宽跨比较大的宽桥应采用板壳元法或梁格法分析。因梁格法比板壳元法在实际应用上更为有效，一般采用梁格法进行分析，作为结构设计整体控制。随着设计的深入，对一些受力特别复杂的区域，可进行三维实体元分析，以解决复杂部位的配筋设计等问题。

第三节 桥梁结构空间稳定承载力分析

一、现状及存在问题

目前我国《铁路桥涵设计规范》及公路桥梁的《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTJ 023—85)、《公路桥涵钢结构及木结构设计规范》(JTJ 025—86)中，桥梁结构内力分析仍采用线弹性小变形假设，截面配筋设计采用弹性或弹塑性方法；对于压弯构件如拱桥的拱肋、斜拉桥的塔柱等应进行考虑几何非线性的临界荷载分析，检算结构的弹性稳定安全系数。

众多研究结果表明，弹塑性稳定极限承载力比仅考虑几何非线性的临界承载力小得多。如拱桥的稳定计算自 19 世纪以来，经过国内外学者的大量研究，已从经典的弹性理论分支点失稳逐步过渡到压溃理论的极值点失稳。近年来，随着国内几座大跨度拱桥的兴建，拱肋的稳定极限承载力分析又取得了一些新的进展^[21,22,23,24,25]。由于拱肋钢筋混凝土截面受拉区开裂，所以在进行考虑几何非线性与材料非线性的弹塑性分析时，主要难点表现在单元弹塑性刚度矩阵的建立上。以往对拱肋的弹塑性分析大都

仅作面内稳定性分析及单拱（裸拱）分析，对体系较为复杂的系杆拱桥的空间稳定计算多基于弹性理论的解析法。基于梁拱共同作用，考虑几何非线性和材料非线性的空间稳定极限承载力理论研究国内外还不多见。

二、公路‘桥规’中有关桥梁结构稳定计算的规定

公路“桥规”中规定：对于拱肋宽跨比小于 $1/20$ 的拱桥必须进行施工及成桥阶段拱的面内、面外稳定承载力验算，对于大跨度拱桥和无支架施工的拱桥，规定拱肋失稳临界水平推力 H_{cr} 与拱桥弹性阶段最大水平推力 H 之比 $H_{cr}/H = k \geq 4.5 \sim 5$ 以保证结构的安全。《公路斜拉桥设计规范（试行）》也规定应对索塔和主梁进行稳定性分析，结构稳定安全系数应大于 4。在计算临界荷载时，可计入拉索弹性扶正力因素的影响。

但众多研究结果表明，钢结构或钢筋混凝土结构失稳为极值点失稳，弹塑性稳定极限承载力比仅考虑几何非线性的临界力小得多，因此，上述规范规定存在严重不足，有时导致桥梁结构设计具有很大的盲目性。特别是对于系杆拱桥这种组合体系桥梁，由于吊杆、系梁、拱肋的共同作用。在设计时如何确定面内、面外稳定安全系数值，公路桥规中至今还没有条款。因此，在进行该种桥型设计时，迫切需要一种能同时考虑几何非线性及材料非线性分析的专用程序，对拱进行空间稳定承载力计算。鉴于此，我们基于有限变形理论，建立了单拱面预应力混凝土箱拱组合体系桥及斜拉桥空间稳定性分析模型，采用单元节点截面内力塑性系数法计算弹塑性刚度矩阵，并编制了相应的分析程序。模型试验结果验证了本文分析方法的正确性。

第四节 桥梁结构空间动力分析

我国是一个地震多发的国家，抗震设计是桥梁结构设计过程的一个重要组成部分。桥梁结构设计是否能满足抗震要求，很大

程度上取决于设计工程师对结构体系的选择。无论是简支梁、连续梁，或其他组合体系桥梁，在结构动力分析计算时都应与墩台、支座形式一起考虑，不能将结构体系支解开分别对待。上部结构设计时，伸缩缝的位置与数量的确定除考虑温度效应、徐变、收缩外，还应考虑地震作用的影响。

桥梁结构在正常使用时，由于车辆或行人通过，特别是人行桥，极易引起桥梁结构的振动，设计时必须考虑车辆或行人的感知度，即舒适度指标。

为此，本书作者在桥梁结构空间分析与设计程序中建立了动力特性及地震响应分析模块，以弹性理论为基础，进行桥梁结构的地震反应谱分析及时程响应分析，结合桥梁振动响应分析，提出了人行桥梁的振动响应判别标准。

第五节 桥梁结构空间分析设计程序功能简介

程序以空间剪力柔性梁格法为基础，建立了空间箱梁柔性梁格单元、T形梁格单元、空间偏心梁单元、索单元、桁架杆元、钢管混凝土单元、钢-混凝土组合截面单元七种桥梁结构中常用的单元模式。程序由内力分析、影响面加载、截面应力计算与配筋、非线性空间稳定分析、动力特性及地震响应分析五个主要模块组成。

一、内力分析模块

内力分析模块可根据实际桥梁结构体系的特点，采用上述单元库中相应单元对结构进行离散及内力分析。如箱梁结构一般采用空间剪力柔性梁格对桥面结构进行离散，该方法的基本思路是将桥面结构离散为空间剪力柔性梁格，在外荷载作用下使离散后的分析模型与实际结构产生的变位与挠曲相同。为了设计实用，将空间内力分析结果进行处理，便可得到纵梁、横梁、拱、塔、索截面的内力 N_x 、 Q_y 、 Q_z 、 M_x 、 M_y 、 M_z ，从而进行各阶段的应力检算及配筋设计。内力分析模块具有以下功能：

1. 恒载内力计算；
2. 按“桥规”规定进行温度内力计算；
3. 纵、横向预应力次内力计算；
4. 体系转换徐变次内力计算；
5. 支座沉降或指定位移内力计算；
6. 跨间集中力及均布荷载内力计算；
7. 节点集中力作用下内力计算；
8. 离心力的计算；
9. 系杆拱桥吊杆或斜拉桥拉索张拉过程计算；
10. 弯梁桥支座偏心的设置计算。

二、影响面加载模块

平面结构内力分析程序中，活载作用下结构最不利内力计算均采用影响线概念。对系杆拱桥、弯梁桥等采用平面分析方法无法得到横梁内力及单个支座反力的最不利情况，而支座位置设置不当，对结构内力有较大影响。为此，本程序采用空间影响面加载求解最不利情况，首先由内力分析模块求得空间影响面，用动态规划法进行影响面加载。程序中可考虑人群活载、汽车活载、挂车活载及自定义特种活载等，计算时程序还考虑了人行道、分车道、行车方向、车道数设置等情况的影响。

三、截面应力计算及配筋模块

根据现行公路桥规，进行了正常使用极限状态及承载能力极限状态内力组合。

（一）RC 结构

1. 按承载能力极限状态对结构各截面进行配筋及强度检算，包括：

- 抗弯钢筋估算及强度复核；
- 抗剪钢筋估算及强度复核；
- 抗扭钢筋估算及强度复核。

2. 按正常使用极限状态进行裂缝及变形检算。

(二) PC 结构

1. 首先根据使用阶段内力最不利组合，按公路桥规正常使用极限状态要求进行预应力钢筋的估索与配筋；

2. 按承载能力极限状态进行抗弯、抗剪、抗扭强度复核与配筋。

程序可对各施工阶段进行应力检算并给出相应阶段配筋调整结果，程序具有自动调整配筋功能，以满足设计规范要求。

四、稳定性分析模块

系杆拱桥拱肋、斜拉桥塔柱及主梁、双肢薄壁刚构的立柱等均为受压受弯构件，其面内、面外稳定性是设计中必须考虑的重要问题，尤其是单拱面系杆拱或敞口式系杆拱，面外稳定性分析特别重要。而现行公路桥规对系杆拱面内、面外稳定安全系数均未作具体规定，所以给工程结构设计带来一定困难。为此，本程序根据有限变形理论，编制了考虑空间结构几何非线性及材料非线性的分格程序。目前，该程序有以下功能：

1. 对钢筋混凝土结构，如：混凝土拱肋、混凝土塔柱，可以进行弹性及弹塑性稳定分析；

2. 对钢管拱等组合截面结构，进行弹性稳定分析。

为了验证分析方法及程序的正确性，专题组进行了两个 12m 长、3.4m 宽的单拱面预应力混凝土系杆拱桥破坏试验。试验结果表明，弹性阶段及破坏阶段理论分析结果与试验结果吻合很好，验证了程序的正确性及可靠性。

五、动力特性及地震响应分析模块

该模块主要有下列功能：

1. 结构体系动力特性分析；

2. 地震响应的反应谱理论分析；

3. 地震响应的时程分析；

4. 人行天桥的舒适度指标计算。

参 考 文 献

- [1] 陆楸等桥梁结构电算.北京:人民交通出版社,1983.
- [2] 钢筋混凝土及预应力混凝土桥综合设计程序.铁道部大桥工程局设计院,1986.
- [3] 超静定混凝土桥梁设计分析程序.长沙铁道学院桥梁教研室,1992.
- [4] 彭思、李丽君.单拱面系杆拱桥设计总结[科研报告].广州:广东省建筑设计研究院,1992.
- [5] 梅尧坤、李丽君.单拱面预应力混凝土系杆拱桥设计.桥梁建设,1995,3.
- [6] 戴公连.城市宽桥计算的梁格法.[科研报告].长沙:长沙铁道学院,1996.
- [7] 吴西伦.弯梁桥设计.北京:人民交通出版社,1990.
- [8] 邵容光.混凝土弯梁桥.北京:人民交通出版社,1992.
- [9] SAPV 线性静动力结构分析程序学习班讲义.[学术报告].郑州,1980.
- [10] ADINA 线性与非线性连续体有限元分析.[翻译资料].郑州:郑州机械研究所,1982.
- [11] 李惠生、张罗溪.预应力混凝土曲线梁.北京:中国铁道出版社,1996.
- [12] 孙广华.曲线梁桥计算.北京:人民交通出版社,1995.
- [13] 黄剑源.考虑翘曲作用的曲线格子梁理论及应用.土木工程学报,1987.3.
- [14] 青岛铁港头立交桥预应力混凝土弯梁桥.现代预应力混凝土工程实践与应用.北京:中国建筑工业出版社,1989.
- [15] 王勖成、邵敏.有限元法基本原理与数值方法.北京:清

华大学出版社,1996.

- [16] Bathe K. J. Finite Element Procedure in Engineering Analysis
New York:1982.
- [17] 预应力混凝土三跨连续空心板弯桥的研究. 国外公路,
1986.
- [18] 预应力梁整体式桥. 国外公路 1992.
- [19] Cable Stayed Bridge.1990.
- [20] Concrete Slab.1982.
- [21] 罗韧,钢筋混凝土肋拱面外极限载力,重庆交通学院学
报,1987.2.
- [22] 赵雷,大跨度钢筋混凝土拱桥施工阶段稳定性.西南交
通大学学报,1994.
- [23] 袁雪戡,宜宾南门金沙江桥的弹塑性稳定分析.中国公
路学报,1993.1.
- [24] 钱莲萍、项海帆,系杆拱桥结构侧倾稳定性的实用计算,
同济大学学报 1989.
- [25] 李志能,钢管混凝土系杆拱桥设计及施工的几点看法,
公路,1995.4.
- [26] 戴公连、李德建,单拱面预应力混凝土系杆拱桥结构空
间分析方法与设计程序,长沙铁道学院,1996.5.
- [27] 戴公连、王俭槐等,单拱面预应力混凝土系杆拱桥模型
试验及分析,长沙铁道学院,1996.5.

第二章 桥梁结构空间分析的梁格法

第一节 梁格法的基本原理

梁格法是借助计算机分析桥梁上部结构的一种有效实用方法。它易于理解和使用，在桥梁结构设计中得到了广泛的应用^[1,2,3]。它适用于板式、梁板式、箱梁上部结构及各种组合体系桥梁。

梁格法的主要思路是将上部结构用一个等效梁格来模拟，如图 2-1 将分散在板式或箱梁每一区段内的弯曲刚度和抗扭刚度

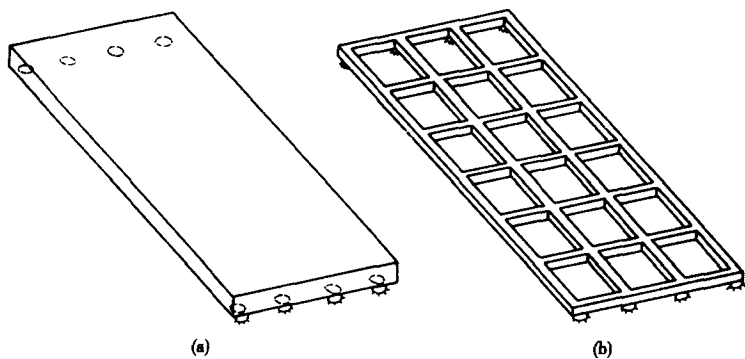


图 2-1 梁格分析法

(a)实际结构 (b)等效梁格

集中于最邻近的等效梁格内，实际结构的纵向刚度集中于纵向梁格构件内，而横向刚度则集中于横向梁格构件内。从理论上讲，梁格必须满足以下等效原则：当原型实际结构和对应的等效梁格承受相同荷载时，两者的挠曲应是恒等的，而且在任一梁格内的弯

矩、剪力和扭矩应等于该梁格所代表的实际结构部分的内力。由于实际结构和梁格体系有着不同的结构特性，上述“等效”的理想状况是难以达到的，模拟只能是近似的。这种特性表现在以下方面：

1. 梁格法中任意梁内的弯矩严格与其曲率成正比，而在原结构如板结构中，任一方向上的弯矩和该方向和正交方向上的曲率有关。对钢筋混凝土构件或预应力混凝土构件而言，一般按纵向、横向双向配筋，同时混凝土泊松比较小（ $\mu = -0.15 \sim 0.16$ ）所以用梁格法导出的纵向弯矩和横向弯矩对结构设计是足够精确的^[2,3]。

2. 实际板结构中，任一单元的平衡要求扭矩在正交方向上是相等的，而且扭率在正交方向上也是相同的。在等效梁格中，由于两类结构特性不同，无法使扭矩和扭率在正交方向的节点上相等，然而梁格网格相当细密时，梁格随着挠曲而成一曲面，在正交方向上可近似相等。

第二节 板式上部结构

当桥梁跨度较小时，可以用板结构作为承重结构。若为组合体系桥梁，例如系杆拱桥、板式截面斜拉桥等，板式截面也可作为纵梁，通过拱梁、吊杆或塔梁拉索组成传力体系。在分析这类结构时采用梁格法离散桥面结构 用梁单元离散拱肋、塔柱 用杆单元离散吊杆、拉索。

一、薄板结构的基本方程^[4]

（一）力的平衡

对于任一单元，在外力作用下截面应力状态可以通过一组力偶及垂直于中面的剪力表示。图 2-2(a)、(b) 为在外载荷 $q = q(x, y)$ 作用下的板单元受力图。剪力 Q_x 、 Q_y 、 Q_z 与弯矩 M_x 、 M_y 、 M_{xy} ，均为单位宽度内的力，为了说明方便，将其分别表示为图 2-2

(a) (b), 其实它们是作用在同一单元上的力。图 2-2(a)为单位长度弯矩 图 2-2(b)单位长度剪力。

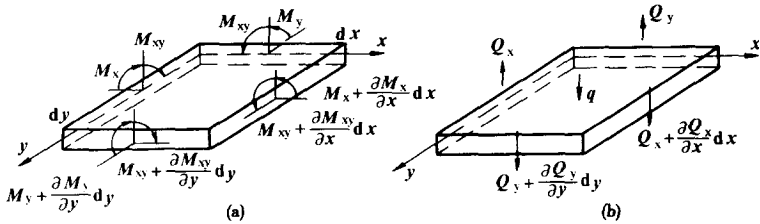


图 2-2 在外载荷 q 作用下的板单元受力图

(a)单位长度弯矩 (b)单位长度剪力

根据 z 轴方向上力的平衡及对 x 、 y 轴取矩, 可列出方程式:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (2-2-1)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2-2-2)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2-2-3)$$

由以上方程可知, 板的平衡方程与单根梁的方程有明显差别, 剪力不再是弯矩的简单微分。在梁格分析中弯曲和扭转引起的剪力可表示为:

$$Q_{Mx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad Q_{Tx} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2-2-4)$$

于是
$$Q_x = Q_{Mx} + Q_{Tx} \quad (2-2-5)$$

(二) 弯矩—曲率方程

根据板弯曲的基本假设, 弯曲前的平截面弯曲后仍保持平截面且与中面垂直, 于是横向位移 u 、 v 与竖向位移 w 的关系有:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-2-6)$$

如图 2-3 所示, 从而可知: