桥梁结构计算力学

洪锦如　编著

同济大学出版社

内容提要

全书分三大部分，共十二章。第一部分为桥梁结构涉及的有限元分析；第二部分为结构动力分析，论述动力问题的振型分析和各种直接积分方法；第三部分为结构的优化设计。

本书可作桥梁、土建、机械工程有关专业研究生教材，还可作相关专业本科生、工程技术人员参考用书。

责任编辑　许纪森
封面设计　李志云

桥梁结构计算力学
洪锦如　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
常熟市文化照相制版彩印厂印刷
开本:850×1168　1/32　印张:13.875　字数390千字
1998年3月第1次出版　1998年3月第1次印刷
印数1－1500　定价:11.60元
ISBN7－5608－1851－X/TU·241

前　言

本书是在作者近几年讲授研究生课程基础上编写而成的。

全书分三部分共十二章。第一部分是关于桥梁结构涉及的有限元分析，包括能量原理和有限元法的基本原理、杆件结构有限元、平面问题有限元、板壳有限元、材料非线性和几何非线性问题的有限元法以及结构稳定性问题。第二部分是结构动力分析，讲述了动力问题的振型分析法和各种直接积分方法，第七章比较系统地论述了特征值问题的各种数值解法。第三部分为结构的优化设计，详细论述了结构优化设计的基本概念、线性规划问题、单变量问题的无约束极值、无约束优化问题的解法和有约束优化问题的解法。

本教材着重基本概念、原理和方法的阐述，并通过一定数量的例题和应用例子加以说明。每章之后均有习题，可供教学过程中和自学读者选用，裨能通过具体的运算和练习加深对书中内容的理解和掌握。配合所述内容，还附有部分计算机程序。书中包括了部分动力分析程序和特征值计算程序。在结构优化部分提供了一维搜索的基本算法，求无约束极值问题的各种解法以及求约束极值问题的罚函数法的程序，此外，还提供了线性规划问题的单纯形法的计算程序。

本书可以作为桥梁工程、土建结构、机械工程等有关专业的研究生教材和有关专业的大学本科生、研究生的学习参考书，也可供教师、工程技术人员作参考之用。

同济大学　洪锦如

1996年10月于上海

目　录

第一部分　桥梁结构的有限元方法

第三部分　结构优化设计方法

第一部分　桥梁结构的有限元方法

第一章　有限元法原理

1.1　概　述

有限元法是解结构和连续介质力学问题的一种近似方法,它也可以被用来解其他类型的场问题。有限元法将一个区域分割成有限个数目的不重叠的称作单元的子域 V_n。首先设定每个单元内的一个近似解,并用有限数目的未知参数来描述单元的行为特性,然后将各单元的关系式集合成方程组,解方程组求出这些未知参数。如果将区域划分成很细的网格,当单元的尺寸变得越来越小时,场变量离散化的误差消失,就可以得到精确解。有限元法中每个单元有有限个节点,节点可以在单元的边界上或在单元的内部,上面所说的单元的未知参数通常是场变量在节点上的值,单元内的近似解可以根据节点值内插函数得到。对于力学问题来说,如果以位移作为基本未知量,则单元的未知参数是节点位移值,由节点位移可确定单元内的近似位移函数。然后建立节点力与节点位移之间关系的刚度矩阵,并确定对于各种荷载情况下的等效节点荷载,根据单元之间通过节点的连接情况集合成总体平衡方程。从代数方程组解出位移,就得到了近似解。根据单元的节点位移可以求得单元的变形和内力。

有限元法是在 50 年代中期作为结构分析的矩阵法的推广应

用到固体力学中。结构分析的矩阵法是分析含有大量构件的结构的系统的分析方法。这些结构的构件是简单的受拉、压的杆件,受弯曲或者扭转的梁,它们在有限个数的节点上相连接。结构矩阵法的基本思想就是利用在各个结构构件节点上的位移和内力的关系,列出方程组,可以以节点位移或节点内力作为未知数,有时也可以以节点位移和内力混合作为未知数。根据所采用的未知数的不同,矩阵分析法可以区分为位移法、力法或混合法。对离散的结构系统写出方程对于具备结构力学知识的人是熟悉的,采用矩阵符号推导和掌握这些方程是最方便的,而大型代数方程组的求解可以交给计算机去完成。

特纳(Turner)等人在1956年采用三角形和矩形单元把矩阵位移法推广到平面应力问题,用来作飞机的结构分析。将求解的区域划分为三角形和矩形单元的集合之后,以节点位移作为基本未知量,每一个单元的行为用单元刚度矩阵表示,它把单元节点上的力和节点位移联系起来。传统的结构矩阵分析中结构构件节点力和节点位移之间的关系是精确导出的,而在有限元法中是根据单元内近似的位移函数导出的。

在建立有限元的公式时,有三种途径,一是直接刚度法;二是基于求泛函极小值的变分法或能量原理;三是加权残数法。

直接刚度法可用于比较简单的问题。用变分法建立有限元公式时,是把力学问题的求解归结为求泛函极值的问题,如利用最小势能原理或最小余能原理。里兹法是解这类问题的有力工具,它用一组满足一定条件的函数的线性组合作为问题的近似解,通过泛函取极小值的平稳性条件确定各系数。通常的里兹法中假定的函数必须在整个域上是连续的,对其导数的连续性也有一定要求,要找这样的函数有时是很困难的,特别是当边界形状较复杂时。在有限元的里兹法列式中,假定在每个离散的单元内函数连续,在单元之间的边界上的连续性被放宽了,平衡条件放宽到在整体意义上满足的程度。有限元的变分法表述使它建立在更坚实的数学

基础之上。但对于有些物理现象的微分方程不存在有意义的泛函或无法找到这样一个泛函，这时这种方法就无能为力了。

加权残数法是直接对问题所满足的微分方程求近似解的方法，要求满足边界条件的近似解在加权平均的意义上满足问题的微分方程，在此基础上确定近似解中包含的系数。同里兹法一样，通常的加权残数法使用的是在整个区域上函数及其一定阶次导数是连续的函数，而加权残数法的有限元表述中是采用分片连续的函数。

有限元法可以解结构力学和固体力学的各类问题，包括受拉、压的杆，受弯、扭的梁，平面应力、平面应变和平面轴对称问题，板、壳和三维应力问题，材料可以是弹性的或者是弹塑性的，各向同性或各向异性的，可求解静力的或动力的问题。

用有限元法解一般结构或桥梁结构问题有许多优点。有限元法将区域离散成小单元，因此可以适应各种边界形状。在求解过程中还可以根据应力分布的情况修改单元的划分，使在应力梯度大的地方单元分得密些，因而能适应不同的荷载情况。有限元法把微分方程的求解化为代数方程的求解，在计算机上有十分有效的代数方程组的算法和程序。对于各种类型的单元，有限元法有一套标准的产生刚度矩阵、荷载向量、质量矩阵以及数值积分的步骤可遵循。代数方程组的求解和动力方程组的求解步骤更是适用于各种单元。有限元法可以用来分析具有多种不同类型结构部件的大型复杂结构。如对斜拉桥作详细的空间结构分析时需要用到桁元代表缆索、梁元表示桥塔的单元、板壳元代表箱形主梁。将各种单元结合起来灵活应用，不会发生任何困难，这是用解析法不可能做到的。

1.2 线性弹性理论和能量原理

在讲述结构和变形体力学分析的有限元法之前，有必要回顾

一下线性弹性力学问题的基本方程和有关的能量原理。

1.2.1 线性弹性力学问题的基本方程

线性弹性力学问题是由三组方程控制的，它们是平衡方程、材料的本构关系以及应变-位移关系式。如果用直角坐标系，并以 x_1, x_2, x_3 代表三个互相正交的坐标，则它们可表示为：

1. 应力平衡方程

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad i = 1,2,3 \\ &\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i,j = 1,2,3 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

其中 σ_{ij}是应力张量的分量，脚标中，j 代表对 x_j 求偏导数，F_i 是体积力的分量，上式中还包含了对于重复指标求和的协定，即

$$\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

2. 应力-应变关系

应力-应变关系是决定材料物理性质的关系，也叫材料的本构关系。对于线性弹性材料而言，应力与应变之间的关系由下列广义虎克律定描述：

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}, \quad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{1.3}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\,\sigma_{kl}, \quad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{1.4}$$

式中 ε_{ij}是应变张量分量；c_{ijkl}是弹性刚度系数；s_{ijkl}是弹性柔度系数。上两式中对重复指标 k,l 求和。

3. 应变-位移关系式

小应变时，应变和位移之间有下列关系：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.5}$$

由(1.5)式可以得出应变分量之间存在下列关系：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\\
&\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j}-\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}\right\}\tag{1.6}
$$

其中(i,j,k)用(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)时可以得到六个方程。这六个关系称为弹性体的变形连续条件或变形协调条件。当以位移为独立变量时,如果应变由(1.5)式确定,则变形协调条件是自然满足的。但当以应力为独立变量时,除应满足平衡方程外,还需满足变形协调条件,将应变 ε_{ij}按(1.4)式由应力表示后代入(1.6)式中就可以得到以应力分量表示的变形协调条件,或称应力表示的变形协调方程。

一个适定的弹性力学问题除应满足以上方程外,还应满足在物体边界 $s=s_u+s_\sigma$ 上的边界条件:

$$
\text{在 } s_n \text{ 上}, \qquad u_i=\bar{u}_i \tag{1.7}
$$

$$
\text{在 } s_\sigma \text{ 上}, \qquad \sigma_{ij}n_j=T_i=\bar{T}_i \tag{1.8}
$$

其中 s_u 是位移 u_i 被指定的边界;s_σ 是面力 T_i 被指定的边界;n_j 表面法线的方向余弦。

如果以分量的形式写出来,并采用下列记号:

$$
\begin{aligned}
&u=u_1, && v=v_1, && w=u_3\\
&F_x=F_1, && F_y=F_2, && F_z=F_3\\
&\sigma_x=\sigma_{11}, && \sigma_y=\sigma_{22}, && \sigma_z=\sigma_{33}\\
&\tau_{xy}=\sigma_{xy}, && \tau_{yz}=\sigma_{yz}, && \tau_{zx}=\sigma_{zx}\\
&\varepsilon_x=\varepsilon_{11}, && \varepsilon_y=\varepsilon_{22}, && \varepsilon_z=\varepsilon_{33}\\
&\gamma_{xy}=2\varepsilon_{12}, && \gamma_{yz}=2\varepsilon_{23}, && \gamma_{zx}=2\varepsilon_{31}
\end{aligned}
$$

则平衡方程(1.1)可以写成

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0\\[2ex]\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad\tau_{zx}=\tau_{xz}\end{array}\right\}\tag{1.9}$$

应变-位移关系(1.5)式可以写成

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},\quad\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}\\[2ex]\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x},\quad\gamma_{yz}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y},\quad\gamma_{zx}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{array}\right\}\tag{1.10}$$

对于各向同性材料,应力-应变关系中只有两个独立的弹性常数:弹性模量 E 和泊松比 μ。这时(1.3)式可写成

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij}\tag{1.11}$$

式中

$$\lambda=\frac{\mathrm{E}\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},\quad G=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\mu)}\tag{1.12}$$

若将应力张量和应变张量的分量用列向量表示:

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\end{Bmatrix},\quad\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\end{Bmatrix}\tag{1.3}$$

则(1.9)式可以表示成

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\tag{1.14}$$

其中弹性矩阵[D]是:

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{对称} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

1.2.2 能量原理

1.2.2.1 变形体的虚功原理

将力学的重要原理之一的虚功原理应用到变形固体，就可得到变形体的虚功原理。考虑一变形固体，它占据的区域为 V，区域的边界为 S 面，它在体积力 $\{f^B\}$，表面力 $\{f^S\}$ 作用之下处于静力平衡，变形体中的应力为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$。

设相对于此平衡状态变形体又产生了满足边界位移约束条件的虚位移 $\delta u, \delta v, \delta w$，与之相应的虚应变为 $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{zx}$。将平衡力系在虚位移上所作虚功总和为零的论断应用于此变形体时就可得到下列变形体的虚功原理的公式：

$$\int_V (f_x^B\delta u + f_y^B\delta v + f_z^B\delta w)\mathrm{d}V + \int_S (f_x^S\delta u + f_y^S\delta v + f_z^S\delta w)\mathrm{d}S$$
$$= \int_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})\mathrm{d}V \tag{1.16}$$

式中 f^B, f^S 的脚标代表体积力和表面力的分量。等式左面是体积力所作虚功与表面力所作虚功之和，也就是外力所作的虚功，右面表

示内力所作虚功之总和。变形体的虚功原理表明：当物体在外力作用之下达到平衡时，对于施加在物体上的任何协调的、满足几何边界条件的微小的虚位移，总的内虚功等于总的外虚功。

如果物体内部或者边界上还有集中力 F^i 作用，则还应该在(1.16)式的左端加上集中力作的虚功。若我们采用有限元法中常用的矩阵和向量表示的符号，则(1.16)式可以写成

$$\int_V \{\delta\epsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V = \int_V \{\delta U\}^{\mathrm{T}}\{f^B\}\mathrm{d}V + \int_S \{\delta U\}^{\mathrm{T}}\{f^S\}\mathrm{d}S + \sum_i \{\delta U^i\}^{\mathrm{T}}\{F^i\} \tag{1.17}$$

其中

$$\{\delta\epsilon\} = (\delta\epsilon_x, \delta\epsilon_y, \delta\epsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{yz}, \delta\gamma_{zx})^{\mathrm{T}}$$

$$\{\delta U\} = (\delta u, \delta v, \delta w)^{\mathrm{T}}$$

$$\{f^B\} = (f_x^B, f_y^B, f_z^B)^{\mathrm{T}}$$

$$\{f^S\} = (f_x^S, f_y^S, f_z^S)^{\mathrm{T}}$$

分别为虚应变、虚位移、体积力和表面力的列向量表示，$\{F^i\}$ 是集中力列向量，$\{\delta U^i\}$ 是集中力作用点处的虚位移列向量。(1.15)式中最后一项是考虑有多个集中力作用而添加的外虚功项。

1.2.2.2　最小势能原理

若定义变形体的应变能密度为

$$\frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{1.18}$$

因而总应能为：

$$U = \int_V \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\}\mathrm{d}V \tag{1.19}$$

并定义物体的总势能为

$$\Pi = U - W \tag{1.20}$$

其中

$$W = \int_V \{U\}^{\mathrm{T}}\{f^B\}\mathrm{d}V + \int_S \{U\}^{\mathrm{T}}\{f^S\}\mathrm{d}S + \sum_i \{U^i\}^{\mathrm{T}}\{F^i\} \tag{1.21}$$

是包括体积力、表面力和集中力在内的外力在物体各点发生位移时所作的功，因而 $-W$ 是外力势。

$$U^{\mathrm{T}} = (u, v, w) \tag{1.22}$$

是满足问题的几何边界条件的位移函数。

最小势能原理可以表述为：

物体在外力作用之下产生位移和变形，在所有满足几何边界条件的可能位移之中真正达到的变形和平衡状态是使物体的总势能最小。

最小势能原理可以用公式表示为

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0 \tag{1.23}$$

如果从变分法的观点来看问题，若把总势能看作是可能位移的泛函的话，则(1.23)式表明势能的一次变分为零。

把(1.18)、(1.19)式和(1.21)式代入(1.20)式中，并作变分运算，不难看出，若将 u, v, w 的变分 $\delta u, \delta v, \delta w$ 作为虚位移，由最小势能原理即可推得虚功原理。为此，我们指出

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \delta\left(\frac{1}{2}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\}\right)\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \delta(\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon\})\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_V (\{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D]\{\delta\varepsilon\})\mathrm{d}V = \int_V \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{1.24}$$

其中利用了 $[D]$ 是对称矩阵的性质。式中应变的变分 $\{\delta\varepsilon\}$ 是根据位移的变分 $\{\delta U\}$ 确定的，即

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \tag{1.25}$$

由(1.21)式可以得到