

第 1 章 绪 论

1.1 城市交通拥挤概述

随着我国改革开放的不断深入,城乡经济进一步繁荣,城市规模日益扩大,我国机动车拥有量及道路交通量也迅速增加。虽然我国各省市的道路建设和交通管理也在不断改善和发展,但由于以前的道路建设欠账太多,加上一些道路设施及交通管理设备得不到及时更新,交通管理手段相对落后,以及交通参与者的安全意识淡薄,致使目前城市道路交通普遍存在交通拥挤、交通事故增多、车速下降、居民乘车难、出行难的现象。尤其是在大城市,交通问题已经成为影响城市功能正常发挥和城市可持续发展的一个全局性问题。

交通拥挤程度是路网运行状态的一个主要评价指标。交通拥挤的直接危害是使交通延误增大,行车速度降低,带来时间损失;低速行驶还导致耗油量增加及出行成本增加。美国德州运输研究所通过研究美国 39 个主要城市,估算美国每年因交通阻塞而造成的经济损失约为 410 亿美元,12 个最大城市每年的损失均超过 10 亿美元。在日本,仅首都圈,严重拥挤地点就有 219 处,在首都高速道路拥挤严重的路段,其拥挤持续时间长达 17 小时,拥挤长度达 9.87km。日本东京每年因交通拥挤造成交通参与者的时间损失相当于 123000 亿日元。欧洲每年因交通事故、交通拥挤和环境污染造成的经济损失分别为 500 亿欧元、5000 亿欧元和 50 亿~500 亿欧元^[1]。

交通拥挤、城市道路流量剧增,使得汽车尾气排污量增加,导致环境恶化,人民生活质量下降。环境污染主要体现在大气污染和噪声污染两个方面。目前各国城市大气污染物主要是浮尘、SO₂、NO_x、CO 等,

而汽车是这些污染物的主要排放源（达 35%左右）。据有关研究发现，CO₂ 排放量在所有运输工具中，汽车排放占 78%（56% 为小型汽车，22% 为大型汽车）并逐年递增 温室效应严重 城市多发酸雨；CO 的排放系数随车辆行驶速度的下降而增大，信号交叉口 CO 污染日益严重；NO_x 也随汽车频繁变速排放量明显增大^[2]。同时 我国城市道路交通噪声污染也日益严重。据《中国环境年鉴》^[3] 2000 年统计了 40 个重点城市道路交通流量，其中白天平均每小时流量超过 2000 辆的城市有 18 个 超过 3000 辆的有 3 个城市，大部分城市的监测道路车流量呈现上升趋势。根据经验，道路车流量增加一倍，交通噪声值增加 3dB。一般情况下，即使严格执行禁鸣，车流量达到一定水平后也会出现交通噪声超过国家标准 70dB 的现象。从全国城市道路交通噪声的调查结果分析 目前全国有 16% 的居民住在道路两边 受影响的人群约 3400 万人，其中 80% 的人群 约 2700 万人，白天在平均噪声级超过 70dB 夜间在超过 55dB 的高噪声干扰下生活。城市道路交通噪声现已成为我国城市噪声污染的一个重要来源，它也是城市各类噪声中污染强度最大的声源。

此外 交通拥挤使交通事故增多 而交通事故的发生又使交通阻塞加剧 从而形成恶性循环。据《2004 中国汽车工业年鉴》^[4] 统计 我国属于汽车交通事故严重发生区，每万辆车辆保有量导致死亡的人数高达 44.58 人 而美国仅 1.83 人 全球平均约 4 人。从 1998 年至 2003 年，因交通事故造成的死亡人数累计达 57.51 万人 受伤人数达 253.03 万 直接经济损失 165.03 亿元^[4]。由于车辆、人口数量的增长和人们出行率的提高，北京市交通事故的发生次数和伤亡人数也很可观，1996 年 全市死亡 851 人 其中机动车事故次数、死伤、死亡数分别为全市事故次数、死伤、死亡人数的 91.24%、74.84% 和 72.97% 经济损失 9878.4 万元 由于交通拥挤、堵塞导致的交通事故次数、死伤、死亡数分别占 42.01%、51.77% 和 53.57%^[5]。

中国是自然灾害较重 历史上受害较重的地区 而道路交通系统是分布区域很广的网状系统 极易遭受地震、洪水、恶劣天气等自然灾害的破坏。灾后由于供需矛盾激化将造成路网大面积拥阻，系统运输

功能失效，不仅直接经济损失巨大，还会因交通阻断造成救援延误而引起更为惨重的间接损失。在日本神户、旧金山、台湾等大地震中均有惨痛的历史教训。

由此可见，无论是日常条件还是灾害条件下的交通拥挤或拥堵的加剧，不仅会造成巨额的经济损失，而且如果发展严重甚至还会导致城市功能的瘫痪及次生灾害的蔓延。因此，本书将城市交通系统在日常及灾害（本书主要研究地震）条件下发生拥挤的可能性及后果作为城市交通运行状态评价的主要内容，希望通过对交通系统运行状态的评价，及时发现问题，并通过一定的可行方法对城市道路网络进行改善，提高系统应变能力 减少阻塞的发生 避免延误的蔓延。

1.2 城市路网可靠性研究概述

交通系统的运行状态取决于路网的供需条件。在灾害及突发事件下，道路的供给及交通需求将发生重大变化，以往的抗灾应急策略多基于最不利情形的确定性分析，其结果往往导致资源分配的不合理。事实上，由于各种灾害及突发事件发生规模及发生可能性不同，致使未来路网供给能力具有很强的随机性，而灾后及突发事件发生后由于交通需求异常变化，加之车辆的盲目流动，交通需求的变化也将具有明显的随机性。供需的随机性导致实时路网运行状态也具有强烈的随机性及不确定性。而在非自然灾害条件下，由于近几年交通需求激增，供需矛盾日益加剧，从而造成阻塞频发，而随机发生的交通事故等紧急事件的发生进一步恶化了路网运行状态，不仅加重了城市交通拥挤，也增大了出行时间的不确定性。因此，拥挤路网在日常条件下的供需也具有很强的随机性。而目前国内外对交通系统运行状态的研究指标，如饱和度、路网容量、行驶时间、拥挤度、延误、用户满意度、服务水平等多为非概率测度参数。这些常态指标往往仅来自某一次或短期观测结果，以此作为一定时期的交通系统运行状态的评价依据，难免有较大的任意性，而且这些确定性指标难以正确描述和评价未来路网运行的期望状态 准确的预测道路拥挤、堵塞发生的可能性。这将给交通系统的应变

性规划及管理带来一定的困难。因此，有必要应用城市道路系统运行状态的概率型评价指标来分析和研究城市道路网络^[6]。

城市路网可靠性反映的是路网在规定时间、规定条件下完成预定功能的能力。路网可靠性的概率测度，即路网可靠度。它反映的是路网在规定时间、规定条件下完成预定功能的概率。它是衡量城市路网，特别是在紧急灾害情况下，交通系统功效能否正常发挥、运行状态是否达到预期要求的重要指标，因此也可称为路网运行可靠性。它不仅是对路网应变性能的综合反映，也是构建智能交通系统的理论基础之一，是路网整体规划、设计、交通流组织管理和制订重大突发事件处理预案的基础和重要组成部分。

目前我国不少城市的路网因先天不足 缺乏冗余容量 加之应急管理措施不力，造成了路网运行可靠性及应变能力低下，系统运行状态极不稳定。若不采取有效措施防止并及时弥补路网缺陷，一旦灾害及紧急事件发生 将造成路网的大面积、长时间拥阻 甚至瘫痪 引发难以估量的政治及经济损失。对城市路网进行可靠性的研究，并在此基础上进行合理的改扩建规划、抗灾应变规划，制订应急管理策略，无疑能有效地发掘路网潜力，提高交通系统对突发灾害及紧急事件的免疫力，控制灾后次生灾害发生，减少紧急事件造成的延误大面积扩散，减少间接损失，从而具有重大的社会意义和经济意义。

1.3 城市路网可靠性研究现状及局限

城市交通是城市的命脉，其作用是保障城市各项基本功能的正常运转，保障社会经济的发展。随着我国经济的持续发展及对交通系统的依赖日益加强，人们对交通网络处理日常及灾害情况下交通问题的可靠性及应变能力提出了更高的要求。如何在现有的资源条件下，通过对道路系统的可靠性进行评价，进而采取有效布局和改扩建措施以及交通管理手段以改变交通现状，最大程度地发挥城市交通网络的功效是急需解决的重大工程问题之一。

交通系统可靠性研究始于 20 世纪 80 年代 但运用可靠性技术进行路

网规划及管理的理论尚未成熟。目前国内外的相关研究存在以下局限。

1) 缺乏对路网功能的准确界定

城市路网可靠性是路网在规定时间、规定条件下完成预定功能的能力。而目前的研究对路网预定功能，尤其在各类灾害及紧急事件下的预定功能标准没有明确界定。相应的单元及路网系统的可靠性标准或要求也没有确定。

2) 缺乏对各种随机因素对道路及路网通行能力的影响的研究

在道路交通系统抗灾应变能力预测研究中，研究者多将结构可靠性分析与路网容量分析割裂开来，仅进行道桥结构及系统连通可靠性评估。事实上，在发生自然灾害或紧急事件时，路网上连通可靠的 OD 对（起终点对）还会因交通需求及通行能力的矛盾激化造成阻塞而丧失运输功能。因此系统连通可靠性评估不能全面预测系统应变能力，有必要考虑路网容量限制进行路网可靠性评价。而目前缺乏各类随机因素对道路及路网通行能力（容量）影响的研究。

3) 缺乏对各种随机因素对道路交通需求的影响的研究

各种重大灾害及紧急事件对路网通行能力造成削减的同时，也使交通需求随之发生变化（如出行人次及出行目的的改变、路径选择的变化、交通方式的转移、道路出行费用矩阵的变化等）。而对于非灾害条件下的拥挤路网，日常交通需求的变化也不容忽视，少量增加的需求就可能造成已超负荷运转的路网发生长时间拥阻。交通需求的变化具有典型的随机性。对灾害及紧急事件下的交通需求进行合理的预测是进行路网可靠性评价、交通管理抗灾预案的制定及应急交通管制的基础。而目前缺乏对日常、灾后及紧急事件下人的出行行为分析及实用有效的交通需求随机分布的预测方法。

4) 缺乏单元可靠性及考虑失效相关的路网可靠性评价方法

由于道路供需随机分布参数的确定需要大量的观测数据，因此有必要建立各类实用的单元（路段及路口）可靠度评估方法。同时，灾害及紧急事件下路网各单元（路段或路口）的运行状态具有很强的失效（阻塞）相关性。一方面，当灾害尤其是大规模灾害发生时，多个单元因共同原因将同时发生破坏或通行能力折减；另一方面，当某些单元发生

破坏或通行能力折减时，将因路网流量重分布导致路网内其他相关单元因供需矛盾激化而同时导致阻塞。而现有的路网可靠性研究缺少对失效（阻塞）相关性的全面研究，不利于路网可靠性的准确评价及路网的有效改善。而且现有的路网可靠性算法普遍存在计算量过大，难以应用于大规模路网的局限。而国外广泛使用的基于蒙特卡洛模拟的方法不仅可能受到伪随机数循环的困扰，而且也难以考虑失效相关性问题的。

5) 缺乏有效的单元重要性分析及系统优化方法

道路系统中对不同的道路单元进行加固、扩建或交通管制对整个路网的应变能力的提高或缓解灾后及紧急事件后交通阻塞的贡献是不同的。也就是说，在路网体系中，不同的路段或路口具有不同的重要度，若做全面的单元重要性分析，仅对应变薄弱环节进行改善或管制，可能会造成交通流分布的不均衡，从而加大交通量与通行能力的矛盾。而目前的研究缺乏全面量化的单元重要性分析及完善的路网可靠度优化模型，仅从单元自身可靠性出发确定路网薄弱环节，忽视了路网的拓扑结构变化及单元改善在路网流量重分布及路网可靠性提高中所起的作用和效益，从而难以保障系统整体应变能力的有效提高。

本书即针对以上问题，力图建立城市的路网畅通可靠度评估方法，研究路网畅通可靠度指标在城市道路交通系统运行状态评价、路网布局、路网改扩建规划、交通建设时序确定、抗宰规划等方面的应用。

1.4 路网可靠性评价及优化的应用

交通系统运行可靠度作为城市交通路网应变能力大小的一种度量指标，在交通规划及管理中有广泛的应用。交通规划师可通过调整路网布局或增大路网容量来提高交通系统的畅通可靠性；交通管理者可借助对路网的可靠度分析，确定敏感路段，优化管理措施，预防交通拥挤及交通事故的发生。因此，将可靠度分析技术应用于交通系统中，结合交通流特性，分析研究城市路网交通状态非常重要，其主要应用主要有以下几个方面。

1)分析现状，认清交通存在问题

通过对交通数据的分析研究 探索城市交通流变化规律 并通过对不同状态下路网运行稳定性的分析和城市路网结构或经济结构类似的城市交通运行状态的比较，使交通管理者正确认识所面临的交通形势，以便合理地分析交通现状，制订切实可行的改善方案或解决方法。

2)为路网布局或规划建设路网提供决策支持

在现有的路网资源条件下，利用历史交通数据合理分析城市路网，寻找路网的薄弱环节，并对这些单元进行改善，以达到提高整个路网性能的目的 在此基础上 准确地预测道路拥挤、堵塞发生的可能性 采取有效布局和改扩建规划建设措施改变交通现状，从而解决交通问题，确保未来路网具有可靠的可达性和畅通性。特别的，路网可靠度分析理论可有效地对经常有灾害发生或事故发生频繁的路网进行分析研究，提供合理的应急对策，可提高城市路网的应变能力，保证城市的正常运转。

3)为交通管理部门提供决策依据

通过道路系统的运行状态进行可靠性分析，可为交通管理和规划部门提供有效解决交通问题的科学管理策略，有效地减轻城市交通拥挤 确保居民出行畅通 最大程度地发挥交通网络的功效。

4)为 ITS 提供技术支持

随着 ITS 技术日益发展，路网可靠度分析技术也可应用于交通信息系统、动态路线诱导及停车诱导等系统中，以便为出行者提供更丰富的出行信息 更合理地控制交通流的时空分布 提高路网服务水平。

5)实现城市交通的可持续发展

充分认识城市交通供需矛盾，实现有限资源的合理利用及路网潜力的充分发挥，从而从根本上解决城市交通问题，最终推动城市交通系统乃至整个城市的可持续发展。

综上所述，城市路网可靠度作为一个概率性评价指标，能弥补确定性评价指标的缺陷，其评价可作为城市路网抗灾应变规划及管理的基本依据，因此可被广泛应用于我国道路工程建设的各个部门。利用道路可靠度评价方法还可对现有交通数据进行提炼及挖掘，为智能交通

系统提供高质量的交通数据。城市路网可靠度评估及抗灾应变规划与管理研究成果的推广应用，必将为我国的城市交通系统规划及管理事业带来巨大的经济效益与社会效益。

本书的研究目的在于 借鉴网络可靠性分析方法 在交通流供需随机性分析的基础上 建立适合我国道路交通特点的、易于工程应用的城市拥挤路网道路单元和路网系统畅通可靠度的计算方法，并深入研究该指标在日常及震害情况下的交通运行状态分析和在交通规划中的应用 以便为解决城市交通问题提供有效的方法和途径 并促进可靠度理论在交通领域中的广泛研究和应用。

1.5 本书章节概要

本书从交通供需随机性出发，利用网络可靠性分析的方法，建立城市拥挤路网道路单元及系统畅通服务水平的概率测度指标——畅通可靠度，在此基础上给出了单元畅通可靠度和路网系统畅通可靠度的计算方法。

在交通运行状态评价的基础上，本书从改善交通网络整体功能的角度入手 建立相应道路网改扩建及建设时序的优化模型 最后通过一定的算法对该模型求解 从而为道路网络的改善提供一个正确指导 以使城市道路网络能更好地发挥其交通功能来满足人们的需求。

因为道路交通系统是分布区域很广的网状系统，极易遭受地震等自然灾害的破坏 不仅直接经济损失巨大 而且还会因交通阻断造成救援延误而引起更为惨重的引发损失。因此，本书还进行了交通系统抗震可靠度分析及抗震加固优化策略的研究。

具体内容安排如下：

第一章主要就城市路网可靠度研究的背景及意义加以阐述。

第二章介绍了相关的网络与网络可靠性基本知识。

第三章阐述了交通系统可靠度的研究现状，并较为详细地分析了各种可靠度的计算模型及其局限。

第四章借鉴道路服务水平的划分标准，制定了城市交通运行状态

的划分标准，并根据特大城市交通的实际情况，提出了相应的畅通标准。

第五章提出了概率型的道路单元运行状态可靠性评价指标和计算方法。

第六章以完成预期服务水平为系统预定功能，基于网络可靠性分析进行路网畅通可靠度建模及计算方法论述。

第七章通过组合交通供需不同分布类型，研究其随机性变化及路网畅通可靠度变化规律。

第八章以系统可靠度为优化目标，建立了路网优化模型；在此基础上，借助正交枚举法和遗传算法研究了相应的实用优化算法。

第九章研究了交通网络系统抗震可靠性分析的方法。

最后一章对本书进行了归纳、总结，提出了本研究的后续研究内容。

参 考 文 献

- [1] 陆化普.城市交通现代化管理.北京:人民交通出版社.1998.
- [2] 马健霄.城市汽车交通的适量化.南京理工大学学报(自然版).2001.11.
- [3] 中国环境年鉴2000.中国环境年鉴社.2001.
- [4] 2004 中国汽车工业年鉴.中国汽车技术研究中心.2004.
- [5] 王文生.浅谈交通事故及其预防.北京汽车.1997,(1):46-48.
- [6] 陈艳艳 梁颖 杜华兵.可靠度在路网运营状态评价中的应用.土木工程学报.2003,(1):36-40.

第 2 章 网络与网络可靠性基本知识

客观世界存在各种各样的系统,若按功能逻辑性,可将其分为单层次、单一逻辑关系的简单系统(串联系统、并联系统、候选表决系统等)和多层次或逻辑关系复杂的、不能用简单系统来描述的复杂系统(如递阶系统、网络系统等)。城市道路系统是分布区域很广的具有典型网络特征的大规模复杂系统。

路网作为交通基础设施系统的重要组成部分,是现代化城市赖以生存和发展的重要基础,也是维系城市或地区正常生产和日常生活的纽带。对其功能进行可靠性分析是保证路网应变性的前提。本章重点介绍道路网络系统可靠性分析所涉及的图论、网络分析及可靠性分析的基本知识,并介绍复杂网络系统连通可靠度的计算方法,为下面章节基于可靠性分析的道路网络运营状态评价、改扩建规划及抗震加固决策提供铺垫。

2.1 图、网络与交通网络系统

2.1.1 图论方法简介

图论是运筹学的一个分支,它是专门研究由一组点和联结各点的一组线所组成的图的学科。在现实中有很多问题不是针对某一个对象的,而是研究一些事物和事物间的相互关系的。如果用点来表示这些事物,用线来表示它们之间的关系,就可以把所要研究的问题抽象为图。运用图论的方法就可以把所研究的网络转化为一种很直观的形式,便于问题的建模和求解。本章中所涉及到的图的有关概念介绍如下。

1) 有序对与二元关系

设有论域

$$U = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$$

用图 2-1a) 所表示论域中的任何两个相互无关的单元组成的子集可记为 $\{v_i, v_j\}$ 或 $\{v_j, v_i\}$ ，其中单元的排序无关。但实际问题中常会遇到类似于图 2-1b)、c) 所示的相关性事件，这时运用有序对和无序对的方法可以方便地处理这一类问题。

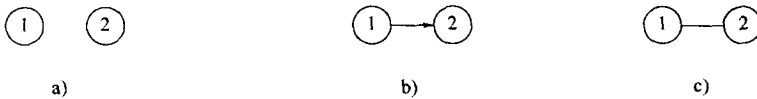


图 2-1 二元关系

a)子集; b)有序对; c)无序对

若以 $\langle v_i, v_j \rangle$ 表示 v_i 与 v_j 间的关系，如它们之间有先后次序，可写成

$$\langle v_i, v_j \rangle = \{ \langle v_i, 1 \rangle, \langle v_j, 2 \rangle \} \quad (2-1)$$

式中 $\{v_i, 1\}$ 及 $\{v_j, 2\}$ 分别为 v_i 及 v_j 与二者间的关系序号所构成的集合，则称 v_i, v_j 为一有序对、序对或序偶。有序对的标记方法参见图 2-1b)。

由论域 U (或集合 V) 中所有两两单元间的有序对所组成的集合称为 U (或 V) 上的二元关系集 (简称二元关系)。

设有论域 U ， U 上的二元关系为 R 。

(1) 若 $\forall v_i \in U$ 可推得 $\langle v_i, v_i \rangle \in R$ 则称 R 是自反关系；

(2) 若 $\forall v_i, v_j \in U$ 且 $\langle v_i, v_j \rangle \in R$ 可推得 $\langle v_j, v_i \rangle \in R$ 则称 R 是对称关系；

(3) 若 $\forall v_i, v_j \in U, v_i \neq v_j$ 且 $\langle v_i, v_j \rangle \in R$ 可推得 $\langle v_i, v_j \rangle \notin R$ 则称 R 是反对称关系；

(4) 若 $\forall v_i, v_j, v_k \in U$ 且 $\langle v_i, v_j \rangle, \langle v_j, v_k \rangle \in R$ 可推得 $\langle v_i, v_k \rangle \in R$ 则称 R 是传递关系。

图 2-1c) 所示无序对中的两个单元 v_i 和 v_j 符合对称关系。无序对需要用两个有序对来表示，可记为

$$\{ \langle v_i, v_j \rangle, \langle v_j, v_i \rangle \}$$

2) 图

在图论中, 一个图 G 可用如下的集合形式来表达

$$G = \{V, E\} \quad (2-2)$$

式中, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (非空称为 G 的点集 (顶点集); $v_i \in V$ 称为点; $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为 V 上的二元关系 称为 G 的弧集 其中每一个弧可表示为

$$e_i = \langle v_s, v_t \rangle (e_i \in E, v_s, v_t \in V)$$

例如 在图 2-2a) 中 由公式 (2-2) 图 G_a 可表示为

$$G_a = \{V_a, E_a\}$$

$$V_a = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}\}$$

$$E_a = \{ \langle \textcircled{1}, \textcircled{3} \rangle, \langle \textcircled{1}, \textcircled{4} \rangle, \langle \textcircled{3}, \textcircled{2} \rangle, \langle \textcircled{4}, \textcircled{2} \rangle, \langle \textcircled{3}, \textcircled{4} \rangle, \langle \textcircled{4}, \textcircled{3} \rangle \}$$

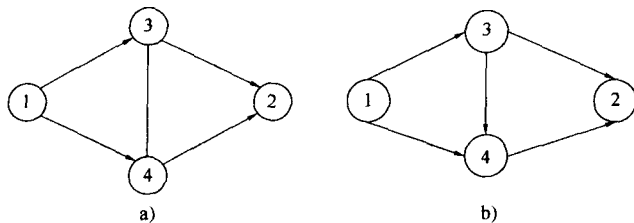


图 2-2 G_a 及 G_b

a) G_a ; b) G_b

同样 图 2-2b) 可以表示为

$$G_b = \{V_b, E_b\}$$

$$V_b = \{\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}\}$$

$$E_b = \{ \langle \textcircled{1}, \textcircled{3} \rangle, \langle \textcircled{1}, \textcircled{4} \rangle, \langle \textcircled{3}, \textcircled{2} \rangle, \langle \textcircled{4}, \textcircled{2} \rangle, \langle \textcircled{3}, \textcircled{4} \rangle \}$$

3) 有向图与无向图

设有图 $G = \{V, E\}$ 若 E 满足对称关系, 即图中的弧不具有方向

性 则称 G 为一无向图 [如图 2-3a)、b) 所示两事件] ;若 E 满足反对称关系, 图中的弧具有方向性, 则称 G 为一有向图 [如图 2-2b) 所示事件] ;若 E 既不满足对称关系, 也不满足反对称关系, 即图中部分弧不具有方向性, 部分弧具有方向性, 则称 G 为混合图 [如图 2-2a) 所示事件]。

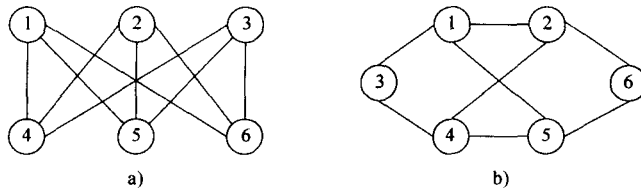


图 2-3 事件的无向图和有向图

4) 图的同构

如果两个图的各个顶点及其各顶点间的二元关系都存在一一对应的关系, 则称这两个图同构。

图 2-3a)、b) 所示图事件的差别较大, 但显然两者的顶点集和二元关系都一一对应 因而是同构的。相反 图 2-2 中 G_a 和 G_b 的结构形式类似, 但不同构, 因为它们的二元关系集 E_a 和 E_b 不是一一对应的。

5) 定点的度、入度、出度

无向图中, 顶点的度即是与此顶点相关联的边的条数, 有向图中, 顶点的入度是射入此点的弧的条数, 出度是从此点射出的弧的条数。

在任何图中, 顶点的总度数等于边 (或弧) 数的两倍。但值得注意的是, 在求解混合图的顶点的度时, 图中的一条无向边应作为两条有向弧进行计算, 而在无向图中, 一条边仅作为一条无向弧进行计算。

例如 在图 2-4 所示的混合图中 各顶点的入度、出度和度分别如下

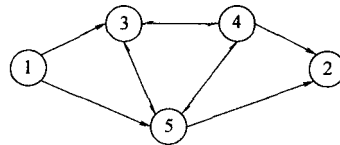


图 2-4 混合图

顶点①	入度 0;	出度 2;	度 2;
顶点②	入度 2;	出度 0;	度 2;
顶点③	入度 3;	出度 2;	度 5;
顶点④	入度 2;	出度 3;	度 5;
顶点⑤	入度 3;	出度 3;	度 6;

顶点总度数 20 图的有向弧数 10。

6) 链、路、圈和回路

在有向图和混合图中，当某点的入度为 0 时称该点为源点（简称源）当某点出度为 0 时称该点为汇点（简称汇）源的集合称为源集，汇的集合称为汇集，源点和汇点通称为图的端点。

图 2-4 所示例题中，顶点 ① 的入度为零，顶点 ② 的出度为零，分别为该混合图的源和汇。

对于任一顶点序列 $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_j$ 若经过这个顶点序列的弧的两个端点是 v_i 和 v_j 则这些相关联的弧构成一条链 顶点 v_1 称为链的始点， v_j 称为链的终点。链的长度等于这条链中弧的数目。

全部由同向弧组成的链称为路。

如一条链的起点和终点重合时，称这条链为圈。如一条路的起点和终点重合时，则称这条路为回路。图 2-4 所示的混合图为一有圈图，如弧链 ①—②—③—④—⑤—① 构成为一个圈。

7) 圈的邻接矩阵

如某一顶点为某一弧的一个端点（无论是头部或尾部）则该顶点与该弧称为相互关联。如两条弧都与同一个顶点关联，则称这两条弧相互关联。如有一个顶点 v_i 通过一条有向弧与另一顶点 v_j 连接起来 则称 v_i 与 v_j 相邻接。

一个有向、无向或混合图 $S = \{V, E\}$ 的结构形式都可由其邻接矩阵

$$A = [a_{ij}] \quad (2-3)$$

惟一确定。式中

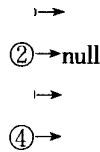
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{若 } \langle v_i, v_j \rangle \notin E \end{cases} \quad (v_i, v_j \in V) \quad (2-4)$$

例如 图 2-2a)所示图的邻接矩阵为

$$A = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \textcircled{1} & \left[\begin{array}{cccc} 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{array} \right. \\ \textcircled{2} & \\ \textcircled{3} & \\ \textcircled{4} & \end{matrix}$$

矩阵中 a_{ij} 的 i 为行号, j 为列号。

应注意 在邻接矩阵中 零列向量对应的顶点为图的源 零行向量对应的顶点为图的汇。上例图 2-2a)所示图的邻接矩阵中 顶点 对应于零列向量, 顶点 对应于零行向量。图 2-2a)所示图用链式邻接表表示为



其中 \rightarrow 表示该符号左侧的顶点与符号右侧各顶点相邻接; null 表示“空集”即“ \rightarrow ”左侧的顶点不与其他任何顶点邻接。

8) 最小路

若一条路中的任一条弧被删去, 不再是从源点到汇点的一条路时, 便称这条路满足路的最小性, 称之为最小路。源点到汇点所有最小路的集合称为由源点到汇点的最小路集, 简称为路集, 本书中一般采用 A_i 代表第 i 条最小路 用 $\{A_i\}_m (i=1, 2, \dots, m)$ 代表相应的最小路集。路所含弧的数目称为该路的阶数或长度。

例如 图 2.4 所示事件中, 由顶点 到顶点 共计 7 条最小路, 可分别由各弧两端的顶点标记为

- | | |
|--|------|
| $A_1: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2}$ | 路长 2 |
| $A_2: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}$ | 路长 3 |
| $A_3: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2}$ | 路长 3 |
| $A_4: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}$ | 路长 3 |

$A_5: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}$ 路长 4

$A_6: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2}$ 路长 4

$A_7: \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}$ 路长 4

由图 2-4 可以看出 $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow$ 是由顶点 到顶点 的一条路,但不是一条最小路,因若将弧链 $\textcircled{1}-$ 、 $\textcircled{4}-$ 、 $\textcircled{3}-$ 从该路中删去后原弧序列化为 $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2}$ 仍为由 到 的一条路即 A_1)。

9 最小割

设 C_i 为图 G 中一些弧的集合,若从 G 中删去 C_i 中的所有弧就使得从源点到汇点的路集为空集时,称 C_i 为源点到汇点间的一个割,割所含弧的数目称为该割的阶数。

若从 C_i 中任意删去一条弧, C_i 便不再成为源点到汇点间的割时,认为该割满足割的最小性,称为一最小割,源点到汇点间所有最小割的集合称为最小割集,简称为割集。本书中一般采用 C_i 代表第 i 个最小割,用 $\{C_i\}_n (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 代表相应的最小割集。

例如在图 2-4 所示事件中,由顶点 到顶点 间共计 6 个最小割亦可分别由各弧两端的顶点标记为(由 $\textcircled{0}-\textcircled{0}$ 表示无序对, $\textcircled{0} \rightarrow \textcircled{0}$ 表示有序对)

$C_1: \{ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \}$ 阶数 :2

$C_2: \{ \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}, \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2} \}$ 阶数 :2

$C_3: \{ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5} \}$ 阶数 :3

$C_4: \{ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2} \}$ 阶数 :3

$C_5: \{ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2}, \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{2} \}$ 阶数 :4

$C_6: \{ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5}, \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{2} \}$ 阶数 :4

不妨对 C_6 的割性质和割的最小性加以验证,读者可照此对其余割进行验证。

依照定义将 C_6 中的弧单元 $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3}$ 、 $\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$ 、 $\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5}$ 从图 2-4 所示图事件中删去,则原事件即化为图 2-5 的形式这时从顶点

到顶点 的路集已经为空 故而 C_6 是一个割。

而若将弧 $1 \rightarrow 3$ 从 C_6 中删去, 相当于在图中加入弧 $3 \rightarrow 1$ 则原事件化为图 2-6 所示形式。这时, 从顶点 1 到顶点 2 的路集已不再是空集 (有最小路 A_4 存在) 同理, 若从 C_6 中删去其他弧, C_6 也不再是割。因此, C_6 满足割的最小性。

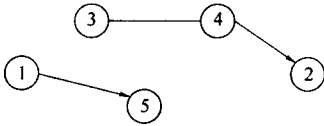


图 2-5

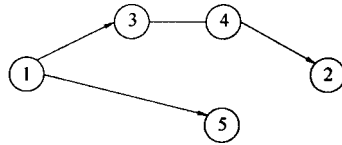


图 2-6

最短路与最小割具有对偶性, 通过集合理论中的 De-morgan 律, 两者间是可以互化的。但互化过程较为复杂, 这里不予介绍。

10 连通图与树

若一无向图的两两顶点间都至少存在一条链时, 称该图为一向连通图, 否则称它为不连通图。如果一个有向图去掉方向后得到的无向图是一连通图, 则称该图为有向连通图。图 2-5 中的图事件为不连通图, 而图 2-4 中的图事件就是连通图。

不含圈的无向连通图称为一棵无向树, 见图 2-7a) 不含圈的有向连通图中, 若只有一个入度为 0 的顶点, 且其他各顶点的入度均为 1, 则称该图为有向树, 见图 2-7b)。有向树中, 入度为 0 的顶点称为树根, 出度为 0 的顶点称为树叶, 其余顶点称为分支点。无向树和有向树通称为树。

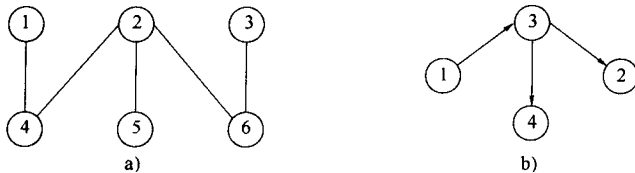


图 2-7

a) 无向树; b) 有向树