

第一章 结构可靠度分析的若干基本概念

1.1 结构可靠性与可靠度

1.1.1 结构可靠性与可靠度的基本概念

结构设计要解决的根本问题是在安全适用与经济合理之间选择一种合理的平衡,力求以最经济的途径,使建造的结构满足下列各项预定功能要求^[1,2]:

1. 正常施工和使用时,结构能承受可能出现的各种作用;
2. 在正常使用时,结构具有良好的工作性能;
3. 在正常维护下,结构具有足够的耐久性能;
4. 在设计规定的偶然事件发生时和发生后,结构能够保持必需的整体稳定性。

在上述功能要求中,第 1、4 两项关系到人身安全,因此称其为结构的安全性;第 2 项关系到结构的适用性,第 3 项关系到结构的耐久性。安全性、适用性和耐久性总称为结构的可靠性。结构可靠性的数值度量用可靠度,其安全性的数值度量则用安全度。静态和瞬态动载作用下结构可靠性研究的重点是结构的安全问题,循环荷载作用下结构可靠性研究的重点通常是结构的耐久性问题^[3]。由此可见,结构可靠度是结构可完成‘预定功能’的概率度量,它是建立在统计数学的基础上经计算分析确定的,并且给结构的可靠性一个定量的描述。因此,结构的可靠度比安全度具有更广泛的内涵和外延。

根据当前国际上的一致看法,结构可靠度定义为:结构在规定的时间内,在规定的条件下,完成预定功能的概率。这里所说的‘规定时间’是指对结构进行可靠度分析时,结合结构使用期,考虑各种基本变量与时间的关系所取用的基准时间;‘规定的条件’是指结构正常设计、正常施工和正常使用的条件,即不考虑人为过失的影响;‘预定功能’是指上面提到的四项基本功能。

可靠度概念中的‘规定时间’即设计基准期,是结构可靠度分析的一个时间坐标,可参考结构使用寿命的要求适当选定,但不能将设计基准期简单地理解为结构的使用寿命,两者是有联系的,然而又不完全等同。当结构的使用年限超过设计基准期时,表明它的失效概率可能会增大,不能保证其目标可靠指标,但不等于结构丧失所要求的功能甚至报废。例如,某桥梁的设计基准期定义为 $T=100$ 年,但到了 100 年时,不一定该桥梁就不能使用了。一般来说,使用寿命长,设计基准期也可以长一些;使用寿命短,设计基准期应短一些,通常设计基准期应该小于寿命期,而不应该大于寿命期。影响结构可靠度的设计基本变量如车辆荷载、人群荷载、风荷载、温度作用等,都是随时间变化的,设计变量取值大小与时间长短有关,从而直接影响结构可靠度。因此,必须参照结构的预期寿命、维护能力和措施等规定结构的设计基准期。目前,国际上对设计基准期的取值尚不统一,但多取 80~120 年。根据我国公路桥梁的使用现状和以往的设计经验,我国公路桥梁结构的设计基准期统一取为 100 年,属于适中时域。一般认为,

设计基准期与桥梁的大小和重要程度密切相关。不同的设计基准期，对应不同的荷载统计参数及其代表值，这样，不但给统计分析工作带来麻烦，也增加了具体的公路桥梁设计规范表达的复杂性。因此，同一结构体系的设计规范应当取用统一的设计基准期。

结构的可靠度与时间关系密切。一般而言，结构或结构构件的材料强度和几何因素等会随着时间的增长而有所变异，但这种变异在大多数情况下较小，在工程结构的设计和可靠度分析中可以忽略不计，即结构或构件的抗力可用与时间因素无关的随机变量概率模型描述。当然条件具备时也可以采用随机过程概率模型。但对于作用或作用效应，时间因素的影响通常不容忽视，应以随机过程概率模型描述。因此，作用、作用效应与抗力的组合为一种半随机过程概率模型，分析比较繁琐，一般可作某些假定，将其转化为随机变量来处理。

1.1.2 工程结构可靠度度量的三个水准

工程结构设计方法，从力学计算来说，基本上分为弹性设计法与非弹性设计法两类。而从可靠度理论来说，基本上可分为经验安全系数设计法和概率设计法两类。经验安全系数设计法，是将影响结构安全的各种参数按经验取值，一般用平均值或规范规定的标准值，并考虑这些参数可能的变异对结构安全性的影响，在荷载与强度计算中再取用安全系数 K 。概率设计法则是将影响结构安全的各种参数作为随机变量，用概率论和数理统计学来分析全部参数或部分参数，或者用可靠度分析结构在使用期限内满足基本功能要求的概率。当前的发展趋势是，结构设计正逐步由经验设计法向概率设计法转变。在目前阶段，按其发展进程国际上通常将基于可靠度的设计划分为三个水准，即水准 I、水准 II 和水准 III。

1. 水准 I——半概率设计法

这一水准设计方法的特点是，虽然在荷载和材料强度上分别考虑了概率原则，然而，它把荷载和抗力分开考虑，而不是从结构构件的整体性出发考虑结构的可靠度，因而无法触及结构可靠度的核心——结构的失效概率，并且各分项安全系数主要依据工程经验确定，所以称其为半概率设计法。目前我国大部分现行公路桥梁结构和路面结构设计规范所采用的设计理论都属于这一水准。

半概率设计法基本上分为如下三个步骤：

- (1) 按照概率取值原则确定极限状态函数中抗力变量 R 和荷载变量 S 的标准值；
- (2) 半概率地根据工程实际经验规定材料设计强度及设计荷载；
- (3) 由材料设计强度值计算出截面抗力，由设计荷载计算出荷载效应，并进行判断。

2. 水准 II——近似概率设计法

这是目前在国际上已经进入实用阶段的概率设计法。它运用概率论和数理统计对工程结构、构件或截面设计的“可靠概率”做出较为近似的相对估计。我国《工程结构可靠度设计统一标准》(GB 50153—92)^[4]以及《建筑结构设计统一标准》(GBJ 68—84)^[5]、《铁道工程结构可靠度设计统一标准》(GB 50216—94)以及《公路工程结构设计统一标准》(GB/T 50283—1999)^[6]等采用的以概率理论为基础的一次二阶矩极限状态设计方法就属于这一水准的设计方法。虽然这已经是一种概率方法，但是由于在分析中忽略了或简化了基本变量随时间变化的关系，确定基本变量的分布时受现有信息量限制而具有相当的近似性，并且为了简化设计计算，将一些复杂的非线性极限状态方程线性化，所以，它仍然只是一种近似的概率法。不过，在现阶段，它确实是一种处理结构可靠度的比较合理且可行的方法。本书第三章将对此予以详细讨论。

3. 水准 III——全概率设计法

全概率设计法是一种完全基于概率理论的较理想的方法。它不仅把影响结构可靠度的各种因素用随机变量概率模型去描述,更进一步考虑随时间变化的特性并用随机过程概率模型去描述,而且,是在对整个结构体系进行精确概率分析的基础上,以结构的失效概率作为结构可靠度的直接度量。这当然是一种完全的、真正的概率方法。目前,这还只是值得开拓的研究方向,真正达到实用还需经历较长的时间。在以上的后两种水准中,水准方法 II 是水准方法 III 的近似。在水准方法 III 的基础上再进一步发展就是运用优化理论的最优全概率法。总之,结构可靠度理论研究的前景十分广阔,有待众多研究人员做更深入的分析。

结构可靠度主要研究的是设计的结构在其基准期内的任何阶段超过极限状态的概率的计算和预测问题。而结构安全度的研究主要与结构超过承载能力极限状态的问题有关。从概率论角度讲,对于任何事件,超过极限状态都有其各自概率,该概率是表征出现失效可能性大小的数值度量。对于具有相似性的结构来说,这种度量可从事件发生的长期频率获得,或者简单地用一个数值作主观估计。实际上,要进行足够长时间的观测通常是不可能的,所以,就结构及其性能而言,常常将主观估计和客观观测频率结合起来以预测结构从整体上超过各种极限状态的概率。

1.2 结构可靠度与极限状态

工程结构的可靠度通常受各种作用效应、材料性能、结构几何参数、计算模式准确程度等诸多因素的影响。在进行结构可靠度分析和设计时,应针对所要求的结构各种功能,把这些有关因素作为基本变量 X_1, X_2, \dots, X_n 来考虑,由基本变量组成的描述结构功能的函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为结构功能函数。同时也可以将若干基本变量组合成综合变量,例如将作用方面的基本变量组合成综合作用效应 S 抗力方面的基本变量组合成综合抗力 R 从而结构的功能函数为 $Z = R - S$ 。

如果对功能函数 $Z = R - S$ 作一次观测,可能出现如下三种情况:

$Z = R - S > 0$ 表明结构处于可靠状态;

$Z = R - S < 0$ 表明结构已失效或破坏;

$Z = R - S = 0$ 表明结构处于极限状态。

结构的极限状态由极限状态方程加以描述。显然,不同的设计问题,功能函数及相应的极限状态方程的形式和内容均不相同。只要对作用效应和结构抗力赋予不同的意义,各类极限状态方程仍可用通式 (1-1) 表示。

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (1-1)$$

完成预定功能的标志可用‘极限状态’来衡量。若结构的整体或其一部分超过某一特定状态时结构就不能满足设计规定的某一功能这种状态称为极限状态。极限状态是区分结构工作状态为可靠与失效的标志,对于结构的各种极限状态,均应明确规定其标志及限值。一般情况下,结构的极限状态又可分为承载能力极限状态、正常使用极限状态和‘破坏—安全’极限状态。

1. 承载能力极限状态

这种极限状态对应于结构或构件达到最大承载能力或出现不适于继续承载的变形。承载能力极限状态直接关系到结构的安全与否,任何工程结构均需做承载能力极限状态的设计,且要求其出现的失效概率相当低。当结构或构件出现下列情况之一时,即认为超过了承载能力极限状态:

- (1) 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡（如滑动、倾覆等）；
- (2) 结构构件或连接处因超过了材料的强度而破坏（包括疲劳破坏），或因过度变形而不适于继续承载；
- (3) 结构转变为机动体系；
- (4) 结构或构件丧失稳定（如压屈等）。

2. 正常使用极限状态

这种极限状态对应于结构或构件达到正常使用或耐久性能的某项规定限值，涉及结构的工作条件和耐久程度。一般说来，公路桥梁结构均需做正常使用极限状态的设计，当结构或构件出现下列情况之一时，即认为超过了正常使用极限状态：

- (1) 影响正常使用或外观的变形；
- (2) 影响正常使用或耐久性能的局部破坏（包括裂缝）；
- (3) 影响正常使用的振动；
- (4) 影响正常使用的其他特定状态。

3. “破坏—安全”极限状态

这种极限状态又称为条件极限状态。超过这种极限状态而导致的破坏，是指容许结构物可以发生的局部破坏，而对已发生局部破坏结构的其余部分，应该具有适当的可靠度，能继续承受降低了的设计荷载。其指导思想是，当偶然事件发生后，要求结构仍保持完整无损是不现实的，也是没有必要和不经济的，故只能要求结构不致因此而造成更严重的损失。所以这种设计理论可应用于桥梁抗震和连拱推力墩的计算等方面。

欧洲混凝土委员会、国际预应力混凝土协会、国际标准化组织等国际组织，一般将极限状态分为两类：承载能力极限状态和正常使用极限状态。加拿大曾提出三种极限状态，即破坏极限状态、损伤极限状态和使用极限状态。其中损伤极限状态是由混凝土的裂缝或碎裂而引起的损坏，因其对人身安全危险性较小，可允许比破坏极限状态具有较大一些的失效概率。我国的《工程结构可靠度设计统一标准》（GB 50153—1992）将极限状态划分为承载能力极限状态和正常使用极限状态两类。同时提出，随着技术进步和科学发展，在工程结构上还应考虑“连续倒塌极限状态”，即万一一个别构件局部破坏，整个结构仍能在一定时间内保持必需的整体稳定性，防止发生连续倒塌。广义地说，这是为了避免出现与破坏原因不相称的结构破坏。这种状态主要是针对偶然事件如撞击、爆炸等而言的。《公路工程结构可靠度设计统一标准》（GB/T 50283—1999）暂未考虑连续倒塌极限状态。

目前，结构可靠度设计一般是将赋予概率意义的极限状态方程转化为极限状态设计表达式，此类设计均可称为概率极限状态设计。工程结构设计中应用概率意义上的可靠度、可靠概率或可靠指标来衡量结构的安全程度，是工程结构设计思想和设计方法的一大进步。实际上，结构的设计不可能是绝对可靠的，至多是说它的不可靠概率或失效概率相当小，关键是结构设计的失效概率小到何种程度人们才能比较放心地接受。以往采用的容许应力和定值极限状态等传统设计方法实际上也具有一定的设计风险，只是其失效概率未像现在这样被人们明确地揭示出来。

1.3 结构可靠度与失效概率^[1,2,5,7,8,9]

基本的结构可靠度问题只考虑由一个抗力 R 抵抗一个荷载效应 S 的情形。 S 和 R 分别

由一个已知的概率密度函数 $f_s(\cdot)$ 和 $f_R(\cdot)$ 所描述,且 R 和 S 都必须以相同的单位表达。

1.3.1 结构的失效概率

为方便起见,而且又不失一般性,在此仅考虑一个结构构件的可靠度,并且按照通常规定,如果结构构件的抗力 R 小于作用在其上的荷载效应 S , 就认为这个结构构件已经失效了。结构构件的失效概率可按下列的任何一种方式阐述:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P(R/S \leq 1) = P(\ln R - \ln S \leq 0) \quad (1-2)$$

或更一般的

$$P_f = [G(R \leq S) \leq 0] \quad (1-3)$$

式中, $G(\cdot)$ 被定义为“结构功能函数”并且失效概率与超过极限状态的概率是等同的。

S 和 R 的一般概率密度函数 $f_S(\cdot)$ 和 $f_R(\cdot)$ 以及联合概率密度函数 $f_{RS}(r, s)$ 如图 1-1 所示。对于任意无穷小的元素 (x, s) 当 x 和 s 趋近于 0 时, $f_{RS}(r, s)$ 代表 R 在 x 和 $(x + x)$ 之间取值及 S 在 s 和 $(s + s)$ 之间取值的概率。在图 1-1 中, 式 (1-3) 由图中的阴影失效区域 D 表示, 失效概率变为:

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \iint_D f_{RS}(r, s) dr ds \quad (1-4)$$

当 R 和 S 独立时, $f_{RS}(r, s) = f_R(r)f_S(s)$ 因此式 1-4 变为:

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s \geq r} f_R(r)f_S(s) dr ds \quad (1-5)$$

对于任何随机变量 X , 只要 $x \geq y$, 累积分布函数 $F_X(x)$ 由下式给出:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

上式适合于一般情况。对于特殊情形, 即当 R 和 S 相互独立时, 表达式 (1-5) 可按下面的形式重写:

$$P_f = P(R - S \leq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (1-6)$$

这个积分被称作“卷积积分”参考图 1-2 可容易地对其意义作出解释。 $F_R(x)$ 是 $R \leq x$ 的概率 或者构件的实际抗力 R 比 x 的某些值小的概率, 则这个概率表示失效概率。 $f_S(x)$ 项表示作用在构件上的荷载效应 S 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时在 x 和 $(x + \Delta x)$ 之间具有某一值的概率。通过考虑所有可能的 x 值 即对所有 x 积分, 就可得到总的失效概率。在图 1-3 中同样可以看到这一点 图中沿同一轴做出了边缘密度函数 $f_S(\cdot)$ 和 $f_R(\cdot)$ 。

通过式 (1-5) 的 $f_{RS}(\cdot)$ 中的积分 积分的阶数降低了一阶 这是很方便和有用的 但不具有普遍性 因为这只有假设 R 和 S 独立时才是成立的。一般说来, 各变量之间可能存在相关性。

式 (1-6) 的另外一种形式为:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(x)] f_R(x) dx \quad (1-7)$$

这就是将荷载超过抗力的所有抗力情形进行简单的叠加。

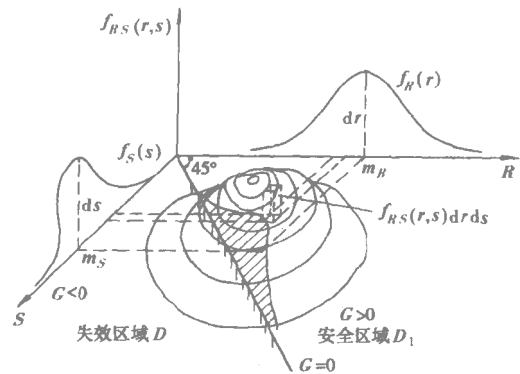


图 1-1 确定失效概率的积分区域 D

式 (1-5) ~ (1-7) 所示的积分下限不可能得到完全满足，因为抗力为负值通常是不符合实际的。由于将 R 和 S 或两者都模拟为在低尾无限制的分布（如正态分布）不是十分精确，所以应当严格地将积分下限规定为零。不精确完全是由 R 和 S 的模型产生的，而不是包含于式 (1-5) ~ (1-7) 的理论所产生的。

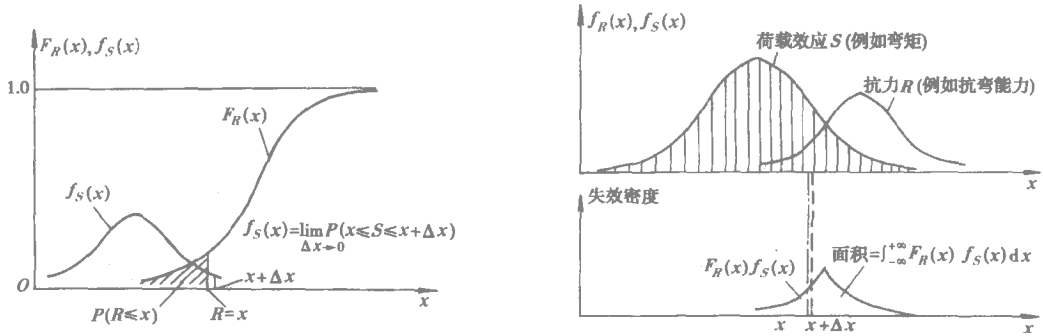


图 1-2 基本的 $R-S$ 问题: $F_R(x), f_S(x)$ 的描述 图 1-3 基本的 $R-S$ 问题: $F_R(x), f_S(x)$ 的描述

对非阴影区域积分，得到结构的可靠概率 P_r 为：

$$P_r = P(R - S > 0) = \iint_{D_1} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (1-8)$$

结构的可靠和失效是两个对立的事件 由概率论可知 失效概率和可靠概率互补 即：

$$P_r + P_f = 1 \quad (1-9)$$

用概率的观点来研究结构的可靠性，综合考虑投资风险和社会、经济后果，只要失效概率很小，小到人们可以接受的程度，就认为结构设计是可靠的，这就是概率极限状态设计的基本思想。

例 1-1 某桥梁有一构件的材料强度 R 服从均值 $m_R = 200\text{N/mm}^2$ 和标准差 $\sigma_R = 5\text{N/mm}^2$ 的正态分布。作用于构件的应力 S 服从指数分布 其概率密度函数为 $f_S(s) = \lambda e^{-\lambda s} (s \geq 0)$ 其均值 $m_S = 1/\lambda, \sigma_S = 1/\lambda, m_S = \sigma_S = 50\text{N/mm}^2$ 试求该构件的可靠概率 P_r 。

解 由式 (1-5) 有：

$$\begin{aligned} P_r &= \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \left[\int_0^r f_S(s) ds \right] dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-m_R}{\sigma_R}\right)^2\right] \left[\int_0^r \lambda e^{-\lambda s} ds \right] dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-m_R}{\sigma_R}\right)^2\right] [1 - \exp(-\lambda r)] dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-m_R}{\sigma_R}\right)^2\right] dr - \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma_R^2}{2} - m_R\lambda\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{r-(m_R-\lambda\sigma_R^2)}{\sigma_R}\right]^2\right\} dr \\ &= \Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{m_R}{\sigma_R}\right) - \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma_R^2}{2} - m_R\lambda\right) \times \left[\Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{m_R-\lambda\sigma_R^2}{\sigma_R}\right) \right] \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{200}{5}\right) - \exp\left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{50} \times 5\right)^2 - 200 \times \frac{1}{50}\right] \times \left[1 - \Phi\left(-\frac{200-1/50 \times 5^2}{5}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= 1 - 0.0 - \exp(-3.995)[1 - 0] = 1 - 0.0184 = 0.9816$$

1.3.2 广义概率极限状态度量方法

设广义的结构功能函数为 $G(X)$ 其中 X 代表一系列基本随机变量, 那么式 (1-4) 的广义化公式为:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] = \int \cdots \int_{G(X) \leq 0} f_X(x) dx \quad (1-10)$$

式中 $f_X(x)$ 为 n 个基本变量的联合概率密度函数。应该指出的是, 现在不再需要结构抗力 R 和荷载效应 S 相互独立, 因为它们都通过基本变量 X 来描述。如果各基本变量本身相互独立, 则更有利于问题的求解, 并有如下关系:

$$f_X(X) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) \cdots$$

其中 $f_{X_i}(x_i)$ 为基本变量 X_i 的边缘概率密度函数。

式 (1-10) 中的积分区域 $G(X) \leq 0$ 表示超越极限状态的那一部分空间, 这与图 1-1 所示的简单问题 $R - S \leq 0$ 类似。通常将极限状态方程 $G(X) = 0$ 定义为在 n 维基本变量空间中满足可靠要求的 $G > 0$ 和不满足可靠要求的 $G < 0$ 区域之间的边界, 并称之为“广义极限状态方程”。

所谓广义极限状态度量, 就是根据在 n 维空间中由广义极限状态方程确定的失效区域所求得的式 (1-10) 的失效概率对结构可靠性进行度量。然而, 除特殊情形外, 在失效区域 $G(X) \leq 0$ 上进行积分不能求得精确解。

1.4 结构可靠指标与分项系数

1.4.1 结构可靠指标

为说明问题的方便起见 设 R 和 S 都服从正态分布, 且极限状态方程为 $Z = R - S = 0$ 。由于可靠指标与可靠概率 P_r 和失效概率 P_f 密切相关 因此从 P_f 入手讨论可靠指标。对于图 1-4 所示的坐标体系 有

$$P_f = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right] dz \quad (1-11)$$

现将 Z 的正态分布 $N(m_Z, \sigma_Z)$ 转换为标准正态分布 $N(0, 1)$ 引入标准化变量 $t(m_t = 0, \sigma_t = 1)$,

$$t = \frac{z - m_Z}{\sigma_Z}, dz = \sigma_Z dt$$

$$\text{当 } z \rightarrow -\infty, t \rightarrow -\infty$$

$$\text{当 } z = 0, t = -m_Z/\sigma_Z$$

将以上结果代入后得:

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\frac{m_Z}{\sigma_Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi\left(\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{m_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (1-12)$$

式中: $\Phi(\quad)$ 为标准化正态分布函数。

现引入符号 β , 并令

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (1-13)$$

$$\text{得: } P_f = \Phi(-\beta) \quad (1-14)$$

式中: β ——无量纲系数, 称为可靠指标。

式(1-14)表示了失效概率与可靠指标之间的关系。利用式(1-9)还可导出可靠指标 β 同可靠度 P_r 的一一对应关系为:

$$P_r = 1 - P_f = 1 - \Phi(-\beta) = \Phi(\beta) \quad (1-15)$$

其中:

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

将 β 称作结构的可靠指标的原因是:

1. β 是失效概率和可靠概率的度量, β 与 P_f 或 P_r 具有一一对应的数量关系, 这可从表 1-1 和式 (1-14)、(1-15) 看出来, β 越大 则失效概率 P_f 越小(即阴影面积越小)可靠概率越大。

可靠指标 β 与失效概率 P_f 的关系

表 1-1

β	1.0	1.64	2.00	3.00	3.71	4.00	4.50
P_f	5.87×10^{-2}	5.05×10^{-2}	2.27×10^{-2}	1.35×10^{-3}	1.04×10^{-4}	3.17×10^{-5}	3.40×10^{-6}

2. 如图 1-4 所示 功能函数的概率密度函数为 $f_Z(z)$, 平均值为 m_Z , 标准差为 σ_Z 。在横坐标轴 z 上 从坐标原点 $z=0$ 失效点 到密度函数曲线的平均值 m_Z 处的距离为 $\beta\sigma_Z$ 若 $\beta\sigma_Z$ 大, 则阴影部分的面积小, 失效概率 P_f 小 结构可靠度大 反之, $\beta\sigma_Z$ 小 阴影部分面积大 失效概率 P_f 大 结构可靠度小。

3. 对于不同的正态分布(设分布函数为 $F_i(X)$) 只要各自均值 μ_i 和标准差 σ_i 的比值 β_i 相等 那么 $F_i(\mu_i - \beta_i \cdot \sigma_i) = F_i(0)$ 即 P_f 就相等。对于某些非正态分布 如对数正态分布、极值 I 型分布等, 若服从同一分布类型的不同随机变量各自的均值 μ_i 和标准差 σ_i 的比值 γ_i 相等 则其分布函数 $F_i(\mu_i - \gamma_i \cdot \sigma_i)$ 同样也相等。不过 此时 $F_i(0)$ 就不能理解为 P_f 因为 γ_i 与 β_i 的意义有所不同, 对于特定的分布类型存在着其特定的对应关系。由于由 γ_i 不便于确定 P_f 。

不利于问题的分析研究, 因此采用较为方便的正态分布数字特征表示方法 [10]。

4. 如图 1-5 所示, 功能函数为某一概率密度函数 $f_Z(z)$ 时, 由 $\beta = m_Z/\sigma_Z$ 可知 当 $\sigma_Z =$ 常量时 β 只随平均值 m_Z 而变。而当 β 增加时 会使概率密度曲线由于 m_Z 的增加而向右移动(如图中的虚线所示) 即 P_f 将变小 变为 P_f' 结构可靠概率增大。

以上分析表明, 结构可靠度既可用失效概率 P_f 来描述和度量 也可用 β 来描述和度量, 工程

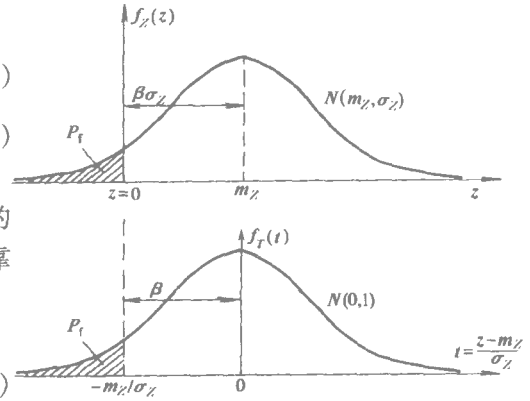


图 1-4 正态分布和标准正态分布坐标系

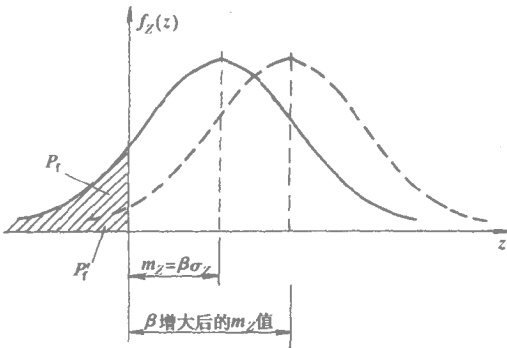


图 1-5 可靠指标 β 与平均值 m_Z 关系图

上目前常用 β 表示结构的可靠程度，并称之为结构的可靠指标。

可靠指标 β 的计算公式(1-13)是在 R 和 S 都服从正态分布的情况下得到的。如果 R 和 S 都不服从正态分布，但能求出 Z 的平均值 m_Z 和标准差 σ_Z ，则由式 1-13 算出的 β 值是近似的，或称名义的，不过在工程中仍然具有一定的参考价值。

1.4.2 可靠指标 β 的两个常用公式

1. 两个正态变量 R 和 S 具有极限状态方程

$$Z = R - S = 0 \quad (1-16)$$

由于 R 和 S 都服从正态分布，且其平均值和标准差分别为 m_R, m_S 和 σ_R, σ_S ，则功能函数 $Z = R - S$ 也服从正态分布，其平均值和标准差分别为 $m_Z = m_R - m_S$ 及 $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ 。由前面的讨论可得：

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (1-17)$$

这个公式是美国的 Cornell 于 1967 年最先提出来的，它是结构可靠度分析中一个最基本的公式。

例 1-2 设某构件中某点的抗力强度为 R ，荷载效应应力为 S ，已知 R 和 S 的平均值、标准差分别为： $(m_R, \sigma_R) = (68540, 6431) \text{N/cm}^2$ ， $(m_S, \sigma_S) = (37289, 4130) \text{N/cm}^2$ ，试求其可靠度。

解 根据式 (1-17) 得：

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{68540 - 37289}{\sqrt{6431^2 + 4130^2}} = 4.09$$

由式 (1-15) 可求出相对应的可靠度：

$$P_r = \Phi(\beta) = \Phi(4.09) = 99.99\%$$

2 两个对数正态分布变量 R 和 S 具有极限状态方程

$$Z = \ln R - \ln S = 0$$

因为抗力和荷载效应大多趋向于偏态分布，按正态分布计算将产生较大的误差，因此，Rosenblueth 和 Estera 等学者建议采用 R 和 S 的对数正态分布模型。将 $\ln R$ 和 $\ln S$ 的平均值与标准差分别计为 $m_{\ln R}, m_{\ln S}, \sigma_{\ln R}, \sigma_{\ln S}$ 。由于 $\ln R$ 和 $\ln S$ 都是正态分布，因此 Z 也是正态分布，其平均值和标准差为 $m_Z = m_{\ln R} - m_{\ln S}$ 和 $\sigma_Z = (\sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2)^{1/2}$ 。

为了直接利用 R, S 的一、二阶矩，通过变换可以用 m_R, m_S 和 σ_R, σ_S 来表示 m_Z, σ_Z 。根据对数正态分布的性质， $\ln R$ 和 $\ln S$ 的方差分别为：

$$\sigma_{\ln R}^2 = \ln(1 + V_R^2)$$

$$\text{和} \quad \sigma_{\ln S}^2 = \ln(1 + V_S^2)$$

$$\text{其中：} \quad V_R = \frac{\sigma_R}{m_R}, \quad V_S = \frac{\sigma_S}{m_S}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_Z &= [\ln(1 + V_R^2) + \ln(1 + V_S^2)]^{1/2} \\ &= \{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]\}^{1/2} \end{aligned} \quad (1-18)$$

$\ln R$ 和 $\ln S$ 的平均值分别为：

$$m_{\ln R} = \ln m_R - \frac{1}{2} \sigma_{\ln R}^2$$

和

$$\begin{aligned}
 m_{\ln S} &= \ln m_S - \frac{1}{2} \sigma_{\ln S}^2 \\
 \therefore m_Z &= \ln m_R - \ln m_S - \frac{1}{2} (\sigma_{\ln R}^2 - \sigma_{\ln S}^2) \\
 &= \ln \left(\frac{m_R}{m_S} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + V_R^2}{1 + V_S^2} \right) \\
 &= \ln \left[\frac{m_R}{m_S} \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \right] \quad (1-19)
 \end{aligned}$$

最后由式 1-13 得

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} = \frac{\ln \left(\frac{m_R}{m_S} \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \right)}{\sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]}} \quad (1-20)$$

当 V_R 和 V_S 都小于 0.3 时, 上式可进一步得到简化:

$$\ln(1 + V_R^2) \approx V_R^2, \ln(1 + V_S^2) \approx V_S^2$$

其误差小于 2%。当 V_R 和 V_S 很小或基本上相等时有

$$\sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \approx 1$$

将以上各式代入式(1-20) 得简化后的对数正态分布可靠指标 β 的计算公式为:

$$\beta = \frac{\ln(m_R/m_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \quad (1-21)$$

加拿大基于可靠度理论的房屋和公路桥梁结构设计规范以及美国基于可靠度理论的钢结构设计规范就是采用这个公式作为构件设计的基本公式。

例 1-3 某构件的强度 R 和荷载效应 S 分别服从

$R \sim (m_R, \sigma_R) = (13506, 1289.5) \text{N/cm}^2$, 对数正态分布

$S \sim (m_S, \sigma_S) = (5894, 1796.4) \text{N/cm}^2$ 对数正态分布

试求其可靠度。

解: $m_R = 13506 \text{N/cm}^2$, $m_S = 5894 \text{N/cm}^2$

$$V_R = \sigma_R/m_R = 0.0955, V_S = \sigma_S/m_S = 0.3048$$

利用式(1-20)得

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\ln \left(\frac{m_R}{m_S} \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \right)}{\sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]}} \\
 &= \frac{\ln \left(\frac{13506}{5894} \sqrt{\frac{1 + 0.3048^2}{1 + 0.0955^2}} \right)}{\sqrt{\ln[(1 + 0.0955^2)(1 + 0.3048^2)]}} \\
 &= 2.777
 \end{aligned}$$

相对应的可靠度为:

$$P_r = \Phi(\beta) = \Phi(2.777) = 99.72\%$$

如果利用近似公式(1-21) 则有

$$\beta = \frac{\ln(m_R/m_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} = \frac{\ln(13506/5894)}{\sqrt{0.0955^2 + 0.3048^2}} = 2.596$$

相对应的可靠度为：

$$P_r = \Phi(2.59) = 99.52\%$$

一般说来当 V_R 和 V_S 小于 0.3 时近似式 1-21 的误差小于 2%。而工程结构中随机变量的变异系数值都小于 0.3 所以式 1-21 还是用得较多的。

1.4.3 可靠指标 β 的几何解释

前面已经对可靠指标 β 的计算公式、物理意义和失效概率的关系进行了分析和讨论，为了便于读者更形象和更清晰地了解可靠指标 β ，下面再对其几何含义做进一步讨论。

1. 特殊情形 I 两个正态变量 R 和 S 的标准差相等

设两个正态变量 R 和 S 的标准差相等，而平均值分别为 m_R 和 m_S 极限状态方程为：

$$Z = R - S = 0$$

在直角坐标系 ROS 中失效边界线是一条直线如图 1-6 所示。如果把 σ 作为一个单位来测量，则可以证明平均值点 (m_R, m_S) 到失效边界上的最短距离就是 β 值。现证明如下：

$$(1) \text{ 当 } \sigma_R = \sigma_S = \sigma \text{ 时, } \sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \sqrt{2}\sigma$$

$$(2) \beta = m_Z / \sigma_Z = m_Z / (\sqrt{2}\sigma)$$

(3) 平均值点到失效边界上的最短距离为：

$$\overline{MP^*} = \overline{MN} \cos 45^\circ = m_Z / \sqrt{2} = \beta\sigma$$

即 $\overline{MP^*}$ 是 β 的 σ 倍，由此可见，如果取 σ 为一个单位，则平均值点到失效边界上的最短距离 $\overline{MP^*}$ 就是 β 值。

在对 β 作出几何解释时，除了应了解失效边界以及由其分隔出来的失效区和可靠区外，还必须注意两个点： M 和 P^* 。 M 由 R 和 S 的平均值确定； P^* 是与设计规定值对应的点，它位于失效边界上，是与结构最大可能失效概率对应的点，通常被称为设计验算点，用作校核。图 1-7 示出了 Z 为一般正态分布和变换为标准正态分布后 P^* 和 M 两个点的位置。

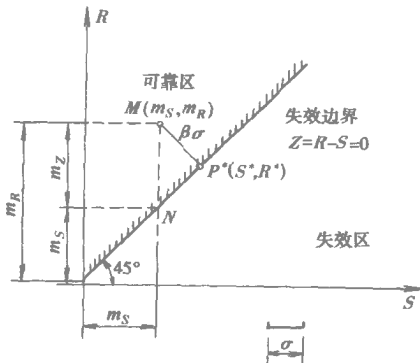


图 1-6 失效边界图

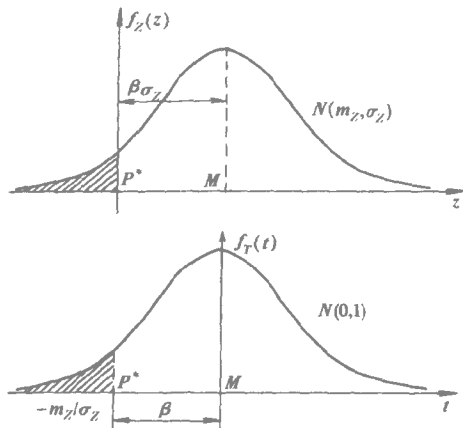


图 1-7 P^* 和 M 位置图

2 特殊情形 II 两个正态变量 R 和 S 的标准差不相等

在此情形下, 如果再用上面的坐标系 ROS 就不利于问题的求解 因此 需要建立新的坐标系。

新坐标系是按如下方式建立的: 首先在 ROS 中进行平移 原点由 O 点移到 \hat{O} (M 点处); 然后通过数学变换, 使 σ_R 和 σ_S 都变成一个单位量。

最后由情形 I 可知 在新坐标系 $\hat{R}\hat{S}$ 中的原点到失效边界上的最短距离 $\overline{\hat{O}P^*}$ 就是 β 值 参见图 1-8。由此可知 在经过变换后的新坐标系中, R 和 S 必须满足条件:

平均值 $m_{\hat{R}} = 0, m_{\hat{S}} = 0$ 标准差 $\sigma_{\hat{R}} = 1, \sigma_{\hat{S}} = 1$ 。

现简要证明如下:

在新坐标系 $\hat{R}\hat{S}$ 下 令新变量 \hat{R} 和 \hat{S} 分别为:

$$\hat{R} = \frac{R - m_R}{\sigma_R}, \hat{S} = \frac{S - m_S}{\sigma_S} \quad (1-22)$$

由于 $m_R, m_S, \sigma_R, \sigma_S$ 都是常量, 因此, 根据附录 A 可以证明 \hat{R} 和 \hat{S} 的平均值和标准差分别为 0 和 1。上述坐标系的变换, 实质上是把正态分布 $N(m_i, \sigma_i)$ 标准化为 $N(0, 1)$ 。

从式 (1-22) 中解出 R 和 S 代入极限状态方程

$$Z = R - S = 0$$

得

$$m_R + \hat{R}\sigma_R - (m_S + \hat{S}\sigma_S) = 0$$

或

$$\hat{R}\sigma_R - \hat{S}\sigma_S + m_R - m_S = 0 \quad (1-23)$$

变换后的坐标系如图 1-9 所示。

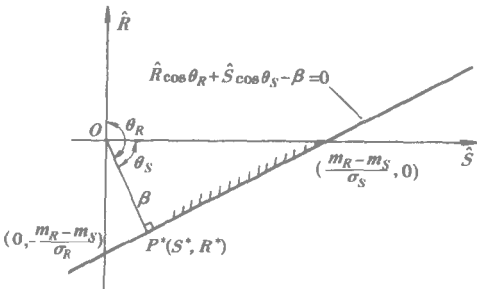


图 1-9 变换坐标系后的失效边界图

极限状态方程 (1-23) 还可用直线的法线式表示

为:

$$\hat{R}\cos\theta_R + \hat{S}\cos\theta_S - \overline{\hat{O}P^*} = 0 \quad (1-24)$$

法线 $\overline{\hat{O}P^*}$ 与各坐标向量的方向余弦为:

$$\cos\theta_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (1-25)$$

$$\cos\theta_R = \frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

将式 (1-23) 中各项除以 $-\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$, 并把式

(1-25) 中各项的值代入 整理后得

$$\hat{R}\cos\theta_R + \hat{S}\cos\theta_S - \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = 0 \quad (1-26)$$

比较式 (1-24) 和式 (1-26) 并对照式 1-17 得

$$\overline{\hat{O}P^*} = \beta$$

可见可靠指标 β 是新坐标系原点 \hat{O} 到失效边界的最短距离, 因此求解可靠指标 β , 实际上就是求解长度 $\overline{\hat{O}P^*}$ 的问题。

3. 多个正态变量且标准差不相等的情形

当极限状态方程中包含多个正态分布随机变量时，根据由两个随机变量情形得出的定义，此时求可靠指标即为求一新坐标体系中由原点到极限状态曲面的法线距离。

若极限状态方程

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = C \quad (1-27)$$

式中 X_1, X_2, \dots, X_n 为相互独立的正态分布随机变量。它表示一个非线性失效曲面，将 n 维欧氏空间分成可靠区 $g(\) > 0$ 和失效区 $g(\) < 0$ 两个部分。做坐标变换 即标准化 以标准正态随机变量 \hat{X}_i 来代替正态随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 即

$$\hat{X}_i = \frac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (1-28)$$

则极限状态方程变换为：

$$Z = g(\hat{X}_1\sigma_{X_1} + m_{X_1}, \hat{X}_2\sigma_{X_2} + m_{X_2}, \dots, \hat{X}_n\sigma_{X_n} + m_{X_n}) = 0 \quad (1-29)$$

与式(1-25)相似 在新坐标系中 极限状态曲面在 P^* 点的法线 $\hat{O}P^*$ 对坐标向量的方向余弦为：

$$\cos\theta_{\hat{X}_i} = \frac{-\left.\frac{\partial g}{\partial \hat{X}_i}\right|_{P^*}}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\left.\frac{\partial g}{\partial \hat{X}_i}\right|_{P^*}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (1-30)$$

式中 $\left.\frac{\partial g}{\partial \hat{X}_i}\right|_{P^*}$ 表示偏导数在设计验算点 P^* 处赋值。 P^* 点在新坐标系中的坐标为：

$$\hat{X}_i^* = \cos\theta_{\hat{X}_i} \cdot \beta \quad (1-31)$$

代入转换后的极限状态方程式 (1-29) 中 则

$$Z = g(\cos\theta_{\hat{X}_1} \cdot \beta\sigma_{X_1} + m_{X_1}, \cos\theta_{\hat{X}_2} \cdot \beta\sigma_{X_2} + m_{X_2}, \dots, \cos\theta_{\hat{X}_n} \cdot \beta\sigma_{X_n} + m_{X_n}) = 0$$

类似于两个正态变量的情况，这时可靠指标 β 是新的空间坐标系中原点 \hat{O} 到极限状态曲面的最短距离。图 1-10 中表示三个正态变量的情况，图中 \hat{O} 到曲面的最短距离 $\hat{O}P^*$ 即 β 值 而 P^* 就是设计验算点。

1.4.4 可靠指标与分项系数的关系

传统的容许应力法和破坏阶段设计法的设计原则是抗力 R 不能小于荷载效应 S 其安全度是用安全系数来表示的，采用的单一安全系数是一个笼统的粗略的经验系数。例如，用平均值表达的单一平均安全系数 K 可以定义为：

$$K = \frac{\text{平均结构抗力}}{\text{平均荷载效应}} = \frac{m_R}{m_S} \quad (1-32)$$

其相应的设计表达式为：

$$m_R \geq K m_S \quad (1-33)$$

从统计数学观点来看 传统的安全系数 K 存在的突出问题是：

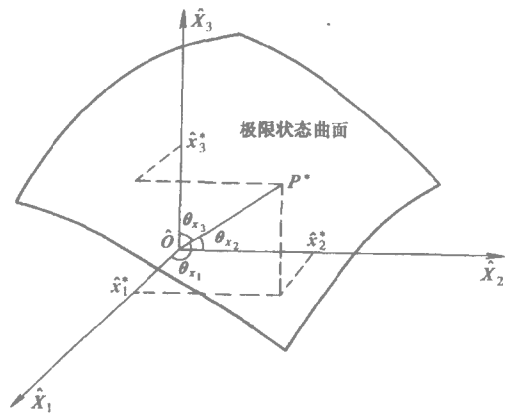


图 1-10 三个正态变量时 β 位置图

1. 没有将抗力和荷载效应的随机变量量化 (对不同材料 (如钢筋和混凝土) 不同荷载 (如恒载和活载) 以及其他影响结构安全度的因素 不能区别对待 细致分析 往往依赖于经验或工程判断方法取值 因此 不可避免地包含人为的因素 甚至主观臆断的成分 以至于可能使结构在某些情况下过分安全, 而在另外一些情况下却不安全。

2. 由式 (1-32) 可知, K 只与 R 和 S 的平均值的比值有关, 参见图 1-11 因此 这种系数是不能反映结构的真实失效情况的。例如, 图 1-11a) 和

b) 中, $K_1 = \frac{m_{R_1}}{m_{S_1}}$ 和 $K_2 = \frac{m_{R_2}}{m_{S_2}}$, 这说明它们的安全度一样。但实际上它们的失效概率 (与图中阴影部分的面积有关, 但失效概率并不就等于该阴影面积 却相差很多。由阴影部分的面积可以看出, 图 1-11b) 极限状态对应的失效概率远大于图 1-11a) 极限状态对应的失效概率。

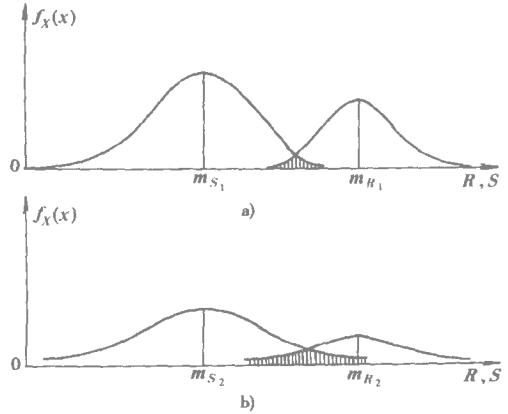


图 1-11 相同安全系数不同失效概率比较图

图 1-11 表明, P_f 不仅与 $f_R(r)$ 、 $f_S(s)$ 图形面积中心位置有关, 而且还与它们面积图形的离散程度 (可用 σ_R 、 σ_S 或 V_R 、 V_S 来表示) 有关, 传统的安全系数的明显缺点, 是没有能反映这一特征。但由式 (1-13) 所定义的可靠指标 β , 就较好地解决了这个问题。Freudenthal 研究了传统设计法中的安全系数和结构破坏概率之间的内在关系, 建立了结构可靠性分析的理想数学模型^[11,12]。

以上的分析, 还可以由数学公式加以说明。由两个正态变量导出的可靠指标式 (1-17) 有

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\frac{m_R}{m_S} - 1}{\sqrt{\left(\frac{m_R}{m_S}\right)^2 V_R^2 + V_S^2}} = \frac{K - 1}{\sqrt{K^2 V_R^2 + V_S^2}} \quad (1-34)$$

或

$$K = \frac{1 + \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2} - \beta^2 V_R^2 V_S^2}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad (1-35)$$

以上两式表明 可靠指标 β 除了与 R 和 S 的平均值之比 也就是与 K 有关外 而且与分布规律和变异系数 V_R 、 V_S 有关。另一方面, 安全系数的取值应与结构中各变量的分布规律、变异系数以及相应的可靠指标 β 有关。对于对数正态分布也可做类似的分析, 在此不再赘述。

针对传统设计方法存在的缺陷和不足, 有必要研究和采用更为合理的设计准则, 后来就进一步发展了现行的设计准则, 即所谓“分项系数极限状态设计”法。这种设计方法并不采用单一安全系数设计表达式, 而普遍采用分项系数表达式。例如在恒载和汽车等活载组合下, 设计表达式为:

$$\gamma_G m_G + \gamma_Q m_Q \leq \gamma_R m_R \quad (1-36)$$

式中: γ_R 为抗力分项系数; γ_G 为恒载分项系数 而 γ_Q 为活载分项系数。

分项系数是利用分离函数得到的, 分离函数的作用是将其与可靠指标联系起来, 把安全系数加以分离, 使其表达为分项系数的形式。这里分项系数与过去有本质的不同, 它摒弃了按经验的取值方法, 而是按规定的公式和统计参数进行计算, 赋予了概率的含义。这样做可以同

现行设计准则相配合,从而使基于可靠度的设计实用化^[13]。

下面介绍两种比较成熟的方法。

1. Lind 的 0.75 线性分离法^[8,14]

Lind 在研究将可靠度概念应用于加拿大房屋结构设计规范过程中,为了将可靠指标公式中的根式进行分离并使其线性化,引入了分离函数 φ_1 。

设 X_1, X_2 为任意两个变量,令 $V_1 = \frac{X_1}{X_2}$, 则

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}{X_1 + X_2} = \frac{\sqrt{1 + V_1^2}}{1 + V_1} \quad (1-37)$$

Lind 指出,当 $\frac{1}{3} \leq V_1 \leq 3$ 时,取 $\varphi_1 = 0.75$,相对误差不超过 6%,因而有

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \varphi_1 (X_1 + X_2) \approx 0.75 (X_1 + X_2) \quad (1-38)$$

利用上式,可以将设计表达式转化为含有基于可靠度的分项系数的形式。

设抗力 R 和荷载效应 S 均为正态分布,且满足条件 $\frac{1}{3} \leq \sigma_R/\sigma_S < 3$ 则可以得到

$$m_R - m_S = \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \approx 0.75 (\sigma_R + \sigma_S) \beta$$

将式中的标准差用变异系数表示,移项整理后得

$$(1 - 0.75 V_R \beta) m_R = (1 + 0.75 V_S \beta) m_S$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{OR} &= 1 - 0.75 V_R \beta \\ \gamma_{OS} &= 1 + 0.75 V_S \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-39)$$

则相应的设计表达式为:

$$\gamma_{OR} m_R \geq \gamma_{OS} m_S \quad (1-40)$$

式中: γ_{OR} ——抗力平均值的分项系数;

γ_{OS} ——荷载效应平均值的分项系数。

如果荷载效应 S 是由恒载 G 和汽车活载 Q 的效应组成的即 $S = R + G$,且 $1/3 \leq \sigma_G/\sigma_Q < 3$,则同理还可以对 γ_{OS} 进行二次分离。

由式 (1-39) 进行一次分离后有

$$m_R - m_S = \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \approx 0.75 (\sigma_R + \sigma_S) \beta$$

或

$$m_R - (m_G + m_Q) = 0.75 (\sigma_R + \sqrt{\sigma_G^2 + \sigma_Q^2}) \beta$$

进行二次分离后得

$$m_R - 0.75 V_R \beta m_R = m_G + 0.75^2 V_G \beta m_G + m_Q + 0.75^2 V_Q \beta m_Q$$

$$\text{从而得} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{OG} &= 1 + 0.75^2 V_G \beta = 1 + 0.5625 V_G \beta \\ \gamma_{OQ} &= 1 + 0.5625 V_Q \beta \\ \gamma_{OR} &= 1 - 0.75 V_R \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

相应设计表达式为:

$$\gamma_{OG} m_G + \gamma_{OQ} m_Q \leq \gamma_{OR} m_R \quad (1-42)$$

式中: γ_{OG} 为恒载效应平均值分项系数; γ_{OQ} 为活载效应平均值分项系数。

例 1-4 设 R, G, Q 均服从正态分布, $\beta = 3.5, K_0 = 2.0, V_R = 0.12, V_G = 0.10, V_Q = 0.24$ 。

求当平均荷载效应比值 $\rho_0 = \frac{m_Q}{m_G} = 1.0$ 时, 抗力分项系数 γ_{OR} 、恒载分项系数 γ_{OG} 、活载分项系数 γ_{OQ} 。

解 因为

$$V_S = \frac{\sigma_S}{m_S} = \frac{\sqrt{\sigma_G^2 + \sigma_Q^2}}{m_G + m_Q} = \frac{1}{1 + \rho_0} \sqrt{V_G^2 + \rho_0 V_Q^2} = \frac{1}{1 + 1} \sqrt{0.10^2 + 0.24^2} = 0.13$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_S} = \frac{V_R m_R}{V_S m_S} = \frac{m_R / m_S \cdot V_R}{V_S} = \frac{K_0 V_R}{V_S} = \frac{2 \times 0.12}{0.13} = 1.846 < 3$$

$$\frac{\sigma_Q}{\sigma_G} = \frac{V_Q m_Q}{V_G m_G} = \frac{V_Q \times \rho_0}{V_G} = \frac{0.24 \times 1}{0.10} = 2.4 < 3$$

两个比值都满足前述的条件 因此 可以利用二次分离函数公式确定分项系数 结果如下:

$$\gamma_{OR} = 1 - 0.75 V_R \beta = 0.685$$

$$\gamma_{OG} = 1 + 0.5625 V_G \beta = 1.197$$

$$\gamma_{OQ} = 1 + 0.5625 V_Q \beta = 1.473$$

Lind 的 0.75 线性分离法存在的问题是:

(1) 对荷载效应系数进行二次分离, 将产生累积误差。

(2) 适用范围的局限性, 当两变量的比值在区间 $(\frac{1}{3}, 3)$ 内时 采用线性分离 其相对误差

不超过 6%; 如果超出这一范围, 误差将会增大。例如, 当比值为 $\frac{1}{4}$ 或 4 时 相对误差为 9.1%。显然, 当随机变量的变异性相差较大时, 不宜采用这种方法。

2. 一般分离法

一般分离法是由我国四川省建筑科学研究所提出来的, 该法通过一定的数学变换, 定义分离函数 φ_1 , 然后进行分离。该法不仅可以用于两个变量的情况, 而且容易推广到多个非正态变量的情况, 具有很广泛的适用范围。

设有两个任意变量 X_i, X_j , 令:

$$\varphi_i = \frac{X_i}{\sqrt{X_i^2 + X_j^2}} = \frac{X_i}{X}, \varphi_j = \frac{X_j}{X} \quad (1-43)$$

φ_i, φ_j 称为分离函数 其值总小于 1 从而有

$$\sqrt{X_i^2 + X_j^2} = \frac{X_i^2 + X_j^2}{\sqrt{X_i^2 + X_j^2}} = \varphi_i X_i + \varphi_j X_j \quad (1-44)$$

当有 n 个变量 X_1, X_2, \dots, X_n 时, 分离函数变为:

$$\varphi_i = \frac{X_i}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}} \quad (1-45)$$

同时有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i X_i \quad (1-46)$$

下面讨论以上概念的具体应用。

(1) 正态分布

$$m_R - m_S = \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \beta \varphi_R \sigma_R + \beta \varphi_S \sigma_S$$

将 $\sigma_R = V_R m_R$ 、 $\sigma_S = V_S m_S$ 代入上式，移项整理后得

$$(1 - \varphi_R V_R \beta) m_R = (1 + \varphi_S V_S \beta) m_S$$

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{OR} &= 1 - \varphi_R V_R \beta \\ \gamma_{OS} &= 1 + \varphi_S V_S \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

相应的设计表达式为：

$$\gamma_{OS} m_S \leq \gamma_{OR} m_R \quad (1-48)$$

同理 作两次分离后 可得到由恒载 G 和活载 Q 产生效应下的分项系数为：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{OR} &= 1 - \varphi_R V_R \beta \\ \gamma_{OG} &= 1 + \varphi_G V_G \beta \\ \gamma_{OQ} &= 1 + \varphi_Q V_Q \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-49)$$

上式中分离函数为：

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R &= \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\sigma_R}{\sigma_Z}, \varphi_S = \frac{\sigma_S}{\sigma_Z} \\ \varphi_G &= \frac{\sigma_G}{\sigma_Z}, \varphi_Q = \frac{\sigma_Q}{\sigma_Z} \end{aligned} \right\} \quad (1-50)$$

分项系数设计表达式为：

$$\gamma_{OG} m_G + \gamma_{OQ} m_Q \leq \gamma_{OR} m_R$$

(2) 对数正态分布

仿照前面的方法 进行第一次分离可得

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{OR} &= \exp(-\varphi_R V_R \beta) \\ \gamma_{OS} &= \exp(-\varphi_S V_S \beta) \end{aligned} \right\} \quad (1-51)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{OR} &\approx 1 - \varphi_R V_R \beta \\ \gamma_{OS} &\approx 1 + \varphi_S V_S \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-52)$$

其中

$$\varphi_R = \frac{V_R}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} = \frac{V_R}{V}, \varphi_S = \frac{V_S}{V}$$

进行二次分离 用泰勒级数展开 取一阶近似且 $1/3 \leq \sigma_G/\sigma_Q < 3$ 可得 γ_{OG} 、 γ_{OQ} 的近似表达式：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{OG} &\approx 1 + \varphi_G V_G \beta \\ \gamma_{OQ} &\approx 1 + \varphi_Q V_Q \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-53)$$

其中

$$\varphi_G = \frac{V_G}{(1 + \rho_0) \sqrt{V_R^2 + V_S^2}} = \frac{V_G}{(1 + \rho_0) V}$$

$$\varphi_Q = \frac{\rho_0 V_Q}{(1 + \rho_0) V}$$

(3) 一般情况下的结构可靠指标与分项系数的关系

设极限状态函数 Z 为一组相互独立的随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的函数 即

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

现将 Z 在平均值处按泰勒级数展开，并取一阶近似式，即可得平均值和标准差的近似公式为：

$$m_Z \approx g(m_{X_1}, m_{X_2}, \dots, m_{X_n}) \quad (1-54)$$