

Gonglu Qiaoliang Dongli Xue

# 公路桥梁动力学

宋一凡 编著

人民交通出版社

# 前 言

公路桥梁动力学是现代公路桥梁发展的一个重要课题。一方面它能更真实地揭示出桥梁结构在汽车车辆荷载作用下的动态受力与变形本质,另一方面又能描述出桥梁结构在地震作用下的系统响应。因此,公路桥梁动力学已被列为公路桥梁工程专业研究生必修的一门学位课程,同时也是现代公路桥梁设计与施工技术人员的重要理论工具。尽管结构有限元等数值分析方法已相当普及,但作为描述公路桥梁结构内在本质的理论解析方法,对于建立现代公路桥梁结构动力分析模型和指导模型试验仍然具有相当重要的理论意义。本书以理论解析方法为基础并结合现代桥梁结构分析的有限元等数值方法编写,具有较强的理论性和实用性。

全书共分六章。第一章详细介绍了公路梁桥结构的动力特性与系统响应分析和弹塑性动力分析方法;第二章介绍了拱桥结构的动力特性分析方法;第三章介绍了悬索桥结构动力特性分析方法;第四章主要介绍了斜拉桥拉索的动力特性与索力动测原理和斜拉桥结构动力分析方法;第五章介绍了公路桥梁结构冲击系数概念和确定冲击系数的方法;第六章主要介绍了公路桥梁地震振动与地震响应分析方法,同时也介绍了公路桥梁结构抗震设计理论。

本书是作者广泛收集了国内外有关文献资料,连同作者近年来为公路桥梁工程专业硕士研究生教学讲义和科研成果一起编著而成。在编著过程中,作者得到了众多同事的大力协助并参考了大量文献,不论书末是否列出,在此一并致谢。为了本书的出版,编辑、校对付出了辛勤劳动,在此表示衷心感谢。

限于作者水平,书中难免还会有缺点,请读者批评指正。

作 者

1999年10月

## 内 容 提 要

本书全面介绍了公路桥梁动力学的理论解析方法,同时也介绍了公路桥梁抗震设计理论。主要内容包括:梁桥振动,拱桥振动,悬索桥振动,斜拉桥振动,桥梁冲击系数和抗震设计理论。

本书可作为公路桥梁工程专业研究生教学参考书,也可供从事公路桥梁工程专业教学、研究和设计人员参考。

## 公路桥梁动力学

宋一凡 编著

版式设计:周 园 责任校对:张 捷 责任印制:

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街10号 010 64216602)

各地新华书店经销

印刷厂印刷

开本:850×1168  $\frac{1}{32}$  印张: 字数: 千

年 月 第1版

年 月 第2版

年 月 第 版 第 次印刷 总第 次印刷

印数: 册 定价: 元

ISBN 7-114- -

# 目 录

第一章 梁桥振动.....	1
1.1 梁桥的振动方程 .....	2
1.1.1 艾勒尔—柏努利 ( Euler —Bernoulli) 梁的弯曲振动 方程 .....	2
1.1.2 轴向受力梁的弯曲振动方程 .....	4
1.1.3 铁木辛柯 ( Timoshenko) 梁的弯曲振动方程 .....	6
1.2 梁桥的弯曲固有振动.....	10
1.2.1 艾勒尔—柏努利 ( Euler —Bernoulli) 梁的弯曲固有 振动.....	10
1.2.2 轴向受力梁的弯曲固有振动.....	17
1.2.3 铁木辛柯 ( Timoshenko) 梁的弯曲固有振动.....	20
1.2.4 振型的正交性.....	22
1.2.5 连续梁的弯曲固有振动.....	27
1.2.6 带有集中质量梁的弯曲固有振动.....	34
1.3 梁桥固有振动分析的近似方法.....	38
1.3.1 能量法.....	38
1.3.2 等代梁法.....	47
1.3.3 加权残值法.....	48
1.4 带阻尼的梁桥弯曲固有振动.....	49
1.4.1 固有阻尼.....	50
1.4.2 附加阻尼.....	53
1.4.3 带阻尼的梁桥弯曲固有振动.....	54
1.5 定位激扰力作用下梁桥的强迫振动.....	59
1.5.1 无阻尼梁的强迫振动.....	59
1.5.2 有阻尼梁的强迫振动.....	67

1.6	梁桥的车辆强迫振动.....	74
1.6.1	匀速移动常量力的作用.....	75
1.6.2	匀速移动简谐力的作用.....	81
1.6.3	匀速滚动质量的作用.....	86
1.6.4	匀速移动弹簧—质量的作用.....	88
1.6.5	匀速移动双轴汽车荷载的作用.....	94
1.7	梁桥的弹塑性动力分析 .....	102
1.8	钢筋混凝土梁的动刚度分析模型 .....	105
1.8.1	直接加载模型 .....	106
1.8.2	弹性加载模型 .....	108
1.9	预应力钢梁桥的动刚度分析 .....	113
1.9.1	预应力索张拉后组合钢梁的平衡方程 .....	114
1.9.2	组合钢梁桥的固有振动方程 .....	116
第二章	拱桥振动.....	121
2.1	拱桥的静力平衡方程 .....	122
2.1.1	圆弧拱的平面挠曲平衡方程 .....	122
2.1.2	抛物线拱的平面挠曲平衡方程 .....	125
2.1.3	拱桥的空间弯扭平衡方程 .....	129
2.2	拱桥的固有振动 .....	135
2.2.1	圆弧拱的平面挠曲固有振动 .....	135
2.2.2	抛物线拱的平面挠曲固有振动 .....	138
2.2.3	拱的平面挠曲固有振动反对称基频的近似计算 ...	145
2.2.4	拱的侧向弯扭固有振动 .....	150
2.3	拱桥的车辆强迫振动 .....	157
2.3.1	匀速移动的简谐力的作用 .....	157
2.3.2	匀速移动双轴汽车荷载的作用 .....	161
2.4	拱桥的弯扭强迫振动 .....	163
第三章	悬索桥振动.....	168
3.1	悬索桥的平面弯曲固有振动 .....	168
3.1.1	静力平衡方程 .....	168

3.1.2	振动方程 .....	171
3.1.3	固有振动 .....	172
3.1.4	近似计算 .....	173
3.2	悬索桥的扭转固有振动 .....	175
3.3	悬索桥施工猫道的固有振动 .....	178
3.3.1	猫道的固有振动 .....	178
3.3.2	近似计算 .....	181
3.4	悬索桥的车辆强迫振动 .....	182
第四章	斜拉桥振动.....	189
4.1	斜拉索的振动特性 .....	189
4.1.1	水平张紧索的横向固有振动 .....	189
4.1.2	斜拉索的横向固有振动 .....	194
4.2	用振动法估测斜拉索拉力的实用公式 .....	202
4.2.1	频率方程的近似解 .....	203
4.2.2	计算斜拉索拉力的实用公式 .....	210
4.3	斜拉索的自激共振 .....	212
4.3.1	两自由度自激共振模型 .....	212
4.3.2	斜拉索的自激共振分析 .....	215
4.4	斜拉索的减振 .....	219
4.5	斜拉桥的固有振动 .....	224
4.5.1	漂浮体系固有振动频率的近似计算 .....	225
4.5.2	铅垂平面内弯曲基频的近似计算 .....	226
4.5.3	扭转固有振动频率的近似计算 .....	230
4.6	斜拉桥的车辆强迫振动 .....	232
第五章	桥梁冲击系数.....	236
5.1	桥梁冲击系数概念 .....	237
5.2	桥梁动态荷载试验 .....	239
5.2.1	实验方法 .....	239
5.2.2	固有频率统计分析 .....	240
5.2.3	桥梁阻尼统计分析 .....	241

5.2.4	动态增量分析 .....	242
5.3	公路桥梁设计规范中的冲击系数 .....	244
第六章	桥梁结构的地震振动与地震反应分析.....	247
6.1	桥梁震害与抗震设计方法 .....	247
6.1.1	桥梁震害 .....	247
6.1.2	抗震设计方法 .....	249
6.2	桥梁主要地震振动及其力学图式 .....	258
6.2.1	梁桥的水平地震振动 .....	258
6.2.2	拱桥的水平地震振动 .....	263
6.3	梁桥地震振动方程 .....	265
6.3.1	梁桥平面挠曲地震振动方程 .....	265
6.3.2	梁桥横向水平地震振动方程 .....	268
6.4	拱桥地震振动方程 .....	269
6.4.1	拱桥平面挠曲地震振动方程 .....	269
6.4.2	拱桥横向水平地震振动方程 .....	270
6.5	桥梁按弹性反应谱理论的地震力简化计算 .....	271
6.5.1	梁桥的地震力简化计算 .....	272
6.5.2	单孔拱桥的地震力简化计算 .....	273
6.6	确定性的桥梁地震反应分析 .....	278
6.6.1	多自由度体系地震振动方程 .....	279
6.6.2	选择合适的地震记录和输入模式 .....	281
6.6.3	地震振动方程的计算方法 .....	283
6.7	长、大桥梁多点激振及行波效应.....	284
6.7.1	多点激振的桥梁地震振动 .....	285
6.7.2	考虑行波效应地震反应的振型叠加法 .....	286
6.8	地基与基础的相互作用模型 .....	288
附录 I	拉格朗日 (Lagrange) 方程 .....	291
附录 II	哈密尔顿 (Hamilton) 原理 .....	293
附录 III	公路桥梁动力学解法一览 .....	296
	参考文献.....	297

# 第一章 梁桥振动

梁桥是公路桥梁工程中最常用的一种桥型。同时,它又是其他体系桥梁动力分析的基础。本章介绍的梁桥振动分析方法,同样可以用于其他体系桥梁的振动分析。

由结构动力学知识可知,采用结构的离散坐标体系提供了一个方便而实用的方法,可对任意结构的动力响应进行分析。但是,所得到的解答只能是近似解。增加自由度的数目虽然可以使计算结果的精度达到所要求的程度,但是对于具有连续分布特性的真实结构,原则上要取无限多个自由度才可以收敛于精确解。因此,用有限个离散坐标的方法求精确解是不可能的。

描述多自由度体系的振动方程是常微分方程组。显然,描述具有连续分布特性的真实结构的振动方程应该是偏微分方程。在研究梁桥竖向振动特性时,可不考虑桥宽的影响,而简化为一维结构,即梁的质量、刚度等物理性质可用单一的、沿梁轴线的位置来描述,振动方程中只包含两个独立变量——时间  $t$  和沿梁轴线的距离  $x$ 。

建立梁桥振动方程的力学原理常用的有达朗伯(D'Alembert)原理、拉格朗日(Lagrange)方程和哈密尔顿(Hamilton)原理。前者是后两者的基础,是动力学的普遍原理。拉格朗日方程对于多自由度体系振动分析较方便,哈密尔顿原理则经常用于连续的真实桥梁结构振动分析。本章主要用哈密尔顿原理建立梁桥的振动微分方程。

公路梁桥大多采用钢筋混凝土或预应力混凝土结构,其材料特性和梁的抗弯刚度与外力作用有关。本章未简要地介绍了钢筋混凝土梁桥与预应力钢梁桥动刚度分析的最近研究成果。

# 1.1 梁桥的振动方程

## 1.1.1 艾勒尔—柏努利 (Euler—Bernoulli) 梁的弯曲振动方程

图 1-1 表示一变截面的简单支承初等梁, 抗弯刚度为  $EI(x)$ , 单位长度的质量为  $m(x)$ , 假定不计梁横向剪切变形的影响和阻尼的作用, 在  $xy$  对称面内的横向荷载  $p(x, t)$  的作用下, 梁产生自静平衡位置计起的动挠度  $y(x, t)$ , 以向下为正。

图 1-1 初等梁

梁在振动时的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx$$

梁在振动时的位能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}^2 dx$$

根据哈密尔顿原理, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} W dt = 0 \quad (1-1)$$

其中, 动能的变分为

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l m(x) \dot{y} \dot{y} dx dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l m(x) \ddot{y} y dx dt + \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} m(x) \frac{1}{t} (y - y) dt dx
 \end{aligned}$$

由于在  $t_1$ 、 $t_2$  瞬时的运动已经给定, 因此, 上式中

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} (y - y) dt = (y - y) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

位能的变分为

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} V dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI(x) y'' y dx dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y'] y' dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y y'] dx dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [EI(x) y'] y' dx dt - \int_{t_1}^{t_2} [EI(x) y y'] \Big|_0^l dt \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} EI(x) y y' \Big|_0^l dt
 \end{aligned}$$

式(1-1)的第二部分为除弹性力以外的主动力所做的虚功之和, 其中作用在梁上的分布荷载  $p(x, t)$  在梁虚位移  $y$  上做的虚功为

$$\int_{t_1}^{t_2} W_p dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l p(x, t) y dx dt \quad (1-2a)$$

作用在梁的两端的弯矩  $M_0$ 、 $M_1$  和剪力  $Q_0$ 、 $Q_1$  在对应的梁端虚位移上所做的虚功为

$$\int_{t_1}^{t_2} W_s dt = \int_{t_1}^{t_2} (M_0 y_0 - M_1 y_1 - Q_0 y_0 + Q_1 y_1) dt \quad (1-2b)$$

式中, 梁端力的正方向规定同材料力学。

将式(1-2)两式相加并和动能、位能的变分代入式(1-1), 得

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ [EI(x)y] + m(x)\ddot{y} - p(x,t) \} y dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI(x)y] |_l + Q_l \} y_l dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \{ [EI(x)y] |_0 + Q_0 \} y_0 dt \quad (1-3) \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [EI(x)y] |_l + M_l y_l dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} [EI(x)y] |_0 + M_0 y_0 dt
\end{aligned}$$

由于在边界上  $y_0, y_l, \dots$  等变分对于位移边界条件是等于零的,而对于力的边界条件则是任意的,要使式(1-3)成立,必须满足以下各式

$$\int_0^l \{ -m(x)\ddot{y} - [EI(x)y] + p(x,t) \} y dx = 0 \quad (1-4)$$

$$\begin{aligned}
& \{ [EI(x)y] |_0 + Q_0 \} y_0 = 0 \\
& [EI(x)y] |_0 + M_0 y_0 = 0 \\
& \{ [EI(x)y] |_l + Q_l \} y_l = 0 \\
& [EI(x)y] |_l + M_l y_l = 0
\end{aligned} \quad (1-5)$$

由于变分  $y$  在域内是任意的,因此从式(1-4)就可以得到梁的横向振动方程为

$$m(x)\ddot{y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] = p(x,t) \quad (1-6)$$

上式实际上表示动力平衡方程,也即用达朗贝尔原理,将惯性力  $-m(x)\ddot{y}$  加到外荷载项后即可求得。式(1-6)就是艾勒尔—柏努利(Euler—Bernoulli)梁最初等的弯曲振动方程。

对于初等梁(Enler 梁),式(1-5)显然必然满足,从式(1-5)可以得到梁两端力的边界条件。为方便起见,在以后梁的振动方程推导中不再引入梁端力所做的虚功项。

### 1.1.2 轴向受力梁的弯曲振动方程

图 1-2 所示梁,除了受到横向荷载  $p(x, t)$ 作用以外,还受有

图 1-2 轴向受力的初等梁

轴向外力  $N(x, t)$  的作用。由于梁轴线弯曲变形,  $N$  的作用点发生改变, 假设梁轴线变形前后其长度不变, 只是在平面上的位置发生变化, 则在微元三角形中(图 1-2c), 有

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 = (dy)^2 + (dx - d)^2 \\ &= (dy)^2 + (dx)^2 - 2dx d + (d)^2\end{aligned}$$

略去上式中高阶微量  $(d)^2$ , 则

$$d \frac{(dy)^2}{2dx} = \frac{dy}{2dx} \frac{dy}{dx} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

式中,  $d$  为微元上  $N$  的作用点在梁弯曲变形后的轴向位移。于是, 轴向力  $N$  在梁上所做的功为

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l N(x, t) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (1-7a)$$

横向荷载  $p(x, t)$  所做的功为

$$W_P = \int_0^l p(x, t) y(x, t) dx \quad (1-7b)$$

将式(1-7)两式相加并和动能、位能的变分代入式(1-1), 得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ -m(x) \ddot{y} - [EI(x) y'''] - [N(x, t) y'] + p(x, t) \right\} y dx dt = 0$$

由于  $y$  为任意的, 故有轴向力作用下梁的振动方程为

$$m(x) \ddot{y} + \frac{1}{x^2} [EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2}] + \frac{1}{x} [N(x, t) \frac{dy}{dx}] = p(x, t) \quad (1-8)$$

上式也可以按图 1-2b 利用达朗贝尔原理得到。

当轴向力  $N$  为常量时, 即艾勒尔—柏努利梁受到常量轴向力  $N$  作用时, 式(1-8)可简化为

$$m(x) \ddot{y} + \frac{1}{x^2} [EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2}] + N \frac{dy}{dx} = p(x, t) \quad (1-9)$$

比较式(1-6)和式(1-9), 显然可见, 轴向力和梁弯曲曲率的乘积形成了作用在梁上的附加有效横向荷载。

### 1.1.3 铁木辛柯(Timoshenko)梁的弯曲振动方程

对于高跨比很大的深梁来说, 就必须计及梁的横向剪切变形和转动惯量的影响, 从而给出一个高阶理论, 由此而求得的结果可以用来估计相应的梁用初等理论的计算精度和适用范围。

图 1-3 表示了梁剪切变形和转动惯量的影响。

设梁的动挠度  $y(x, t)$  为

$$y(x, t) = y_b(x, t) + y_s(x, t) \quad (1-10)$$

式中,  $y_b(x, t)$  由弯曲所引起,  $y_s(x, t)$  剪切所引起。对上式求导后, 有

图 1-3 铁木辛柯 (Timoshenko) 梁

$$\frac{y}{x} = \frac{y_b}{x} + \frac{y_s}{x} = \quad - \quad (1-11)$$

式中,  $\frac{y_b}{x}$ ,  $\frac{y_s}{x}$ , 和  $\theta$  分别表示弯曲和剪切转角 (见图 1-3c)。由图 1-3b 可得弯矩动平衡方程

$$M + Q dx - (M + \frac{M}{x} dx) - I'' dx = 0$$

即

$$\frac{M}{x} = Q - I'' \quad (1-12a)$$

剪力动平衡方程

$$(Q + \frac{Q}{x} dx) - Q + p(x, t) dx - m\ddot{y} dx = 0$$

即

$$\frac{Q}{x} = m\ddot{y} - p(x, t) \quad (1-12b)$$

式中,  $\rho = m/A$  为单位体积的质量,  $I$  为横截面的惯性矩。

由材料力学可知

$$M = -EI \frac{y}{x} \quad (1-13)$$

$$Q = -kGA \frac{y}{x}$$

式中, 系数  $k$  通常定义为整个截面上的平均剪应变 ( $Q/AG$ ) 与中心点处剪应变之比, 它依赖于截面形状, 严格地说, 取决于振动模态。对于矩形截面一般可取  $k = 5/6$ , 其它截面的  $k$  可参考有关文献。

梁的动能和位能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m y^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l I \dot{y}^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kGA \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx$$

外力功为

$$W = \int_0^l p(x, t) y(x, t) dx$$

将上述三式代入式(1-1), 并引入式(1-11), 得

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ m y^2 + I \dot{y}^2 - EI \left(\frac{y}{x}\right)^2 - kGA \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right\} dx dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l p(x, t) y dx dt = 0$$

对上式经过多次分部积分后,并注意到  $y|_{t_1} = y|_{t_2} = 0$  以及  $y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0$ , 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ -m\ddot{y} - \frac{1}{x} \left[ kGA \left( -\frac{y}{x} \right) \right] + p(x, t) \right\} y dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ -I'' + \frac{1}{x} \left( EI \frac{1}{x} \right) - kGA \left( -\frac{y}{x} \right) \right] dx dt = 0 \quad (1-14)$$

因为  $y$  和  $\frac{y}{x}$  的任意性, 故有振动方程组为

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left[ kGA \left( -\frac{y}{x} \right) \right] + m\ddot{y} &= p(x, t) \\ \frac{1}{x} \left( EI \frac{1}{x} \right) &= kGA \left( -\frac{y}{x} \right) + pI'' \end{aligned} \quad (1-15)$$

如果讨论等截面梁,  $EI$  和  $kGA$  均为常数, 并注意到  $I = Ar^2$ , 其中  $r$  为横截面惯性矩半径。由式(1-15)的第一式得

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} \frac{y}{x} + \frac{1}{kGA} [p(x, t) - m\ddot{y}] \quad (1-16)$$

将式(1-15)第二式对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2} \left( EI \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{x} \left[ kGA \left( -\frac{y}{x} \right) \right] + I \frac{\ddot{y}}{x} \\ &= p(x, t) - m\ddot{y} + mr^2 \frac{\ddot{y}}{x} \end{aligned}$$

将式(1-16)代入上式, 整理得

$$\begin{aligned} \left[ EI \frac{4}{x^4} \frac{y}{x} + m\ddot{y} - p(x, t) \right] - mr^2 \frac{2}{x^2} \ddot{y} + \frac{EI}{kGA} \frac{2}{x^2} [p(x, t) - m\ddot{y}] \\ - \frac{mr^2}{kGA} \left[ \ddot{p}(x, t) - m \frac{4}{x^4} \frac{y}{x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中, 左边第一项为艾勒尔—柏努利梁的振动项, 第二项为转动惯量影响项, 第三项为剪切变形影响项, 第四项为转动惯量与剪切变形的混合影响项。式(1-17)就是著名的铁木辛柯 (Timoshenko) 梁