

1.1 桥梁结构分析

桥梁结构分析是通过桥梁设计资料的汇集 提炼出结构分析条件 然后运用结构分析理论和方法 进行结构计算 最后对计算结果进行判断、审核 决定取舍后将结果转换成有用的设计数据，提供给设计者评估桥梁性能和进行结构优化的全过程。

结构分析条件包括自然条件、技术条件和假设条件三部分。自然条件是指桥址处的气象、水文、地质和地形等。对于指定桥位 自然条件是客观存在的 技术条件是指桥梁上通过的车辆、行人及其它特种荷载等技术要求 包括车道数、荷载等级、行车速度等。技术条件是由主管建设部门通过全面统筹考虑 作为设计任务书内容下达的。在较复杂的工程中 也可由设计单位研究并提出设计建议书 经过专家论证并经主管建设的上级部门审查确定 假设条件是为了对结构进行合理分析 根据前面两个条件和目前已有的经验 对分析对象的结构模式、边界约束条件、工作状态等进行的假定 假定条件的正确与否是决定理论分析对象是否代表实际结构的关键。

桥梁结构分析理论是在经典结构力学理论上发展起来的，主要研究假定的桥梁结构模型在一定荷载作用下的响应。随着桥梁事业的迅速发展，传统桥梁设计思想受到了冲击，导致桥梁结构分析理论的进一步发展。在结构受力分析方面，传统设计方法仅以恒载一次落架作为结构恒载受力状态。现代桥梁设计 首先考虑施工方法对结构受力的影响 不同的施工方法最终导致结构中不同的内力状态；其次考虑结构中部分构件的可调性，利用预应力索、斜拉索、吊索或吊杆的可张拉性来改变桥梁结构内力的分配 最大限度地使结构受力趋于合理 还运用优化方法 对结构的布跨、横断面的设计和受力状态等进行优化。

由于桥梁跨径的增大，恒载在桥梁结构总荷载中所占的比例增大，因此合理确定成桥恒载状态成为桥梁设计中十分重要的环节。在结构线形设计方面，传统设计认为结构线形可根据工程需要，由设计人员设定，并以结构恒载一次落架产生的挠度值与部分活载挠度叠加后反号作为预拱度，以期成桥结构在恒活载作用下达到最佳线形。现代桥梁设计将施工过程与成桥状态结合起来考虑，以成桥线形为目标，寻找每一施工阶段的设计状态，将恒载变形消除在施工阶段。可见，现代桥梁设计已将施工方法与施工过程作为设计不可分割的重要组成部分，而结构分析也将贯穿于整个设计过程。

新材料和新的施工工艺与方法在桥梁工程中得到广泛应用，桥跨不断增大，新型桥梁结构形式不断推出，使结构分析变得更加复杂，也促进了桥梁理论的发展。当前桥梁结构分析所面临的问题主要有以下几个方面：

- 1) 大跨径和新材料引起的几何、材料非线性问题；
- 2) 分阶段、分层施工与体系转换带来的结构仿真计算要求；
- 3) 空间预应力索及其分批、分节、分阶段张拉数值模拟与计算问题；
- 4) 混凝土构件徐变、收缩和预应力索松弛引起的结构内力重分配；
- 5) 不断提高的对结构关心截面内力、变位量的控制要求和结构优化要求；
- 6) 横向风力等空间荷载引起的结构内力与变形及其对结构面内受力的非线性效应；
- 7) 弯坡斜桥的空间受力分析、影响面及其加载问题；
- 8) 结构的稳定问题。

这些基本问题及由其引出的组合性问题，促进了桥梁结构分析理论的发展，下面以悬索桥为例来回顾一下桥梁结构静力分析理论的发展。

悬索桥的计算经历了线弹性理论、挠度理论和有限位移理论的发展过程。1823年法国工程师 Navier 发表了柔性吊桥理论，后经 Steinman 发展成为标准弹性理论。这一理论不计荷载对结构线形的影响，不考虑重力刚度影响，对计算早期跨度较小、刚度较大的悬索桥，可以得到满足工程要求的计算结果。

随着桥跨增大，结构刚度相对变小；结构在外荷作用下引起的竖向位移和主缆索力改变对结构平衡的影响越来越大。Melan 于 1888 年在维也纳提出了挠度理论，将梁的平衡方程建立在变形后的位置上，并考虑了主缆拉力的二阶影响，但这一理论的平衡方程未计入吊杆伸长、结构水平位移及加劲梁剪切变形的影响，使离散吊杆等同于一刚性膜，以致于挠度理论又被称为膜理论。

挠度理论从 1908 年开始应用于纽约的 Manhattan 大桥设计后，充分显示了它的优越性。此后的数十年中，挠度理论为悬索桥的发展作出了巨大贡献。

尽管如此，这一理论的平衡方程求解还是复杂的，Timoshenko 于 1928 年提出了三角级数解，Godard 提出了线性挠度理论，我国李国豪教授于 1941 年提出了等代梁法，将挠度理论中的非线性项等代于偏心受拉梁的弯矩减小系数，揭示了悬索桥受力的本质。

现代悬索桥在桥跨增大的同时，加劲梁相对刚度不断减小，其高跨比已小于 $1/300$ 。结构变得越来越柔，分析中吊索伸长、水平位移等因素已变得不可忽略，而且，斜拉桥等一些新桥型不断朝大跨径方向迈进，使得梁柱效应等问题突出，挠度理论在解决这类问题时显得无能为力。

20 世纪 60 年代初 M. J. Turner、Brotton 等开始发表求解大位移、初应力力学问题的研究成果，即后来形成的有限位移理论。这种理论是相对于微小位移理论而言的。在微小位移理论中认为，外力产生的变形不影响力的平衡，在挠度理论中只计入部分影响，而在有限位移中，荷载的平衡状态是以变形后的结构状态为基础的。在此后的发展中，Poskitt、Saffan 等在此领域里都作出了自己的贡献。

现代有限位移理论往往通过有限元方法来实现。在杆单元中，处理构件的非线性刚度效应主要采用稳定函数法、几何刚度矩阵法。Saffan 理论就是在稳定函数的基础上，同时考虑了结构几何变形的影响，以增量求解的方法实现结构的有限位移分析。Fleming 也是利用稳定函数的轴力对弯矩和弯矩对轴力的影响来修正传统的线性刚度阵。Nazmy 等人把 Fleming 法的平面问题推广到空间分析中去。

现代悬索桥的分析必须计入施工过程中对结构受力的影响。首先计算构件无应力长度，然后根据施工流程逐阶段计算本次施工引起的已建结构状态变化，并对内力和变形进行累计，最终形成成桥内力和构形。

悬索桥计算理论的发展，在一定程度上也代表了其它桥梁结构类型计算理论的发展。大跨径拱桥的计算就经历了与悬索桥相同的发展过程。早期中等跨径斜拉桥，计算中用杆单元模拟斜拉索，发现了斜拉索垂度对结构刚度的影响，Ernst 首先提出了用换算弹性模量法来改善计算结果。当索长小于 200m 且拉索应力在 500MPa 左右时其误差小于 5% 因此，Ernst 公式的应用是有条件限制的。对那些跨径大、梁或塔轴力对弯矩的影响大、结构几何非线性特征明显的结构，一般用非线性分析而对那些结构刚度较大跨径不大的桥型如连续梁、刚构等，目前仍采用线弹性理论进行分析。

当今桥梁结构静力分析在大跨径桥梁计算方面，还致力于结构的成桥状态确定和非线性施工仿真计算。分析更侧重于精细化，比如悬索桥主缆与鞍

座在施工过程中的接触问题、斜拉桥拉索锚固区的局部应力分析等问题均有学者进行了研究。由于有限元方法的完善和计算机技术的发展，桥梁结构的静力分析方法已逐步统一于程序化有限元分析。

对计算结果进行判断、审核是桥梁结构分析的又一重要环节。在这一环节中，必须明确结构分析的目的。我们分析结构的目的，不仅是为了研究其假定模型在一定荷载作用下最可能的响应，而且还要回答分析结果与假设条件是否相符的问题。比如假定土是弹性体，而计算结果却出现桩在土内的位移量很大，相应位置的土的应变已经超过了其弹性应变，此时分析结果与土是弹性体的假定不符，应该修正假定。同样，假定结构是线弹性的，而计算结果却出现局部构件应力超过材料屈服极限的现象，也是分析结果与假定不符的例子。

将结果转换成有用的设计数据也是桥梁结构分析不可缺少的重要一环。随着计算机的发展，科学计算的可视化技术已越来越为人们所重视。它可以将科学计算过程中以及计算结果的数据转换成几何图形及图像信息，在屏幕上显示出来，并进行交互处理，成为发现和理解科学计算过程中各种现象的有力工具。这一技术在桥梁结构分析软件中的应用，不仅能使各种计算命令图像化、菜单化、数据交互输入形象化，而且能用图像检查输入文件的正误、动态显示活载影响线及加载过程；仿真显示施工过程及相应结构的变形和内力状态。一旦发现异常，便可中断计算，对结构的约束、荷载、预应力等一系列参数进行复查。

1.2 程序系统

20 世纪 60 年代初，由于计算机技术的推广和结构分析有限元法的应用，使桥梁结构分析得以向程序化方向发展。

20 世纪 70 年代，由美国加州大学伯克利分校的 K. J. Bathe, E. L. Wilson 和 F. E. Peterson 于 1970 年首先推出结构分析通用程序系统 SAP，并在航空、机械、土建等领域得到广泛应用。20 世纪 80 年代初由北京大学曲圣年教授等移植到微机上。该程序系统经历了多次改版，现工程界广泛使用的是新版 Super SAP93 和 SAP2000。SAP 程序系统拥有几十种实用的单元类型，可用于分析梁、杆、板、壳、管、三维实体等各种构件组成的结构体系的动、静力响应，Super SAP 还拥有杆、薄壳等几种单元的几何刚度阵，并能完成几何、材料非线性的力学分析问题。

国内外在 20 世纪 70 年代初到 80 年代末还推出了一些类似于 SAP 功能

的其它结构分析通用程序。如 ADINA 程序，可用于结构非线性问题的分析；FEM 可用宏语言描述结构，并对多单元组合结构进行动、静力分析。世界有限元界著名的 ANSYS 公司所研制开发的 ANSYS 软件是融结构、热、流体、电磁、声学于一体的大型通用有限元分析软件。从 20 世纪 70 年代开始，ANSYS 软件就率先在有限元分析中引入了图形技术以及交互式操作方式，使有限元分析进入崭新阶段。1983 年，ANSYS 又充分预计了 PC 机的发展，开发出世界上第一个 PC 机上的分析程序。现在该程序具有完备的前处理器、强大的处理器、方便的后处理器，并提供宏语言、用户界面设计语言、用户编程特性和参数设计语言等几种工具。大连理工大学工程力学研究所开发的 JIFEX 系统，也是新一代有限元分析与结构优化设计软件系统。它是在 MS Windows9x/Windows NT 和 AutoCAD 软件平台上的商品化软件。

但是 这些程序系统应用于桥梁结构分析有一定局限性 主要体现在以下几个方面：

1)结构的描述繁复。由于要兼顾各种组合结构的分析，通用程序对结构的数据描述有很严格的规定。因此 即使描述最简单的平面杆系结构 也要填写很繁复的数据文件，既花工时又容易引起数据描述出错。

2)无法仿真桥梁施工过程进行计算。桥梁结构一般都有一个逐阶段形成的施工过程。在这个过程中 常常伴有支座增减、几何特性改变、体系转换等结构体系的改变。这就要求结构分析程序具有仿真桥梁施工过程的计算功能。一般的通用程序都不具备这一功能。

3)不具备活载自动加载功能。桥梁结构的活载分析要求对关心截面物理量的影响面进行自动加载，而平面活载分析要求对影响线进行自动加载。一般的通用程序通过改进后可以完成影响面或影响线的计算，但仍无自动加载的功能。

4)无法进行结构调值分析。现代桥梁结构常常利用强迫应变产生的应力（如斜拉索、预应力索张拉等 来调整结构体系的受力分配。按设计者的意图，指定一种期望的受力状态，用调值原理计算应施加的强迫应变变量。虽然有些通用程序可以完成装配误差应力的分析，但不具备结构调值分析的功能。

5)处理桥梁结构的徐变、收缩及与预应力有关的问题时显得无能为力。钢筋混凝土桥梁结构徐变、收缩的发展贯穿于整个施工过程和成桥状态。混凝土徐变与构件应力历史有关。随着施工阶段的向前推进，后期结构荷载对前期结构徐变、收缩及预应力损失都有影响。大部分结构分析通用程序无法处理混凝土徐变、收缩等问题。也有部分结构分析通用程序 虽然能以分析金

属蠕变的功能对混凝土徐变进行分析，但这些程序无法模拟施工过程，无法得到各施工阶段构件的应力历史，也就无法真正处理桥梁结构的徐变、收缩及与预应力相关的一系列问题。

由于以上种种原因，桥梁工程界更需要专用的程序系统来方便、准确地完成桥梁结构受力分析。

我国从 20 世纪 70 年代末开始，由中交公路规划设计院负责展开桥梁结构分析程序化的研究工作，开发完成了第一代桥梁专用综合程序。与此同时，交通部重庆科学研究所也做了大量的工作，完成了桥梁结构分析程序。综合程序后来被中交公路规划设计院朱培京、郑明珠等同志进行了改进，并推广到微机上应用，对推动桥梁电算事业起到了很大作用。由于当时受到计算机技术的限制，程序的计算规模和计算功能都有一定限制。

20 世纪 80 年代开始，我国桥梁事业迅速发展，各种新结构不断推出，跨径不断增大，促进了桥梁结构分析程序化的发展。西南交通大学推出了悬索桥分析程序系统，动力分析采用结构准空间模式，非线性活载采用交互式手动加载，该系统在汕头海湾大桥等大跨径悬索桥分析中得到了应用。

贵州省交通规划设计院周善棣高级工程师组织开发了平面杆系桥梁分析程序系统，该程序界面友好，可以模拟实桥施工过程进行分析，特别适用于钢筋混凝土拱桥的设计计算，在国内中小型设计单位得到较为广泛的推广。但由于该程序系统不能计入几何非线性，故无法对特大跨径桥梁进行分析计算。

20 世纪 80 年代初，同济大学组织完成的 BCAD 系统中，BCAD-FEA 子系统是一套由 SAP5 与 ADINA 作为计算核心，结合前后处理组成的桥梁专用综合程序。该系统针对桥梁移动荷载问题，实现了能自动形成位移和内力影响面的功能，并发展了实用的影响面加载算法。从研制报告看，该程序对完成异形桥的静力分析比较方便，但由于采用的通用程序内核自身的不足，限制了该程序系统的应用与发展。

20 世纪 80 年代中 同济大学肖汝诚教授主持开发了“桥梁结构线性、非线性分析综合程序系统”（BAP）、“桥梁施工控制综合程序系统”（FWD）和“弯坡斜桥分析系统”（SBP）。BAP 程序的主要功能包括：

- 1)可计入结构自重、节点力、局部荷载、支座沉降、温度及预应力等多种荷载和混凝土收缩、徐变 自动计入各种预应力损失 对特大跨度桥梁 可计入几何非线性的影响；

- 2)模拟施工过程的各个阶段，通过单元、支座的增减，预应力索的反复张拉与放张，以及调值计算功能，可模拟各种桥型的各种施工方法，最终输出施

工各阶段的结构变形及内力、应力状态；

3)仿真的施工控制功能，可实现结构前进分析、倒退分析及实时跟踪分析 完成桥梁施工控制；

4)结构空间恒、活载分析 可以自动形成关心构件的内力、位移和应力影响面，并可按任意指定车道进行加载。

20世纪90年代末 该系统推出了 Windows 版本。作为国家自然科学基金重大项目的最新成果 该系统已能分析桥梁工程中的各类非线性问题 包括屈曲稳定、静风稳定和极限承载力问题，并逐渐与工程数据库、AutoCAD、DBMS 系统进行接口，力求方便地服务于桥梁工程的更广泛领域。

该系统全面引入了新的计算理论和方法，系统地解决了桥梁结构中的几何、材料非线性问题 分阶段、分层施工与体系转换带来的结构仿真计算问题；空间预应力索及其分批、分节、分阶段张拉的数值模拟与计算问题 混凝土构件徐变、收缩和钢、预应力索的松弛引起的内力重分配与变形计算问题 弯坡斜桥空间分析问题等。还针对大跨度桥梁的分析特点，增加了桥梁恒载内力优化计算及柔性结构成桥构形分析、静风荷载作用下结构的内力响应和稳定性分析等功能。该成果已直接应用于我国正在建造中的特大桥梁工程，如江阴长江大桥、香港青龙大桥、宁波招宝山大桥重建工程、上海卢浦大桥、崇明越江工程、苏通长江大桥、琼洲海峡大桥等的设计、方案研究等。

同济大学周宗泽等开发的“桥梁博士系统”，运行于 Windows 平台，用 Visual C++ 编制开发。该程序主要特点是：数据输入全部采用人机对话交互输入 能够进行各种结构体系的恒载及活载的结构响应计算 完善的联机帮助系统，可随时查看系统使用的各种帮助信息。

原同济大学王书庆副教授主持开发的桥梁 CAD 集成系统 (BCADS) 是针对桥梁工程设计和施工的特点，基于 Windows NT 系统开发的桥梁集成 CAD 系统。程序提供了以下主要功能：桥梁结构布置、几何造型与真实感图形生成 三维实体模型力学模型转换器、桥梁有限元分析前后处理、影响线和影响面加载、空间预应力设计与计算、施工分析。

此外 湖南大学、唐山铁道学院等单位也先后推出了各自的桥梁结构分析综合程序，为桥梁结构分析的程序化作出了贡献。

在桥梁综合分析程序系统发展的同时，国内外还开发了适合于各种具体桥型的特种专用程序系统。交通部公规院朱培京高工在综合程序的基础上，根据常规桥型的设计、施工特点 开发了连续梁桥、T 型刚构、斜拉桥三个特种专用程序 尽管还带有桥梁综合程序的数据输入特征 但也为设计带来一定的

方便。同济大学肖汝诚教授开发的弯、坡、斜桥特种专用系统和悬索桥特种专用系统，完全抛弃了传统的有限元数据描述模式，仅用几十个确定这类桥梁刚度、荷载特征和施工步骤的参数，程序便能进行有限元网格自动划分、单元节点自动形成、边界约束自动处理和恒、活载分析与组合。

桥梁专用程序与通用有限元分析程序是适用范围不同的两种分析工具。桥梁专用程序紧密结合桥梁设计分析需要，不仅可用于分析桥梁结构在施工过程中的性能，并能实现对桥梁结构特有的预应力及徐变、活载效应的分析，而且还能用于确定桥梁成桥内力状态（如斜拉桥调索和施工阶段拉索的初始张拉力）等反问题计算。通用程序主要被用来对特定（一般是成桥后）桥梁结构做整体分析，以探明结构的稳定性及动力性能等；通用程序的另一个用途是在对结构进行整体分析后取出重要构件做局部应力分析。两类程序相比，通用程序可以处理各类桥型繁琐、复杂的分析，但数据填写复杂，只能用于激励到响应的正问题；桥梁专用程序使用方便，且更易于和 CAD 技术相结合，可解决桥梁设计中必须的特殊计算。这两者在工程界同时存在是必要的。

总之，以下几点对桥梁分析程序化的发展是重要的：

1) 一个对任何复杂桥梁结构都能进行动力、静力、稳定分析的桥梁综合程序是必不可少的。其功能要完善，最好具备让用户增添其它计算功能的功能界面应友好，数据易于和 CAD 系统作交换。

2) 特种桥梁专用程序是桥梁综合程序的补充。对简支梁桥、连续梁桥、系杆拱桥、弯桥、斜桥等常规的桥梁结构，都可以有相应的特种专用程序。这些程序应具备数据描述简单、输出结果具体、直观的特点。

3) CAD 是结构分析程序化的最终归属，任何结构分析程序的开发，都应考虑这一因素。

1.3 本书的目的和内容

编写本书的目的主要有三个：

第一是介绍桥梁结构分析的基本理论和计算程序的编写原理，使读者在开发或使用以有限元为基础的桥梁结构分析程序之前，能基本掌握有限元的基本理论，并对程序的结构、计算流程、编程技巧等有一个总体了解。这一部分内容主要在第二、三、四章中介绍。其中第二章介绍桥梁结构有限元分析的基本理论，包括杆系结构有限元分析的基本概念和计算步骤，杆系结构非线性分析理论、稳定计算理论等；第三章主要介绍桥梁结构的数值分析方法，包括结构简化及其数值模拟、梁式桥、拱桥、斜拉桥、悬索桥的结构分析等内容。第

四章主要介绍杆系结构静力分析程序的编制原理，包括杆系结构的单元刚度矩阵、转换矩阵、带刚臂单元引入、等效节点荷载计算、同位移约束、杆端自由度释放、总刚及荷载列阵的集成、边界条件处理、方程求解、内力及支承反力计算等内容。

第二是论述桥梁结构中特殊问题的分析理论和方法，并介绍将一般杆系分析程序扩充为具有施工仿真分析功能程序的原理和技巧。使读者在学习完这些内容后能够明确桥梁结构中特殊问题的分析方法，并能对一般的有限元程序进行改造，实现桥梁结构的特殊分析。这一部分内容主要在第五~八章中介绍。第五章介绍桥梁结构施工分析程序编制原理，包括施工阶段离散模型的建立、单元的增减、约束的增减、杆端自由度释放信息的改变、材料特性、刚臂的改变和支座瞬时位移、调值计算等内容；第六章介绍预应力效应分析，包括空间预应力钢束的线形、预应力损失的计算、预应力等效荷载计算等内容；第七章介绍徐变效应分析，包括混凝土的徐变理论、徐变应变-应力基本方程、徐变效应的位移法分析等内容；第八章介绍活载效应分析，包括活载效应分析的理论、活载影响面、影响线加载等内容。

第三是简要介绍开发桥梁分析系统应引入的现代软件开发技术以及桥梁结构分析系统前后处理的技术。这一部分内容主要在第九章介绍，包括面向对象的程序设计、软件构件对象模型等软件开发技术，以及桥梁分析系统的前后处理模块应具备的主要功能。

为了使读者对桥梁分析数值描述有一完整的概念，本书在第十章介绍了作者主持开发的“桥梁施工分析程序系统”(FWD)的数据描述方式，并给出工程实例的分析过程和结果。

有限元分析基本理论

· 第二章 ·

有限元法的基本思路是将一个连续求解区域分割成有限个不重叠且按一定方式相互连接在一起的子域（单元），利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的场函数通常由未知场函数或其导数在单元各个节点的数值和其插值函数来近似表示。这样，未知场函数或其导数在各个节点上的数值即成为未知量（自由度）。根据单元在边界处相互之间的连续性，将各单元的关系式集成方程组，求出这些未知量，并通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到全求解域上的近似解。

有限元将一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题进行求解。如果将区域划分成很细的网格，也即单元的尺寸变得越来越小，或随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断被改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后可收敛于精确解。

2.1 有限元分析的基本概念和计算步骤

首先以求解连续梁为例引出结构有限元分析的一些基本概念和计算步骤。如图 2-1，连续梁承受集中力矩作用。将结构离散为三个节点、两个单元。结构中的节点编号为 1、2、3 单元编号为 ①、②。

2.1.1 单元分析

在有限元分析过程中，第一步是进行结构离散，并对离散单元进行分析，分析的目的是得到单元节点的力与位移的关系。单元分

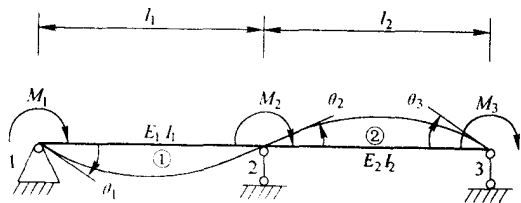


图 2-1 受集中力矩作用的连续梁

析的方法有直接法和能量法，本节采用直接法。

从连续梁中取出一个单元 e 单元左边为节点 i 右边为节点 j 。将节点选择在支承点处，单元两端只产生转角位移 θ_i^e, θ_j^e 顺时针转动为正。独立的单元杆端内力为弯矩 m_i, m_j 顺时针为正。

记： $\{u\}^e = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}^e$ 为单元 e 的节点位移向量； $\{f\}^e = \begin{Bmatrix} m_i \\ m_j \end{Bmatrix}^e$ 为单元 e 的杆端力向量。根据结构力学位移法可得如下平衡方程：

$$\begin{cases} m_i^e = k_{11}^e \theta_i^e + k_{12}^e \theta_j^e \\ m_j^e = k_{21}^e \theta_i^e + k_{22}^e \theta_j^e \end{cases} \quad (2-1)$$

式中： $k_{11}^e = k_{22}^e = 4i_e, k_{21}^e = k_{12}^e = 2i_e, i_e = \frac{EI}{l}$ 。 EI 、 l 分别为单元 e 的抗弯刚度和长度。

$k_{ij}^e, (j=1,2)$ 的物理意义为单元 j 处发生单位转角引起的 i 处的力矩，将式 (2-1) 写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} m_i \\ m_j \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}^e \quad (2-2)$$

$$\{f\}^e = [k]^e \{u\}^e \quad (2-3)$$

式 (2-2)、式 (2-3) 称为梁单元 e 的刚度方程。式中 $[k]^e$ 称为梁单元 e 的刚度矩阵，只要已知梁单元的 EI, l 就可计算出单元刚度矩阵。

以上分析实现了单元分析的目的，即得到单元刚度方程和单元刚度矩阵。

2.1.2 整体分析

有限元分析的第二步要将离散的单元集成整体，组集过程可见图 2-2。

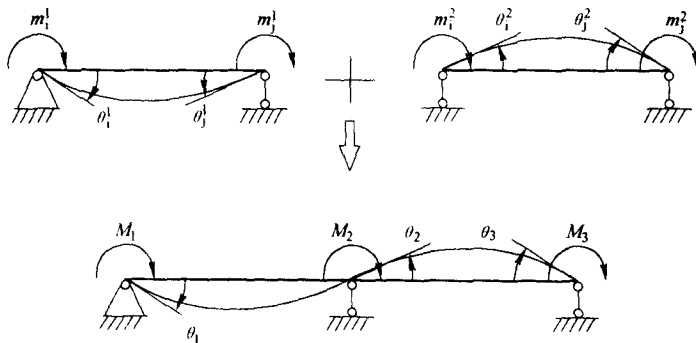


图 2-2 离散的单元集成整体

在组集过程中，必须满足以下条件：

1) 变形协调

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^1 &= \theta_1 \\ \theta_1^1 &= \theta_1^2 = \theta_2 \\ \theta_1^2 &= \theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

2) 节点平衡

$$\left. \begin{aligned} M_1 - m_1^1 &= 0 \\ M_2 - m_1^2 - m_1^3 &= 0 \\ M_3 - m_1^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

将式 2-2) 代入式 2-5) 可得：

$$\left. \begin{aligned} 4i_1\theta_1^1 + 2i_1\theta_1^1 &= M_1 \\ (2i_1\theta_1^1 + 4i_1\theta_1^1) + (4i_2\theta_1^2 + 2i_2\theta_1^3) &= M_2 \\ 2i_2\theta_1^2 + 4i_2\theta_1^3 &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

将式 2-4) 代入式 2-6) 整理可得：

$$\left. \begin{aligned} 4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 &= M_1 \\ 2i_1\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 + 2i_2\theta_3 &= M_2 \\ 2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 &= M_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

写成矩阵形式 得

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & (4i_1 + 4i_2) & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

式 (2-8) 称为结构刚度方程，它实际上是结构的节点平衡方程，记为：

$$[K] \{\Delta\} = \{P\} \quad (2-9)$$

式中： $[K] = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & (4i_1 + 4i_2) & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$ 称为该结构的原始刚度矩阵； $\{\Delta\}$

$\{\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3\}^T$ 称为该结构的位移向量； $\{P\} = \{M_1 \ M_2 \ M_3\}^T$ 称为该结构的节点荷载向量。

以上分析实现了整体分析，即得到结构原始刚度矩阵和结构刚度方程。

2.1.3 用直接刚度法形成结构刚度矩阵

通过整体分析得到结构刚度矩阵，并建立了节点的平衡方程，即结构的刚

度方程。但是在电算过程中不可能对每一具体结构都做一次总体分析而应该找一种规律在确定了节点位移和荷载的排序后使计算机能够直接由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵从单元刚度方程得到结构的刚度方程这一方法称为直接刚度法。下面介绍用直接刚度法直接由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵的过程。

1) 确定结构刚度矩阵的阶数

结构刚度方程中第 i 行表示该结构第 i 个位移分量上力的平衡方程因此如果结构有 n 个独立位移分量就可列出 n 个独立平衡方程结构刚度矩阵就是 $n \times n$ 阶的。本例有 3 个独立的位移分量, 故总刚必然为 3×3 阶的, 写成:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

2) 确定单元刚度矩阵中元素与结构刚度矩阵中元素的关系

若将单元刚度矩阵下标写成位移分量编号的形式:

单元 1: $i = 1, j = 2,$

$$[K]^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

单元 2: $i = 2, j = 3,$

$$[K]^2 = \begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

有: $k_{11} = k_{11}^1, k_{12} = k_{12}^1, k_{13} = 0, k_{21} = k_{21}^1, k_{22} = k_{22}^1 + k_{22}^2, k_{23} = k_{23}^2, k_{31} = 0, k_{32} = k_{32}^2, k_{33} = k_{33}^2.$

可见若将单元刚度矩阵中元素下标写成位移分量编号的形式则结构刚度矩阵中任一刚度元素与单元刚度矩阵中元素有如下关系:

$$k_{ij} = \sum_{e=1}^{ne} k_{ij}^e \quad (2-13)$$

式中: e ——单元号;

ne ——结构单元总数。

因此，用直接刚度法集成总刚，可归纳为以下几步：

1) 对结构未知量进行编号，确定各未知量在结构刚度方程中的位置（行号）；

2) 确定结构刚度矩阵的阶数 n ；

3) 对单元 e 进行循环 寻找 e 单元刚度矩阵中各元素下标对应于整体刚度方程中的未知量编号；并按此编号，根据式 (2-13) 分别叠加到结构总体刚度矩阵中的对应位置上

对单元循环完毕时，结构刚度矩阵就形成了。形成结构刚度矩阵是有限元分析过程中十分重要的环节，为了节约计算机存储空间，加快刚度方程求解速度，我们还必须了解结构刚度矩阵具有如下性质：

1) 结构刚度矩阵是 $n \times n$ 阶的方阵， n 为结构的未知量总数；

2) 结构刚度矩阵是对称阵，即 $k_{ij} = k_{ji}$ 这一性质由力-位移互等定理决定；

3) 处于同一单元上的两个未知量称相关未知量。若两个未知量不相关，则 $k_{ij} = 0$ 。由式 (2-13) 可知 两个未知量不相关 就没有单元刚度矩阵贡献 因此 $k_{ij} = 0$ ，如本例中 $k_{13} = k_{31} = 0$ ；

4) 结构刚度矩阵为带状矩阵，其非 0 元素分布在对角线元素附近；

5) 结构刚度矩阵是稀疏阵，非 0 元素很少。对于较大规模的结构，结构刚度矩阵中的非 0 元素只占总元素的 10% 左右；

6) 结构刚度矩阵是非负定矩阵，即对任意不为 0 的 n 维向量 $\{x\}$ 有： $\{x\}^T [K] \{x\} \geq 0$ 。

2.1.4 支承条件的引入

在有限元分析过程中，通常在结构原始刚度矩阵 $[K]$ 建立以后，才引入支承条件。下面仍对本例进行讨论。如果改变本例中节点 3 的边界条件 如图 2-3 所示，在节点 1 和 2 处转角 θ_1 、 θ_2 是未知量，节点力 M_1 、 M_2 是已知量，节点 3 是固端， M_3 为未知量 转角 θ_3 是已知量 即 $\theta_3 = 0$ 。

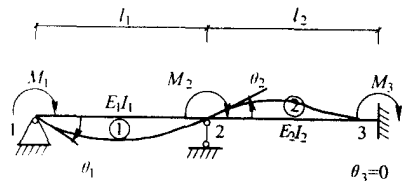


图 2-3 改变节点边界条件的连续梁

计算时，我们分两步来进行：

第一步，暂不引入支承条件和荷载情况，先建立原始刚度方程，即式 (2-8)：

第二步，在固定端引入支承条件 $\theta_3 = 0$ 即将式 2-8 修改为：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & (4i_1 + 4i_2) & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

为了求解 θ_1, θ_2 ，可从矩阵方程中取出前面两个方程：

$$\begin{cases} 4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 = M_1 \\ 2i_1\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 = M_2 \end{cases} \quad (2-15)$$

即：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

式(2-16)就是引入支承条件和荷载情况后得到的位移法基本方程，由此可解出基本未知量 θ_1, θ_2 。

将式 2-16) 与式 2-8 比较 可以看出 如果在式 2-8) 中把 $[K]$ 的第 3 行和第 3 列划去，同时把右边向量中的相应元素划去，就可直接得出式 (2-16)。因此，引入支承条件的问题就归结为划去对应未知量的行与列的问题，这种方法称为“划行划列法”。

有时，为了能方便地计算出支反力，我们可以将式 2-8) 写成

$$\begin{bmatrix} [k]_{\alpha\alpha} & [k]_{\alpha\beta} \\ [k]_{\beta\alpha} & [k]_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_\alpha \\ \{\Delta\}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_\alpha \\ \{P\}_\beta \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

式中： $\{\Delta\}_\alpha = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$ ——未知位移量；

$\{\Delta\}_\beta = \{\theta_3\}$ ——已知位移；

$\{P\}_\alpha = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$ ——已知荷载向量；

$\{P\}_\beta = \{M_3\}$ ——未知荷载向量或支反力。

式 2-17) 可写成如下两个独立方程组：

$$[k]_{\alpha\alpha}\{\Delta\}_\alpha + [k]_{\alpha\beta}\{\Delta\}_\beta = \{P\}_\alpha \quad (2-18)$$

$$[k]_{\beta\alpha}\{\Delta\}_\alpha + [k]_{\beta\beta}\{\Delta\}_\beta = \{P\}_\beta \quad (2-19)$$

由于 $\{\Delta\}_\beta = \{\theta_3\} = 0$ 所以式 2-18 等价于式 2-16)。

当 $\{\Delta\}_\alpha$ 求得后 代入式 2-19 则可求得支反力：

$$\{P\}_\beta = [k]_{\beta\alpha}\{\Delta\}_\alpha + 0 \quad (2-20)$$

对于本例，即：

$$\{M_3\} = [k]_{\beta\alpha} \{\Delta\}_\alpha = [0 \quad 2i_2] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 2i_2\theta_2 \quad (2-21)$$

由此可见，要计算支反力，必须先将已知位移对应的刚度矩阵元素 $[k]_{\beta\alpha}$ 提取出来，然后再划行划列。

在程序计算中，希望将引入支座后的矩阵仍保留原来的阶数且未知量排列顺序不变 为此 可将式 (2-16) 扩大成如下形式：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & (4i_1 + 4i_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

即对原始刚度矩阵先提取对应于已知位移向量的刚度元素 以备计算支座反力用，再将原始刚度矩阵中这些元素全部置 0 对角线元素置 1。荷载向量中对应的元素也置 0。这种处理约束的方法称为“充 0 置 1 法”。

2.1.5 非节点荷载的处理

如果在单元内有非节点荷载，就不可能直接建立结构刚度方程，因为结构刚度方程表示的是节点力的平衡方程。图 2-4a)所示结构具有 3 个节点，2 个单元， $M_1、M_2、M_3$ 为节点荷载， $M'、M''$ 为非节点荷载。

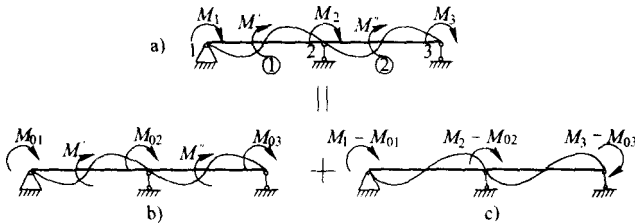


图 2-4 单元内有非节点荷载作用的连续梁

要解决这个问题，需用等效节点荷载来代替非节点荷载来分析整体结构受力，处理原则为在等效节点荷载作用下的结构节点位移与实际荷载作用下结构的节点位移应相等。具体可按如下步骤处理：

1) 求等效节点荷载

计算非节点荷载对应的等效节点荷载时可分两步进行：

第一步，在各节点加上约束，阻止节点发生位移，计算结构上所有非节点荷载的效应 如图 2-4b)所示 其中 $M_{01}、M_{02}、M_{03}$ 为非节点荷载在增加的约束

中引起的反力(弯矩)

单元 1、2 产生的固端力矩(加脚标 0 表示固端力矩)为:

$$\{M_0\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} M_{0i} \\ M_{0j} \end{Bmatrix}^{(1)}, \{M_0\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} M_{0i} \\ M_{0j} \end{Bmatrix}^{(2)} \quad (2-23)$$

各节点增加的约束中的反力分别为与该节点相关联单元的固端力矩之和:

$$\{M_0\} = \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{0i}^{(1)} + M_{0i}^{(2)} \\ M_{0j}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2-24)$$

第二步,去掉各节点的约束,相当于在各节点施加外力矩向量 $\{P\} = -\{M_0\}$ 再叠加上原有的节点荷载 M_1, M_2, M_3 总的节点荷载如图 2-4c 所示。

显然把图 2-4b)和 c 两种情况叠加就得到图 2-4a)给出的情况。图 2-4c)中的节点荷载 $\{P\}$ 称为结构非节点荷载的等效节点荷载,而式 2-24 中的单元固端力矩 $\{M_0\}^{(1)}, \{M_0\}^{(2)}$ 的反号力叫做相应单元荷载的等效节点荷载。

2) 求各杆端弯矩

连续梁在非节点荷载作用下的杆端弯矩由两部分组成,一部分是在节点加阻止位移的约束时非节点荷载作用下的杆端弯矩,另一部分是在等效节点力荷载作用下的杆端弯矩。第二部分的计算方法在前面已详细讨论,即先由式 2-8)求出结构的位移向量 $\{\Delta\}$ 然后代入式 2-2)计算杆端力。

将两部分杆端力进行叠加,即得非节点荷载作用下各杆的杆端弯矩。

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}^e + \begin{Bmatrix} M_{0i} \\ M_{0j} \end{Bmatrix}^e \quad (e = 1, 2) \quad (2-25)$$

2.1.6 有限元分析的基本步骤

有限元分析的实施过程可分为三个阶段。前处理阶段:将整体结构或其一部分简化为理想的数学力学模型,用离散化的单元代替连续实体结构或求解区域;分析计算阶段:运用有限元法对结构离散模型进行分析计算;后处理阶段:对计算结果进行分析、整理和归纳。

以上讨论尽管只是针对两跨连续梁进行的,但其分析阶段的思想及计算步骤却代表了所有复杂结构的有限元静力分析过程。因此,读者必须熟练掌握这一过程的每一环节,领会其分析思路。为了便于理解,将有限元分析的基本步骤归纳成以下几点:

1) 结构简化与离散化 并对离散结构进行单元、节点编号;