第一部分 舵阻摇理论

第一章　船舶阻摇控制的历史及现状

第一节　问题的提出

自从机动船代替帆船成为主流船舶以来，由于船舶横摇阻尼力矩大幅度减小，使船在海面上航行时产生很大的横摇运动，因此人们想出了许多办法，设计了各种横摇阻尼装置来减小横摇。在客船上使用阻滞摇荡(阻摇)系统能使乘客减少晕船,保证愉快地旅行 应用在货船如滚装船或集装箱船上可以防止汽车碰撞、箱体损伤等货损现象发生。如果码放的货物由于横摇而翻倒会引起什么样的后果是可想而知的。另一个重要的因素是提高船员的工作效率。众所周知，从安全的角度出发，大的横摇会使乘员身体不适，引起晕船及过度疲劳，从而出现工作失误。而对于军舰来说,则会影响某些操作(如直升机的起降)和士兵的工作效率。因而减摇是船舶控制的一个重要的研究领域。

如果恶劣的海况使船舶产生了不必要的运动，很自然地我们就设法采取某些措施来抵消或是减少这些运动。这些方法通常称为“镇定”(stabilization)，但我们应注意这种称谓是不确切的。 Lloyd(1989)指出，在船舶设计中已保证了所有运动的稳定性，即船舶在小的扰动作用后会逐渐趋向它原来的平衡位置。这体现在二阶船舶（横摇）运动模型中具有正的恢复系数。如采用术语“镇定”意味着要增加

该恢复项系数，而实际上抑制船舶横摇却是通过增加系统的阻尼系数来实现的，因而将抑制船舶横摇运动称为阻摇则更为贴切些。

迄今为止，在船舶各向摇荡运动（垂荡、纵摇、横摇）中，仅有横摇运动得到了重视并被成功地阻滞。之所以如此是由于船舶对于横摇通常具有内在的低阻尼特性，在船舶运动中预期会出现剧烈横摇的谐摇区，使船舶的安全受到威胁，因此横摇受到人们的重视。在船舶运动中对横摇的处理方法相对简单，只须施加中等程度的作用力就足以形成充分的阻尼力矩。然而垂荡和纵摇的谐摇条件却不像横摇运动那样明确，而且为阻摇所需的作用力也相当大，因而难以解决。

在阻摇的研究中，真正具有重要意义的是强制摇荡运动。从摇荡运动的方程中可以看出，减少摇荡运动可以通过 3 种不同的途径来实现(Bhattacharyya，1978)。

一、增加阻尼系数

这种方法称为“阻尼阻摇”。由于阻尼的物理意义是指能量的耗散，这种阻摇方式对于自由振荡，尤其是在谐摇区（此时阻尼的作用最为明显）是有效的。舭龙骨就是这样一种用来阻滞横摇的阻尼装置。

二、减小船舶固有频率(即加大固有周期)

减小船舶固有频率从而使调谐因子（turning factor，船舶遭遇频率与船舶固有频率之比）远大于 1。这种阻摇方式称为“调谐阻摇”；它只对强制振荡有效。但实际的海面上有着各种频率的波浪，改变船舶固有频率的做法并不切合实际，因为改变后的固有频率可能会碰上具有不同幅值但相同频率的波浪，同样会产生大的谐摇。

三、直接减小扰动力或力矩

这种方式称为“平衡阻摇”。在原则上它可以适用于所有的摇荡运动。在这种情况下，施加一个与扰动力矩相位相反的力矩可以抵消部分（或全部）扰动力矩，但是这种阻摇方式的效率完全取决于

控制设备的有效程度。虽然平衡阻摇这一方式主要用于强制振荡，但它对自由振荡也同样有效，减摇鳍和舵阻摇均属于这种阻摇方式。

综上所述，从阻摇的观点来看，因为横摇所涉及的力和力矩都比较小，所以横摇运动是可以得到成功的控制的。

控制横摇作为一门学科其历史已愈百年，在这期间尽管先后出现过约 350 多种阻摇装置或控制横摇运动的措施，但得以应用到实际中的不到 20 种，以下是其中的一些例子：

a. 舭龙骨　　b. 减摇鳍　　c. 减摇水舱
d. 阻摇舵　　e. 陀螺稳定器　　f 移动重物
g. 喷水襟翼

对于一个具体的阻摇装置来说，不仅要考虑它的阻摇效果（减摇率），而且需要考虑它在船体内所占空间的大小，对航速的影响以及建造、运行和维护的成本，对于军用船舶还应考虑噪声问题。出于经济上的考虑，上面提到的一些装置现在已不再使用，而其他的虽然从技术上看并不一定是最有成效的，但仍在继续使用。下面我们将简短地介绍前 4 种方法并在它们之间作一个比较。

第二节　舭龙骨、减摇鳍、减摇水舱和阻摇舵

一、舭龙骨

舭龙骨是形式最简单的阻摇装置，它首次出现于 1870 年。如图 1.1 所示，它们是一些垂直安装在船体舭部或其附近的鳍板。

由于船舶横摇运动在舭龙骨板的正、背面产生压差，形成了与横摇运动相反的阻尼，阻滞了船舶的横摇。一般来说，舭龙骨的面积越大，其横摇阻尼也就越大，但同时也会产生一些不利影响，如船舶的静水阻力增加、船舶靠离码头发生困难等。所以通常设计舭龙骨的长度是船体长度的 20% ~ 50%，而宽度为船宽的 3% ~ 5% 。

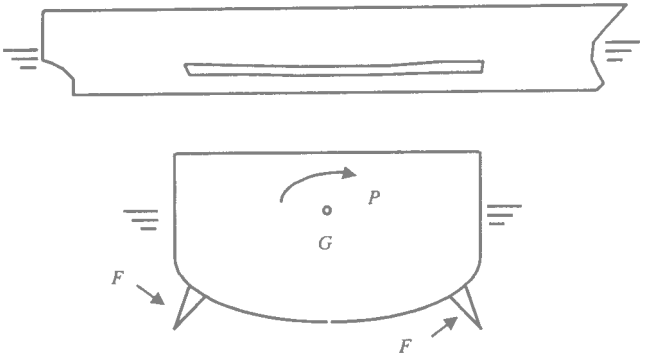


图 1.1 舭龙骨示意图

舭龙骨在各种速度下都是非常有效的阻摇装置，大约能减少 25% ~ 50% 的横摇幅度。特别是当船在波浪中谐摇时能有效地阻摇。横摇越剧烈，它产生的阻尼力矩越大，阻摇效果越明显。与其他的阻摇方式相比较，舭龙骨的显著优点是没有运动部件，且除了通常所做的清除船体表面的维护外无需其他维护。它惟一的缺点是增加了船体的阻力，但是这可以在设计安装时通过仔细地选择舭龙骨相对于舭部流体流线的位置来使这个阻力减到最小。这通常需要在设计阶段，在模型上使用某种流体可视技术来完成。正确地定位仅是相对一个速度而言的（通常选择的是巡航速度），但阻力损失在其他速度下并不大。其静水航速减小一般不超过基本阻力的 2% ~ 3% ，在波浪中影响还要小些。考虑到以上特点，所有的海船几乎都加装了舭龙骨，所以它已成为海船船体的一部分。

二、减摇鳍

减摇鳍是一种非常有吸引力的阻摇装置。如图 1.2 所示，它们通常安装在船体中部舭部的弯曲部位，至少由 1 对可转动的鳍组成，左右舷各 1 个。减摇鳍的攻角可由对船舶横摇运动非常敏感的控制系统连续调节，一侧向上运动则另一侧向下运动。 2 个鳍对船舶重心产生 1 个力偶，如刚好与波浪产生的力矩相反则横摇就会减少。在航速为 10 ~ 15 kn 时，减摇鳍可能是最有效的阻摇方法对于一

个精心设计的阻摇系统，降低 50% 的横摇是不成问题的。

减摇鳍的缺点是，随着船速的降低，减摇鳍的效率也跟着下降，因而通常都不在低速运行的船舶上安装减摇鳍。同样减摇鳍的阻摇能力是有限的，在恶劣的海况下它的阻摇能力也要下降。减摇鳍的结构复杂而且价格不菲，并且需要经常维修保养。不过由于它们可以在相当宽裕的条件范围内有效地阻摇而被普遍认可，因而现在很多船上都安有减摇鳍。

可缩式减摇鳍通常都安装在商船上。当船航行在风平浪静的海面上时，这种鳍可缩进船体内以消除它们产生的阻力。这个特性同样可以用来避免当船航行在狭水域或靠近海岸时造成触礁或擦底。可缩式减摇鳍一般都具有高的展弦比（aspect – ratio），从水动力学的观点来说非常有效，对于同样的鳍面积来说会产生相对大的升力。在军舰上一般都安装不可缩的减摇鳍。它们应能承受由爆炸引起的强烈振动，因而在安装时要求不超出在以最大船宽和船底限定的矩形(见图 1.2)。这样就限制了鳍的面积和它的展弦比，因而其效率不如可缩式来得高。减摇鳍另外的缺点是产生额外的拖曳和水下噪声，而后者对军舰来说则是致命的。

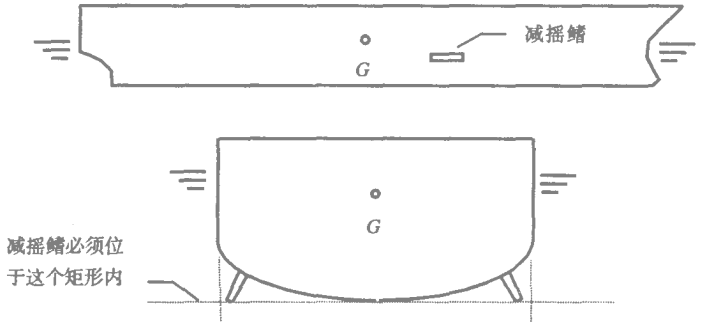


图 1.2 减摇鳍示意图

减摇鳍由 JohnI Thornycroft 于 1889 年首次提出并申请专利。但是作为实用的第 1 套阻摇装置则是由日本的元良信太郎在 1923 年设计的，而英国的 Denny-Brown 公司和德国的 AEG 公司又在此基

础上做了大量的改进，形成了现今流行的减摇鳍。

三、减摇水舱

当船的 1 个水舱里装了部分液体时，随着船的横摇它就会从左舷流到右舷又从右舷流回左舷。这些移动液体的重量对船就会产生 1 个横摇力矩。经过恰到好处的设计就可以利用这个力矩来阻滞船的横摇。图 1.3 给出了一些目前常见的减摇水舱的形式。最简单的就是横跨船身的具有自由液面的矩形水槽。有时也可通过在水槽中部安装 1 个挡板或阀门来对水流稍作控制。

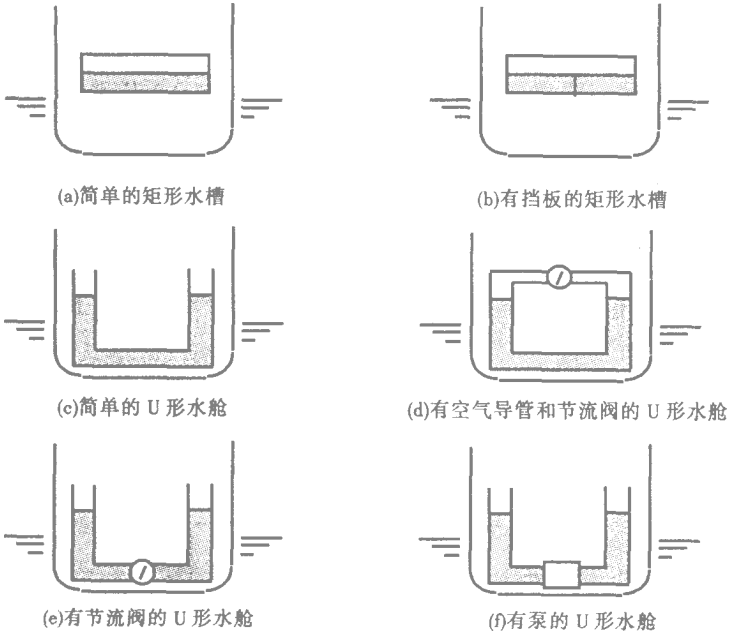


图 1.3 几种常见的减摇水舱

很多船上安装的不是矩形水槽而是 U 形水舱，这种水舱的自由液面被限制在水舱的 2 个臂里面，而这 2 个臂的底部由一水平导管连接。这 2 个垂直臂的顶部可以是暴露在空气中呈开放式的，也可以由一水平的空气导管相连接。在后一种情况下，可安装 1 个节流阀来对液体的流动施加控制。有时人们也在底部的导管上安 1 个节

流阀或泵。

减摇水舱在船舶低速航行时是非常有效的，但在船舶高速航行时则不如减摇鳍。因此减摇水舱一般都安装在测量船或是气象船等大部分时间是在锚泊作业的船上。

减摇水舱的优点是除了泵或节流阀外它没有活动部件，并且几乎不需要维护。显而易见的是它还不会产生像舭龙骨和减摇鳍所引起的阻力损失。其缺点是它们占据了船体中相当大的体积，但这些舱可以用来装淡水或是燃油从而弥补船舱体积减小所造成的损失。水舱在船中的最佳位置和高度还经常造成船舶内的通行障碍。

减摇水舱的主要缺点是它的自由液面总是要降低船舶定倾中心高度使得横摇稳定性减少，由此造成船舶在遭遇低频率海浪时的横摇运动增大。在特定的情况下，这种增大可能产生严重问题因而必须将水舱排空或是充满使它失去作用。这需要花费大量的时间。所以减摇水舱并不适用于那些需频繁变更航向的船舶(例如军舰)。

减摇水舱最早在 1874 年就开始出现在船舶上。当时使用的是自由液面水舱，阻摇效率更高的 U 形水舱是由 Frahm 于 1910 年研制的。而主动式 U 形水舱则是德国西门子公司于 1934 年在 Frahm 的设计基础上改进而成的。

四、阻摇舵

船的横摇实际上是由风、浪等外部作用力对船体所施加的变化的力和力矩产生的。但是横摇同样也可以由舵的运动引起。当转舵变更航向时会使船倾斜。这是因为在转舵后，水流在舵叶两侧产生的压力不同而形成了一个力，这个力称为舵力。由于舵叶的面积相对船体来说很小，因而这个力也很小。不过因为舵叶一般都安装在船体尾部的下方，距船体的重心很远，它的力矩却很大。舵叶至重心的水平距离形成的转向力矩使船产生转向运动。舵叶至重心的垂直距离形成的转向力矩则使船产生向转舵方向的横倾（内倾）。船舶转向时的回转运动还将产生一个离心力，这个力使得船向转舵反向横倾（外倾）。在船转向初期，因重心轨迹的曲率半径很大，故离心

力与舵的横倾力相比很小，船向内倾。当船在圆航（转向）时，离心力远大于舵的横倾力，船外倾且倾角较大。若在持续转向时突然操反舵，使舵力变向，离心力与舵力同向，由此产生更大的横倾角。舵阻摇就是要巧妙地利用舵所产生的横倾来抵消或部分抵消由风、浪等外力产生的横倾。

用舵来阻摇和减摇鳍相比，初期投资少，具有几乎相同的效果并且在系统关闭后不会产生拖曳和水下噪声。可是用舵阻摇需要有相对快速的舵才能有阻摇效果，舵速的典型值一般是 $\delta_{max}=5\sim20°/s$，这意味着舵机的功率应足够大。另一个缺点就是舵阻摇在船速较低时就不那么有效了。

表 1.1 几种常用船舶阻摇系统的比较(Sellars和 Martin，1992)

阻摇系统类型	一般应用范围	减摇率/%	价格/$×1000	安装	备注
减摇鳍 (small fixed)	大型游艇；海军辅助舰艇	90	100～200	附着在船体上；安装动力和控制电缆	速度损失；水下噪声；最大面积约 2 m^2
减摇鳍 (retractable)	客船；渡船；海军战斗舰艇	90	400～1500	附着在船体上；安装动力和控制电缆	面积从 2 m^2 到 15 m^2
减摇鳍 (large fixed)	海军战斗舰艇	90	300～1300	附着在船体上；安装动力和控制电缆	速度损失；水下噪声
水舱 (自由液面)	工作船；小型客货船；渡船	75	30～50	安装钢制构件；安装动力和控制电缆	需要液面监视器
水舱(U形管)	工作船	75	200～300	安装钢制构件和管道、阀门；安装动力和控制电缆	应具有横倾控制系统
阻摇舵	小型高速船舶	50～75	50～250	动力和控制电缆	新近发展的；需要强有力的操舵机构
舭龙骨	通用	25～50		附着在船体上	速度损失

第三节　近年来舵阻摇的研究

一、国外在舵阻摇方面的工作

用舵阻摇(Rudder Roll Damping – RRD)这一方法于 1972 年提出(Cowley 和 Lambert, 1972)，随后于 1975 年 Carley 等人也分别通过仿真研究证明，尽管用舵来阻滞横摇是可能的，但并不是那么有效(Carley, 1975; Cowley 和 Lambert, 1975; Lloyd, 1975)。由于技术的局限，这些研究并没有能使 RRD 理论在实际上得到成功的应用，只能停留在使用基于模拟计算技术的简单控制算法上。后来 Baitis(1980)报告了他的试验，他在手动控制保持航向的基础上叠加了阻摇控制信号获得了令人鼓舞的结果。 Källström(1981)通过仿真研究证明了用舵阻摇可能比减摇鳍更有效。人们又看到了舵阻摇控制的希望，RRD 被重新提起。

自那时以后，国外又有许多学者加入了这方面的研究，如荷兰的 Van Amerongen、Van der Klugt、丹麦的 M. Blanke、英国的 Katebi 等人。随着控制理论以及计算机技术的发展， RRD 的实现逐渐成为现实。到 20 世纪 80 年代末，有许多专家为军用船舶设计舵阻摇控制器的海上试验报告陆续发表，如：Baitis, Woolaver 和 Beck(1983, 1989), Källström, Wessel 和 Sjolander(1981), Van Amerongen, Klugt 和 Pieffers Van der(1987) 。至 20 世纪 90 年代初，已有许多文章分别介绍了不同的控制方法及建模技术在舵阻摇领域应用的结果，如 Blanke, Haals 和 Andreasen(1989)使用了 LQ 控制算法：Katebi, Johnson 和 Grimble(1989)使用了 LQG 控制算法；Van der Klugt(1987) 使用了极点配置方法；Tiano *et al*(1994)使用了神经网络控制方法；Zacharias 和 Pfister(1995)使用了 Fuzzy 控制方法；Odaetal(1992, 1995) 使用了多变量自回归模型等。研究结果表明，对某些特殊的船舶，利用舵阻摇可以达到 50%~70%的减摇率。由瑞典船舶研究所研制的 ROLL – NIX 系统自 1984 年起开始研制，发展至 20 世纪 90 年代初

已形成定型产品投入市场(Källström 和 Schultz, 1990)。

值得注意的是上述所有研究包括产品主要都是集中围绕军舰进行的，且之后的发展势头受到了抑制，原因之一是用舵阻摇需要舵机具有很大的功率和舵速，军舰具有的机动能力使之容易满足阻摇对舵机的需求，而民用船舶则需对舵机进行改造才可安装。原因之二是阻摇效果和船舶动态高度相关。 Blanke 和 Christensen(1993)所做的试验表明，同样一个舵阻摇控制器，用来对某一艘船的控制效果令人非常满意，而用来控制同样船型的另一条姐妹船则效果很差，尽管这 2 艘船有着相同的几何尺寸，而仅在舭龙骨、舵的形状和船舶装载条件上略有不同，这说明舵阻摇系统对船舶模型的不确定性是相当敏感的。由此，人们把舵阻摇控制器的研究重点转向了鲁棒控制算法，以此来消除模型不确定性的影响。

二、国内在舵阻摇方面的工作

我国在 RRD 方面的研究起步于 20 世纪 80 年代初，在 1982 年缪国平等发表的文章就研究了舵阻摇方法的可行性（缪国平， 1982)。我国在舵阻摇方面的研究也是围绕着军舰展开的，参与该领域研究的人员以及公开发表的文章较少。由中国科技期刊数据库检索可知，从 1989 年至 1998 年的 10 年间共有 12 篇文章在《中国造船》、《船电技术》等 7 种刊物上发表。这些文章在不同的控制领域对此进行了研究。朱文蔚、缪国平（1991, 1997) 及胡启庸(1996)用传统的 PID 控制方法，验证了舵阻摇的有效性及舵机性能对舵阻摇的影响；费乃振(1998) 使用遥控自航船模在纯横浪条件下应用 PID 算法作了减摇研究，得出了舵减摇在高速船舶上效果好以及舵速会对减摇率产生影响的结论；沈建清、陈家和、赖延辉（1994)借用人工智能和模糊控制的思想，设计自适应准则的最优控制器，获得较为理想的仿真结果；郑明辉、杨松林、王志东（1997)采用了模糊控制算法，在定常风的情况下通过控制减小了横倾角；孔金彪、钱国梁(1992)应用最优控制作了舵阻摇控制研究。值得注意的是上述所有的文章都没有考虑到船舶模型的不确定性，似乎还没有意识到这个问题的

存在，或者是没有意识到该问题的重要性。这表明我国在舵阻摇方面的研究落后国外近 10 年。

第四节　舵阻摇的发展及对未来的展望

实际上，船舶模型的不确定性不仅仅表现在如上所述的船舶结构的变化上，即使对同一艘船来说，船舶航速、船舶装载和船体附着物等的变化都会造成船舶模型参数的改变。它导致减摇率下降，甚至使阻摇控制失败。在我国阻摇控制器应用于船模效果很好而应用于实船则效果欠佳也源于模型不确定性。这清楚地表明设计一个具有适当鲁棒品质的舵阻摇控制器来消除船舶模型不确定性的影响的必要性。能否消除模型不确定性的影响是舵阻摇控制能否普及推广的重要因素。因而进入 20 世纪 90 年代以来，国外在舵阻摇方面的研究集中在以下两个方面：改进控制算法以提高控制器的鲁棒性来抑制船舶模型不确定性对减摇效果的影响；通过对控制器、控制电路等的改进在尽量减少对舵机（非线性）改造的同时使后者达到对舵阻摇的要求。

针对船舶模型的不确定性问题， Blanke(1993，1996)发表了文章专门对此进行了讨论。 Stoustrup(1995)、Christiansen(1995)、Yang(1997)、Yang 和 Blanke(1997)使用 H_∞ 控制中的多目标灵敏度方法控制舵阻摇，还使用了混合灵敏度方法设计了 H_∞ 控制器，取得较好的结果。但在他们的设计中仅考虑到对输出扰动的处理，而并未考虑对模型摄动的处理。同时那些设计全是针对非结构化模型不确定性展开的，因而设计结果相对保守。在近几年人们把目光转向了结构化的模型不确定性。在 1998 年秋于日本福冈召开的第 4 届国际航海系统控制应用大会（CAMS'98)上，Hearns 和 Blanke(1998)发表了应用定量反馈理论设计 RRD 控制器来解决船舶定倾重心高度变化引起的不确定性问题；Yang 和 Blanke(1998)针对船舶模型的结构化模型不确定性，应用 μ 综合法设计了多输入单输出控制器。模拟海上条件的仿真结果表明所有这些控制器都具有良好的鲁棒稳定

性和鲁棒品质。

针对舵机的非线性问题， Van Amerongen (1990)曾建议使用自适应算法或是增益规划算法来解决。在同一篇文章中，他使用了自动增益控制器取得了明显的效果。在 CAMS'98 大会上，Lauvdal 和 Fossen (1998)发表了使用增益规划方法来克服舵机所产生的严重的非线性问题。与 Van der Klugt (1987)使用的自动增益控制器相比，增益规划方法不仅对舵机速度限制及舵角饱和非线性有同样的容忍度，而且对舵机参数的不确定性有更好的鲁棒控制性。考虑到模型预报控制具有较少受控制器输入量和输出量限制的特点， Meadows 和 Rawlings(1997)、Perez、Tzeng 和 Goodwin(2000)应用模型预报方法设计了舵阻摇控制器。该控制器在克服舵机非线性方面取得了较好的成绩。在最大舵速为 8°/s 时，仍得到了 41%的减摇率。

到目前为止，关于 RRD 的研究远未结束，今后的工作仍将围绕着控制算法和舵机非线性两个方面进行，但不是分别进行而是综合考虑。实际上，这两个问题是不可分割的，阻摇要求有大的舵角及快速的舵动以期能产生足够大的阻尼力矩以抵消或是阻滞船舶的横摇。它的要求已远远超出了普通民船对舵机的要求。所以如果能在设计控制算法时充分考虑到舵机的限制，例如在用最优控制时对舵角的加权大一些，在用混合灵敏度问题设计 H_∞ 控制器时考虑输入权函数等。

另一个需要指出的问题是，在满足控制指标的前提下尽量减少动舵。用舵来阻滞横摇不可避免地增加了舵机的工作负担，造成了舵机的额外磨损，这个缺陷必须引起舵阻摇研究者的重视。有消息说第 1 批安装在船上运行的 RRD 控制器“ ROLL－NIX',由于动舵过于激烈导致舵机磨损加剧，引起船东不满而从船上拆除。因而 RRD 控制问题如果不能很好地解决合理动舵问题，则其前景堪忧。

第二章　船舶模型

水面船舶的模型化包括对其静力学和动力学的研究。静力学研究与物体在静止时或以恒速运动时的平衡状态有关，反之动力学所关心的是物体的加速度运动。动力学研究要比静力学研究复杂得多。动力学模型能更好地描述船舶的运动。

第一节　船舶运动方程分析

本节我们首先讨论船舶的运动，然后给出 1 个船舶水动力模型。

船舶可以认为是 1 个刚体。由于需要 6 个相互独立的坐标来确定 1 个刚体在空间的位置和方向，因而船舶运动有 6 个自由度。其示意图见图 2.1。

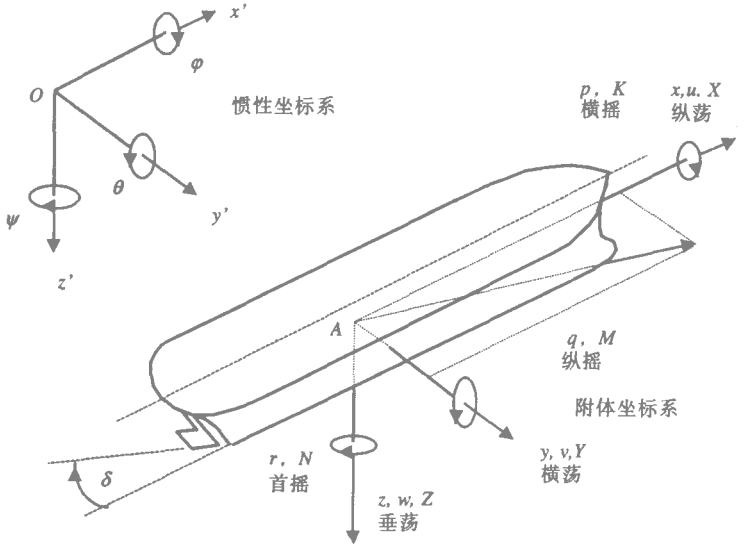


图 2.1　在惯性坐标系和附体坐标系中的船舶位置、力和状态

船舶在海上的运动可以被描述成相对于 1 个惯性参照系的运动，通常都假设在地球表面某点的加速度几乎不对低速船舶产生影响。这样大地参考坐标系 $O_{x'y'z'}$可认作为是 1 个惯性参照系这提示我们船舶的位置和方向可以用惯性参照系来描述而船舶的线速度和角速度可以用固定在船体上某一点的坐标系（附体坐标系）来描述。也就是说存在两个不同的坐标系来描述船舶的运动：在惯性坐标系 $O_{x'y'z'}$中，船舶的空间位置由坐标 x', y', z'确定，船舶的姿态由 3 个欧拉 (Euler)角 ψ, θ, φ确定；在附体坐标系 A_{xyz} 中，船舶的平移运动由纵荡（又称为前运 surge)速度 u、横荡(又称为横漂 sway)速度 v 和垂荡(又称为沉浮 heave)速度 w 表示，船舶的旋转运动由首摇(又称为回转 yaw)角速度 r、横摇(又称为横倾 roll)角速度 p 和纵摇(又称为纵倾 pitch)角速度 q 描述。

如果船舶重心是处于船体对称平面上，则附体坐标系的原点 A 通常都选在船体的重心 G 处。但对于商船来说，由于装载的不同而使船舶重心的位置改变，选船舶的重心为附体坐标系的原点不是很方便，一般都代之以水线面的中心点。由于水动力的力和力矩以及惯性力和力矩是在附体坐标系中给出的，我们将在附体坐标系中用牛顿定律来表述船舶运动方程。

在推导运动方程时，我们作下列假设： (i)船舶是一个刚体；(ii)大地参照系是惯性参照系。第 1 个假设使我们不去考虑每个质量元素之间的相互作用力而第 2个假设则可以消除由于地球相对于恒星参照系的运动所产生的力。

船体在水中的任意运动可看作为刚体平移运动与绕某一瞬时轴的转动的叠加。那么船体质心 G 处的速度为

$$_G = \ _A + \dot{\rho}_G$$

因为ρ_G只能改变方向而不能改变幅值，故有

$$\dot{\rho}_G = \Omega \times \rho_G \tag{2.4}$$

Ω为刚体的转动角速度

$$\Omega = pi + qj + rk \tag{2.5}$$

根据牛顿运动定律导出的刚体动量式为：

$$F = m\dot{U}_G = m(\dot{U}_A + \dot{\Omega} \times \rho_G + \Omega \times \dot{\rho}_G) \tag{2.6}$$

其中 m 为船舶的质量。从式(2.4)可知

$$\dot{i} = \Omega \times i; \quad \dot{j} = \Omega \times j; \qquad \dot{k} = \Omega \times k; \tag{2.7}$$

因而可得

$$\dot{U}_A = \dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k + u\dot{i} + v\dot{j} + w\dot{k} =$$

$$\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k + \Omega \times (ui + vj + wk) =$$

$$\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k + \Omega \times U_A \tag{2.8}$$

同样，可以得出

$$\dot{\Omega} = \dot{p}i + \dot{q}j + \dot{r}k \tag{2.9}$$

将式(2.8) (2.9)代入式(2.6) 中，即可得到

$$F = m[\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k + \Omega \times U_A + (\dot{q}z_G - \dot{r}y_G)i + (\dot{r}x_G - \dot{p}z_G)j +$$

$$(\dot{p}y_G - \dot{q}x_G)k + \Omega \times (\Omega \times \rho_G)] \tag{2.10}$$

将式(2.10)进一步展开后，投影到 A_{xyz} 坐标系的 3 个轴上，可以得到力 F 在 x，y 和 z 3 个坐标轴上的分量表达式

$$F_x = m(\dot{u} + qw - rv - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(rp + \dot{q})) \tag{2.11 a}$$

$$F_y = m(\dot{v} + ru - pw - y_G(r^2 + p^2) + z_G(qr - \dot{p}) + x_G(pq + \dot{r})) \tag{2.11 b}$$

$$F_z = m(\dot{w} + pv - qu - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(qr + \dot{p})) \tag{2.11 c}$$

式(2.11)中有 3 个方程，它们代表了平移运动。船舶运动有 6 个自由度，共有 6 个变量即 6 个未知数，所以还需要 3 个方程才能解出这些量来。

下面推导表示船舶旋转运动的 3 个方程。

根据刚体转动时相对于运动系统质心的动量矩定理，可知

$$M_G = \frac{\mathrm{d}h_G}{\mathrm{d}t} \tag{2.12}$$

M_G为对质心 G 的合外力矩，h_G为刚体对于质心的动量矩。根据动量矩定义，有

$$h_G = \sum \Delta_m \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{2.13}$$

其中Δ_m是刚体的质量元；$\boldsymbol{r}$为质量元对质心的向径，且 $\boldsymbol{r}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{\Omega}$为刚体的角速度。将式(2.13)展开：

$$\boldsymbol{h}_G = (I_{\alpha\alpha}p - I_{\alpha\beta}q - I_{\alpha\gamma}r)\boldsymbol{i} + (-I_{\beta\alpha}p + I_{\beta\beta}q - I_{\beta\gamma}r)\boldsymbol{j} +$$

$$(-I_{\gamma\alpha}p - I_{\gamma\beta}q + I_{\gamma\gamma}r)\boldsymbol{k} \tag{2.14}$$

其　中　$I_{\alpha\alpha} = \sum \Delta_m(\beta^2+\gamma^2)$　；　$I_{\beta\beta} = \sum \Delta_m(\alpha^2+\gamma^2)$　；

$I_{\gamma\gamma} = \sum \Delta_m(\alpha^2+\beta^2)$ 分别为船对过质心的且与 A_{xyz}平行的动坐标轴 c_α，c_β，c_γ的惯性矩；$I_{\alpha\beta} = \sum \Delta_m \alpha\beta = I_{\beta\alpha}$ ；　$I_{\alpha\gamma} = \sum \Delta_m \alpha\gamma = I_{\gamma\alpha}$ ；

$I_{\beta\gamma} = \sum \Delta_m \beta\gamma = I_{\gamma\beta}$ 是船对同一动坐标轴的惯性积。

为了简化表达式，引入惯性张量 I_G。对质心的惯性张量为

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} & -I_{\alpha\gamma} \\ -I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} & -I_{\beta\gamma} \\ -I_{\gamma\alpha} & -I_{\gamma\beta} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

这样动量矩 h_G的 3个分量可表示为

$$\boldsymbol{h}_G = \begin{bmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \\ h_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & -I_{\alpha\beta} & -I_{\alpha\gamma} \\ -I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} & -I_{\beta\gamma} \\ -I_{\gamma\alpha} & -I_{\gamma\beta} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = I_G \tilde{\Omega} \tag{2.16}$$

$\tilde{\Omega}$是Ω各元的列向量。

我们需要的不仅仅是相对于质心的动量矩方程，而且需要对在刚体中任意点 A 的动量矩方程。

根据力的平移定理——把作用在刚体上某一点的力平移到该刚体上任一指定点，须附加一适当的力偶，此力偶的力偶矩等于原力对该指定点的矩。我们可得：

$$M_A = M_G + \rho_G \times F = \dot{h}_G + \rho_G \times F \tag{2.17}$$

考虑到平行轴定理——刚体对任何一轴的转动惯量 I 和对通过其质心的平行轴的转动惯量 I_G 之间有关系：$I = I_G + mh^2$，h 为两轴间的距离；把它推广到空间（杨承恩，1988），有

$$I_A = I_G + I_{GA} \tag{2.18}$$

其中 I_A 为对原点 A 的惯性张量，I_{GA} 为质心 G 到原点 A 的惯性张量。

$$I_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad I_{GA} = \begin{bmatrix} I_{x_G x_G} & -I_{x_G y_G} & -I_{x_G z_G} \\ -I_{y_G x_G} & I_{y_G y_G} & -I_{y_G z_G} \\ -I_{z_G x_G} & -I_{z_G y_G} & I_{z_G z_G} \end{bmatrix}$$

其中

$$I_{x_G x_G} = m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{y_G y_G} = m(x_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{z_G z_G} = m(x_G^2 + y_G^2)$$

分别是质心 G 相对于刚体坐标系 x，y，z 轴的惯性矩；

$$I_{x_G y_G} = m x_G y_G = I_{y_G x_G}$$

$$I_{x_G z_G} = m x_G z_G = I_{z_G x_G}$$

$$I_{y_G z_G} = m y_G z_G = I_{z_G x_G}$$

分别是质心 G 相对于同一坐标系的惯性积。从式(2.18)可知