

第一章 绪论

月球 俗称“月亮”古时又称“太阴”是地球唯一的天然卫星（在天文学中常用符号☾表示）是除流星和人造天体之外离我们最近的天体，很自然地成为空间探测的第一个目标。

在讨论月球探测器轨道设计之前，本章首先介绍月球的概况、月球探测器的飞行方式和轨道类型、月球探测活动的历史和展望以及月球探测器轨道设计简介。

1.1 月球的概况

1.1.1 月球的一般特征

对月球的精密观测表明，月球的平均半径 $R_L = 1738\text{km}$ 约为地球半径的 $3/11$ 。月球并不是理想的正球体，令其指向地球方向、轨道运动方向和极方向的半径分别为 a 、 b 和 c 则 $a - c = 1.09\text{km}$ 、 $a - b = 0.31\text{km}$ 、 $b - c = 0.78\text{km}$ 但在一般计算中可将月球作为圆球看待。

月球的体积为 $2.2 \times 10^{25}\text{cm}^3$ 约为地球体积的 $1/49$ 。

月球的质量 $m_L = 7.35 \times 10^{22}\text{kg}$ 令月地质量比为 μ 则 μ 约为 $1/81.3$ 。这一质量比远大于太阳系中任何其它双星系统的质量比。

月球的平均密度为 3.34g/cm^3 约为地球平均密度的 $3/5$ 。

月球表面的引力加速度为 1.62m/s^2 ，约为地球表面引力加速度的 $1/6$ 。

月球上的逃逸速度约为 2.4km/s ，约为地球上逃逸速度的 $1/5$ 。

月面上山岭起伏 峰峦密布 其特征以环形山、月海、月陆、山脉和峭壁、月面辐射纹、月谷和月溪等表示。

月面上最明显的特征是环形山（或称月坑），它是月面上的碗状凹坑结构，大的直径可超过 100km 小的只是一些凹坑 直径大于 1km 的环形山总数约为 33000 个。环形山大多以著名天文学家或其他学者的名字命名，月球背面（背向地球的一面）有 4 座环形山分别以中国古代天文学家石申、张衡、祖冲之、郭守敬命名。月面最大的几个环形山分别是南极附近的贝利环形山（直径 295km）克拉维环形山（直径 233km）牛顿环形山（直径 230km）。

月海是月面上的广阔平原，在月球正面（面向地球的一面）月海面积约占整个半球面积的一半。已知整个月面共有 22 个月海，月面最大的几个月海分别是风暴洋（面积约 $500 \times 10^4 \text{km}^2$ ）雨海（面积约 $90 \times 10^4 \text{km}^2$ ）月面中央的静海（面积约 $26 \times 10^4 \text{km}^2$ ）。此外较大的还有澄海、丰富海、危海、云海等。月海大多为山脉所包围，月球表面没有水 1998 年 3 月 5 日 美国宇航局宣布，1998 年 1 月发射的“月球勘探者”探测器发现在月球南、北两极陨石坑深处有冰冻的水存在），称之为海只是在形态上有某些相似之处。

月陆、山脉和峭壁是月面上高出月海的部分。月陆一般高出月海 2~3km，月球正面的月陆与月海面积大致相等，而背面则月陆面积大些。月面上也存在一些山脉，山脉往往高出月海 3~4km 最长的山脉达 1000km，山脉大多以地球上的山脉命名。如亚平宁山脉、高加索山脉、阿尔卑斯山脉等。最高的山峰在月球南极附近 高达 9km。除山脉外，还有长达数百公里的峭壁，最长的是阿尔泰峭壁。

在第谷环形山和哥白尼环形山周围有典型的月面幅射纹，第谷环形山有 12 条向周围成放射状向外延伸的幅射纹，最长的达 1800km。

月面上有不少地区有一些大裂缝，延绵数百公里，宽度达几公里到几十公里，较宽的峡谷称为月谷，较细的小谷称之为月溪。

长期的科学观测和航天员登月直接考察的结果证实，月面上

没有水也没有大气层 因而是一个月面干旱、无风、无声响、无生命的寂静世界。

月面昼夜温差很大，白天阳光直射处温度高达 127°C 夜晚可降低到 -183°C 。

由于月球没有大气层，经常受到陨石的轰击和太阳辐射的强烈照射，加上温度的急剧变化使岩石发生强烈的机械破坏作用，使月面的大部分地区为一层厚度不等的月尘、岩峭和岩块物质所覆盖。

月球本身不发光，只反射太阳光，它的亮度随日月黄经差（即月相角）和地月间距离的改变而变化，在满月时亮度的平均值为 -12.7 等星。月面不是良好的反光体，它的平均反照率只有 7%，其余 93% 为月球吸收。月海的反照率低，约为 6% 月陆和环形山的反照率约为 17%，因而看上去山地比月海明亮。

长期天文观测与登月直接考察证实，月球上没有显著的磁场，月球磁场强度不及地球磁场的 $1/1000$ ，月球没有像地球那样的辐射带。

通过月球探测查明 月球正面有称为“重力瘤”或“质量瘤”的重力异常区 达 12处之多 而背面未发现“重力瘤”。

JPL(Jet Propulsion Laboratory 美国喷气推进实验室)的归一化月球引力位系数 \bar{C}'_{mm} 和 \bar{S}'_{mm} 参见附录 F^[1]。由各引力位系数可以看出，月球引力场的特性不同于地球引力场。归一化的地球引力位系数 C_{mm} 和 S_{mm} 的值迅速减小 例如 C_{20} 的量级为 10^{-4} ，而 \bar{C}_{22} 只有 10^{-6} ；但月球的各系数减小得很慢，并且有的系数反而增大。这反映了月球内部质量分布的不均匀程度，与存在质量瘤的事实相符。

1.1.2 月球的运动

月球围绕地球作公转运动。为实现月球探测，必须研究作为目标天体的月球的运动规律。

将月球看作刚体，和一般刚体一样，月球的运动可分为质心的

运动 即轨道运动 和绕质心的转动 即自转 这两个部分。

一、月球的轨道运动

1. 月球的轨道根数

在近似研究月球的质心运动时，将月球和地球看作全部质量集中在质心的质点，并且它们只受彼此间相互吸引的引力作用，构成地月二体系统。在惯性坐标系内观察，这个二体系统的公共质心绕太阳公转，月球和地球又分别绕公共质心作转动运动。公共质心在地月质心连线上，距地心 4671km。

为观察月球相对于地球的运动，由二体运动理论可知，月心相对于地心的运动可用下述动力学方程描述：

$$\ddot{\mathbf{R}}_L = -\frac{\mu_E(1+\mu)}{R_L^3} \mathbf{R}_L \quad (1.1)$$

式中 \mathbf{R}_L 为月心的地心位置矢量； R_L 是 \mathbf{R}_L 的模； μ_E 为地球引力常数； μ 为月地质量比。

如果相对于地球运动的不是月球而是人造地球卫星，因为人造地球卫星的质量远小于地球质量，因而人造地球卫星与地球质量比近似为零，则动力学方程退化为

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu_E}{R^3} \mathbf{R} \quad (1.2)$$

式中 \mathbf{R} 为卫星的地心位置矢量； R 是 \mathbf{R} 的模。

式(1.2)是不计人造地球卫星对地球的引力，只考虑地球对人造地球卫星引力的结果，这一方程称为限制性二体问题的运动方程。

式(1.1)与式(1.2)只是引力常数的大小有差别，动力学方程的解有相同的形式。因而月球与人造地球卫星一样围绕地心作平面椭圆轨道运动。

月球轨道运动的平面称为白道面，将月球轨道面扩大和天球相交的大圆称为白道。为了描述月球的轨道运动，可以和人造地球卫星一样用 6 个轨道根数表示。不同的是月球的轨道根数应在以地心、黄道和春分点为基准的地心黄道坐标系中描述（描述人

造地球卫星的轨道根数的坐标系一般是以地心、地球赤道和春分点为基准的地心赤道坐标系，即本书第三章将介绍的地心天球坐标系）

月球的 6 个轨道根数为^[2]

a_L ——长半轴； e_L ——偏心率；
 Ω_L ——升交点黄经； i_L ——轨道倾角；
 Γ_L ——近地点黄经； L_L ——历元时刻月球的平黄经。

上述前 4 个根数与经典轨道根数的定义一样。近地点黄经为首先沿黄道从春分点量至升交点，然后再沿白道量至近地点的角度之和；月球的平黄经为首先沿黄道从春分点量至升交点，然后再沿白道量至月球的平位置的角度之和。

若在地月二体系统中只考虑两者间相互的引力作用，则 6 个经典轨道根数应为常数。但实际上二体系统还会受到一些摄动力的作用，在摄动力中主要是太阳的引力，其它还有行星的摄动力，对月球而言还有地球非球形产生的摄动，地球潮汐形成的月球加速度等摄动因素，使得月球相对于地球的运动稍许偏离椭圆轨道，从而使得轨道根数不是常数，其数值随时间不断变化。考虑长期变化的月球平均轨道根数参见附录 B。

对于任意给定的时刻，在考虑摄动作用时，精确的月球位置和速度可查数值的行星 / 月球历表计算 参见附录 D。

为了说明月球轨道运动的复杂性，简要地介绍一下月球轨道运动的一些主要摄动^[3]。

(1)长半轴的变化。长半轴的平均值为 384400km 椭圆轨道的近地距平均值为 363300km 远地距平均值为 405500km。由于摄动作用，长半轴的变化可达 2700km。月球平均赤道地平视差（即在平均距离处从月球看地球赤道半径所张开的角度）为 $57'2''.60$ 而从地球看月球的赤道半径张角平均值为 $15'32''.6$ 。

(2)偏心率的变化。偏心率的平均值为 0.0549 接近于 $1/18$ ，由于摄动作用 每隔 31.8 天就出现小的周期变化，变化在 $1/15 \sim 1/23$ 的范围内。

(3) 倾角的变化。倾角的平均值为 $5^{\circ}09'$ 由于摄动作用 倾角的实际值在 $4^{\circ}57' \sim 5^{\circ}19'$ 之间变动。

(4) 近地点运动。近地点沿月球公转方向运动，每 8.85 年运动一周。

(5) 交点西退。升交点在空间的位置不是固定的，而是不断沿黄道向西退行 每年西退 $19^{\circ}21'$ 每 18.6 年运动一周。

白道、黄道和地球赤道的相互关系如图 1.1 所示 其中 r 为春分点、 N_L 为白道相对于黄道的升交点， ϵ_S 为黄道相对于地球赤道的夹角（即黄赤交角）， $\epsilon_S = 23^{\circ}27'$ ， $i_L = 5^{\circ}09'$ 。

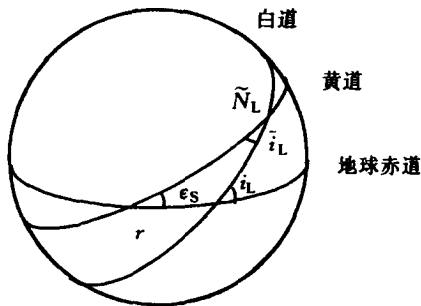


图 1.1 白道、黄道和地球赤道的相互关系

由图 1.1 可知，由于交点西退引起白道与地球赤道的夹角 i_L 发生变化。当升交点与春分点重合时，白道与地球赤道之间的夹角达到最大值： $23^{\circ}27' + 5^{\circ}09' = 28^{\circ}36'$ 。当降交点与春分点重合时，白道面与地球赤道面之间的夹角达到最小值 $23^{\circ}27' - 5^{\circ}09' = 18^{\circ}18'$ 。因此白道面与地球赤道面间的夹角在 $18^{\circ}18' \sim 28^{\circ}36'$ 之间变化 变化周期是 18.6 年。

白道与地球赤道面的夹角大致变化如图 1.2 所示。

2. 月球的周期运动

月球绕地球的旋转运动为周期性运动，周期的长短与计算周期所选用的基准有关。

(1) 恒星月：以恒星位置为基准的周期，即地月连线连续两次指向同一恒星所经过的时间。这一周期也就是月球绕地球旋转

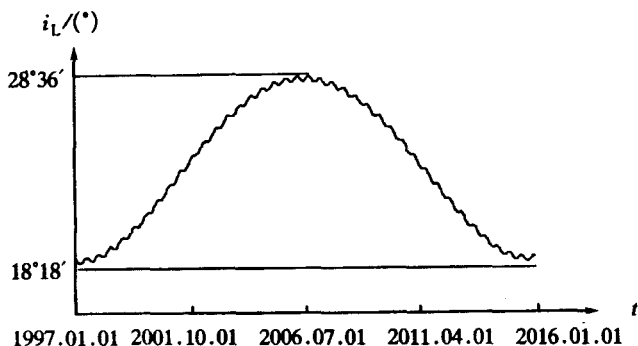


图 1.2 白道与地球赤道面的夹角变化图

360°所用的时间，恒星月的平均长度为 27.32166 平太阳日。

(2) 朔望月：以太阳位置为基准的周期。月球与太阳的相对位置不同而使月球的月相不同。月相为观测者所看到的月球的相貌，如朔、望、上弦、下弦。阴历初一为新月，称为朔，十五或十六为满月，称为望，在朔望之间为弦，见图 1.3。

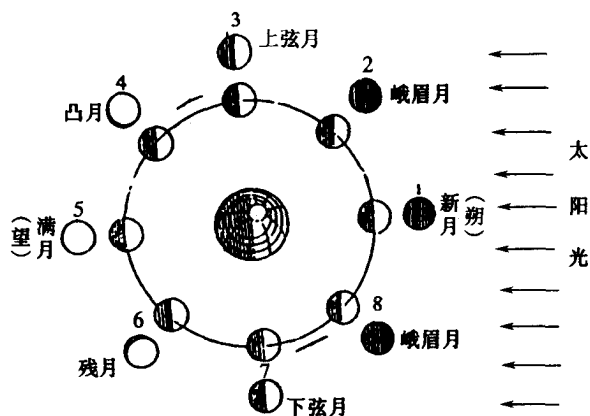


图 1.3 月相的成因

朔望月是月相连续两次相同所经过的时间。例如从新月到新月的周期或从满月到满月的周期。朔望月的平均长度为 29.5306 平太阳日，我国传统的农历以朔望月作为月的单位。

朔望月比恒星月约长 2.2 日 其原因可由图 1.4 加以说明。

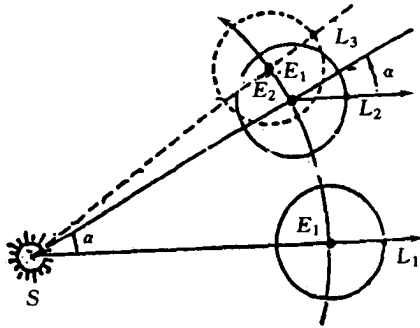


图 1.4 恒星月与朔望月

从地、月分别处于 E_1 、 L_1 位置时开始观察，此时月相为望月。地球运行到 E_2 月球运行到 L_2 ，这时观测者看到 E_2L_2 所指的恒星方向与 E_1L_1 所指恒星方向相同，而月球绕地球运转了 360° 时间为 1 个恒星月。但此时月球与太阳的相互关系尚未使月相为望月，因而月球要继续运行到 L_3 位置才为望月，因而朔望月长于恒星月。

(3) 交点月：月球的周期运动除恒星月、朔望月外，还有以交点为基准的交点月，即月球连续两次向北通过黄道（升交点）所需的时间，经测定其平均周期为 27.21222 平太阳日。

(4) 近点月：以月球轨道近地点为基准的近点月，即月球运行从近地点再到近地点的周期，近点月的周期为 27.55455 平太阳日。

(5) 分点月(又称回归月)以春分点为基准的分点月 即月球黄经连续两次等于春分点黄经所需的时间，其长度为 27.32158 平太阳日。

二、月球的自转

1. 月球的自转

月球的自转是用下述卡西尼三个定律描述的：

(1) 月球的自转轴垂直于月球赤道；旋转周期等于月球绕地球

公转的恒星月平均长度。

(2) 月球赤道相对于黄道的倾角 \tilde{I}_L 为常数 $\tilde{I}_L = 1^\circ 32'$ 。

(3) 月球赤道面、黄道面和白道面三者交于同一条线，且黄道面位于中间。白道相对于黄道的降交点与月球赤道相对于黄道的升交点重合。因白道和黄道之间的夹角 \tilde{i}_L 也为常数 $\tilde{i}_L = 5^\circ 09'$ 。所以，月球赤道面和白道的夹角 $\tilde{i}_L + \tilde{I}_L$ 也为常数 $\tilde{i}_L + \tilde{I}_L = 6^\circ 41'$ 。

月球自转周期为 27.32166 平太阳日，故月球自转角速度为

$$\omega_L = \frac{2\pi}{27.32166 \times 24 \times 3600} = 2.661699 \times 10^{-6} \text{ (rad/s)}, \text{ 约为 } 13.2^\circ / \text{天}.$$

2. 月球的天平动

若月球绕地球运动的轨道为圆形，且自转轴垂直于白道面（即月球赤道面与白道面重合），则月球将以相同的半面面对地球，如图 1.5 所示。

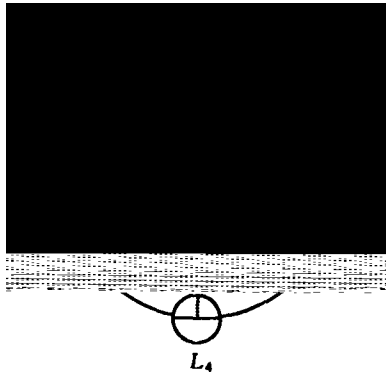


图 1.5 月球自转

在图 1.5 中 E 为地球， $L_1 - L_4$ 为月球在公转轨道上的四等分位置， a 表示正对观测者的月面中心。从 L_1 到 L_2 月球公转 90° 若月球不自转 原来在 L_1 位置面对观测者的 a 点到 L_2 位置将不面对地球。由于实际上月球是自转的，并且在公转 90° 的同时 自转也是 90° ，因而观测者面对的仍为 a 点。依次类推，在

月球公转过程中，正对观测者的始终是月面的中心。

事实上，所观测到的月球表面比它的一半还要大些，这是由于月球具有一种特殊的运动——天平动，使地球上观测者看到的月面有一些微小的变动。由于天平动的起因不同，可分为两类。一类是月球本身没有任何摆动，仅仅是地球上观测者视觉引起的，称为视天平动或光学天平动，这一类天平动包括经度天平动、纬度天平动、视差天平动、周日天平动四种；另一类是月球本身固有的摆动引起的，称为物理天平动。

(1)经度天平动。经度天平动是月球绕地球运动的轨道不是圆轨道而是椭圆轨道引起的，椭圆轨道的角速度不均匀，在近地点 P 附近角速度大 在远地点 A 附近角速度小。月球自转的角速度是均匀的 由图 1.6 可知，月球在轨道上不同位置，观测者能多看到月球东边和西边一点，最大可达 $7^{\circ}45'$ 。经度天平动是随月球在轨道上不同位置而变化的，其周期为近点月。

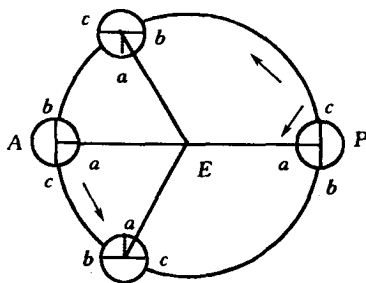


图 1.6 经度天平动

(2)纬度天平动。纬度天平动是由于月球自转轴垂直于月球赤道面而不垂直于白道面引起的，如图 1.7 所示。月球赤道与白

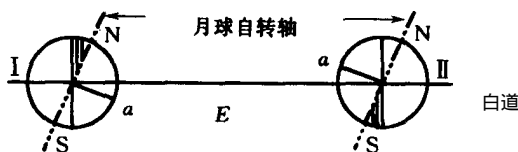


图 1.7 纬度天平动

道夹角为 $6^{\circ}41'$ 周期为交点月。

(3)视差天平动。视差天平动是由于月球距地球较近，在同一时刻，在地球上不同位置观测所看到的月面不完全相同，如图 1.8 所示 在 A 点看到的是 abc 半面 在 B 点看到的是 $a'b'c'$ 半面。

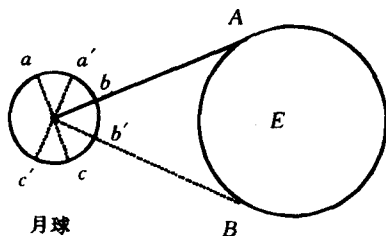


图 1.8 视差天平动

(4)周日天平动。周日天平动也是由于月球离地球较近，在地球上同一观测地点，在不同时刻所看到的月面也不完全相同，如图 1.9 所示。视差天平动和周日天平动的总和可达 1° 。

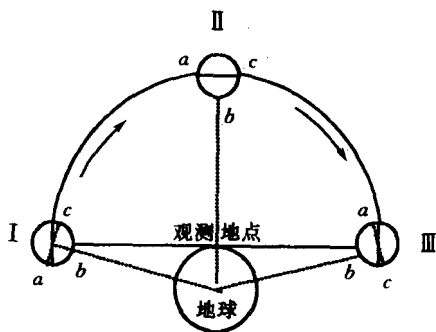


图 1.9 周日天平动

(5)物理天平动。物理天平动是月球本身具有的一种摆动，物理天平动很小 只有 $2'$ 。这种天平动是由于地球的引力作用使得月球向地球一面稍凸，又由于经度天平动的作用，使凸出方向稍许偏斜，地球引力又将其拉回去，使得月球本身在东、西方向存在一个真正的摆动。

上述几种天平动的作用，使我们在地球上不仅能看到月球始

终面向地球的那一面，而且能看到月球背面的边缘部分，使月球可见面达月球整个表面的 59%。

1.1.3 与月球有关的坐标系^[4]

一、月固坐标系

月面点及月球引力位都以月固坐标系为参考系。月固坐标系 $O_L-x'y'z'$ 的原点为月心 O_L ，参考平面是月球赤道面， O_Lx' 轴通过月面上的 Sinus Medii (中央湾)， O_Lz' 轴顺月球自转方向，该坐标系是右手坐标系。

作为卡西尼第一定律的结果， O_Lx' 轴指向地球的平均位置。若月球通过轨道升交点，而此升交点又与月球的近地点或远地点重合，则 O_Lx' 从月心指向地心。

将过 Sinus Medii 包含月球自转轴所作的垂直于月球赤道的半平面作为月心经度的起始子午面。从起始子午面沿月球赤道向东量度为月心东经，向西为月心西经，东、西经范围各为 $0^\circ \sim 180^\circ$ 。月球的赤道面将月球分为南、北两个半球，月球自转轴指向月球北极。和地球相类似，将月球上的纬度按南、北半球不同分别称为月心南纬和月心北纬，月球赤道的月心纬度为 0° ，南纬纬度为负值，北纬纬度为正值，南、北纬范围各为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 。

O_Lx' 轴只指向地球的平均位置，并不时刻指向地球。图 1.10

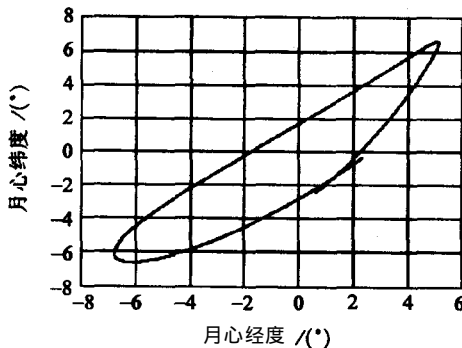


图 1.10 地球在月面的星下点轨迹

给出了 1997 年 6 月地球在月面上的星下点轨迹。

二、地球上有关的圈、线、点和角

图 1.11 为地心天球图 表示地球赤道、月球赤道、黄道、白道、月球起始子午线在天球上的投影。其中, γ 为春分点、 ϵ_s 为黄赤交角、 \tilde{i}_L 为月球赤道相对黄道的倾角、 \tilde{i}_L 为黄道与白道交角。

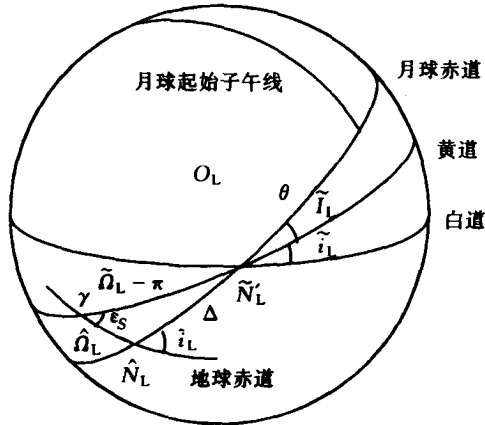


图 1.11 地球赤道、黄道、白道、月球赤道和月球起始子午线在天球上的投影

根据卡西尼第三定律可知, 月球赤道、黄道和白道交于两点。如图 1.11 所示 交点 \tilde{N}'_L 为白道相对于黄道的降交点。设白道升交点的黄经为 $\tilde{\Omega}_L$ 则 \tilde{N}'_L 的黄经为 $\tilde{\Omega}_L - \pi$ 。 θ 为月球起始子午线至 \tilde{N}'_L 的夹角。

设月球的平黄经为 \tilde{L}_L 。当 $O_L x'$ 轴指向降交点 \tilde{N}'_L 时, 由于 $O_L x'$ 轴在月球指向地球的方向, 因此月球在升交点; 当 $O_L x'$ 轴以月球自转角速度转过 θ 时, 由于月球自转角速度与月球公转的平均速度相等, 因而月球在白道上以平角速度转过的角度为 $L_L - \Omega_L$ 故有

$$\theta = \tilde{L}_L - \tilde{\Omega}_L \quad (1.3)$$

在图 1.11 中 设 \tilde{N}_L 为月球赤道相对于地球赤道的升交点

并且设 $\tilde{\Omega}_L$ 为该升交点赤经、 u_L 为该升交点至月球起始子午线的角度、 \hat{i}_L 为月球赤道相对于地球赤道的倾角。从第二章的 2.6 节中可以看出 u_L, i_L 和 u_L 表示从地心天球坐标系 O_E-XYZ 转换到月固坐标系 $O_L-x'y'z'$ 的三个欧拉角。

另外在图 1.11 中设 Δ 为 \tilde{N}_L 与 \tilde{N}'_L 的夹角。在球面三角形 $\gamma\tilde{N}_L\tilde{N}'_L$ 中,有:

$$\cos \hat{i}_L = \sin \tilde{I}_L \cos \tilde{\Omega}_L \sin \epsilon_S + \cos \tilde{I}_L \cos \epsilon_S \quad (1.4)$$

$$\sin \hat{\Omega}_L = \frac{-\sin \tilde{I}_L \sin \tilde{\Omega}_L}{\sin \hat{i}_L} \quad (1.5)$$

$$\cos \hat{\Omega}_L = \frac{\cos \tilde{I}_L \sin \epsilon_S - \sin \tilde{I}_L \cos \tilde{\Omega}_L \cos \epsilon_S}{\sin \hat{i}_L}$$

$$\sin \Delta = \frac{-\sin \tilde{\Omega}_L \sin \epsilon_S}{\sin \hat{i}_L} \quad (1.6)$$

$$\cos \Delta = \frac{\sin \tilde{I}_L \cos \epsilon_S - \cos \tilde{I}_L \cos \tilde{\Omega}_L \sin \epsilon_S}{\sin \tilde{I}_L}$$

则

$$u_L = \Delta + \theta \quad (1.7)$$

附录 B 给出了 $\epsilon_S, \tilde{\Omega}_L$ 和 \tilde{I}_L 的平均值^[2]。在考虑物理天平动改正时,欧拉角需作相应的修正。因修正项的量级约为 2' 且为周期项,近似计算时可以略去^[3]。

在第三章中可以看到,将探测器的速度矢量从地心天球坐标系转换到月固坐标系转换时,还要用到三个欧拉角的变率,即 $d\hat{\Omega}_L/dt, d\hat{i}_L/dt$ 和 $d\hat{u}_L/dt$ 。在近似计算中,可取 $d\hat{\Omega}_L/dt = 0$ 、 $d\hat{i}_L/dt = 0$ 和 $d\hat{u}_L/dt = d\theta/dt \cdot 13.2(^{\circ}/\text{天})$ 。

精确的欧拉角及其变率可查数值的行星/月球历表计算 参见附录 D。

月球的运动状态,包括月球的位置、速度和上述 3 个欧拉角,可由附录 B 给出的解析表达式和式(1.3)~式(1.7)计算 也可查

附录 D 的数值行星 / 月球历表进行计算。前者由平均根数法导出，并未考虑月球轨道的周期变化。两者计算得到的月球位置差约 100km 左右，两者计算得到的欧拉角使月面目标点位置相差约 170m^[5]。因此，在进行实际工程的月球探测器轨道设计时，应采用数值的行星 / 月球历表计算月球的运动状态。但在进行月球探测器轨道特性分析时，可采用解析的表达式近似计算月球运动的状态。

1.1.4 月球的影响球

在讨论探测器在地月空间运动时，往往可近似成两个二体系统，即当探测器运动在地球附近时，认为探测器与地球构成一个二体系统；当探测器运动在月球附近时，认为探测器与月球构成一个二体系统。为了能比较合理地划分这两个二体问题的范围，提出月球影响球的概念。

图 1.12 中， E 、 L 和 P 分别为地球、月球和探测器，它们的质量分别为 m_E 、 m_L 、 m 。 r 为探测器的月心位置矢量， r 为其月心距； R 为地球相对探测器的位置矢量， R 为探测器地心距； R_{EL} 为地球的月心位置矢量， R_{EL} 为其大小。 $\alpha = \angle PLE$ 、 $\theta = \angle PEL$ 。

P 相对 L 运动的动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m+m_L)}{r^3}\mathbf{r} + Gm_E\left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_{EL}}{R_{EL}^3}\right] \quad (1.8)$$

式 (1.8) 中， G 为万有引力常数， L 和 P 之间的相互引力为

$$F_L = \frac{G(m_L+m)}{r^2} \quad (1.9)$$

E 的摄动力为

$$\begin{aligned} \Delta F_L &= Gm_E \left| \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_{EL}}{R_{EL}^3} \right| = \\ &Gm_E \left[\left(\frac{1}{R^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{EL}^2} \right)^2 - \frac{2}{R^2 R_{EL}^2} \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$Gm_E \frac{1}{R^2} \left[1 + \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 - 2 \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^2 \cos \theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

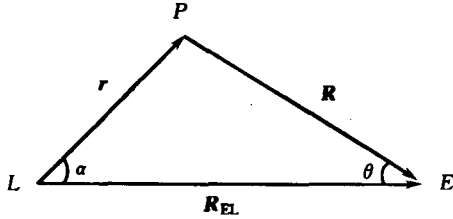


图 1.12 地球、月球和探测器的相互位置

由图 1.12 看出

$$r \cos \alpha + R \cos \theta = R_{EL}$$

故

$$\cos \theta = \frac{R_{EL}}{R} - \frac{r}{R} \cos \alpha$$

代入式 (1.10)

$$\Delta F_L = Gm_E \frac{1}{R^2} \left[1 + \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 - 2 \frac{R}{R_{EL}} \left(1 - \frac{r}{R_{EL}} \cos \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

于是地球的摄动力与月球的引力之比为

$$\frac{\Delta F_L}{F_L} = \frac{m_E}{m_L + m} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 - 2 \frac{R}{R_{EL}} \left(1 - \frac{r}{R_{EL}} \cos \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

假如将 L 看作摄动体, E 作为主星体, 那么 P 相对 E 的运动方程是:

$$\ddot{\mathbf{R}} = - \frac{G(m_E + m)}{R^3} \mathbf{R} + Gm_L \left[\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{R}_{EL}}{R_{EL}^3} \right] \quad (1.12)$$

式 (1.12) 中 E 和 P 之间的相互引力为

$$F_E = \frac{G(m_E + m)}{R^2} = \frac{G(m_E + m)}{r^2 + R_{EL}^2 - 2rR_{EL} \cos \alpha}$$

$$\frac{G(m_E + m)}{R_{EL}^2} \left(1 + \frac{r^2}{R_{EL}^2} - 2 \frac{r}{R_{EL}} \cos \alpha \right)^{-1} \quad (1.13)$$

L 的摄动力为

$$\begin{aligned} \Delta F_E &= Gm_L \left[\left(\frac{1}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{EL}^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{1}{R_{EL}^2} \right) \cos \alpha \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{Gm_L}{r^2} \left[1 + \left(\frac{r}{R_{EL}} \right)^4 - 2 \left(\frac{r}{R_{EL}} \right)^2 \cos \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

此时月球摄动力与地球的引力之比为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_E}{F_E} &= \frac{m_L}{m_E + m} \left(\frac{R_{EL}}{r} \right)^2 \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R_{EL}} \right)^2 \cos \alpha + \left(\frac{r}{R_{EL}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &= \left[1 - 2 \frac{r}{R_{EL}} \cos \alpha + \left(\frac{r}{R_{EL}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

凡满足 $\Delta F_E/F_E = \Delta F_L/F_L$ 的 r 称之为月球 L 相对地球 E 的作用半径, 以符号 ρ 表示。由 ρ 划出一个包围 L 的区域 称为影响范围。根据这一定义易得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^4 &= \mu^2 \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 \left[1 - 2 \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^2 \cos \alpha + \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &= \left[1 - 2 \frac{R}{R_{EL}} \left(1 - \frac{\rho}{R_{EL}} \cos \alpha \right) + \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

式中, μ 为月地质量比。

推导式 (1.16) 时已忽略了小量 m/m_E 和 m/m_L 由于 ρ/R_{EL} 也是小量 所以

$$\frac{R}{R_{EL}} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^2 - 2 \frac{\rho}{R_{EL}} \cos \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.17)$$

则

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{R_{EL}} \right)^4 &= 1 - 4 \frac{\rho}{R_{EL}} \cos \alpha + 2 \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^2 + \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^4 - \\ &= 4 \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^3 \cos \alpha + 4 \left(\frac{\rho}{R_{EL}} \right)^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (1.18)$$