变域传热发汗控制理论

杨学实 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

变域传热发汗控制理论/杨学实著. - 北京:北京大学出版社, 2002.10
ISBN 7-301-05777-6

Ⅰ.变… Ⅱ.杨… Ⅲ.飞行器-传热-蒸发冷却-数学模型 Ⅳ.V41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 077581 号

书　　名: 变域传热发汗控制理论
著作责任者: 杨学实　编著
责 任 编 辑: 周月梅
标 准 书 号: ISBN 7-301-05777-6/TP·0682
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　话: 发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者:
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
　　787×1092　16 开本　18.625 印张　462 千字
　　2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷
定　　价: 40.00 元

前　言

本书的主要内容由以下三方面的特点构成：第一个特点是发汗研究的角度不同. 发汗冷却研究起始于 1904 年 L. Prandtl 的一篇论文中. 它属于空气动力学范畴, 是黏性气体边界层理论的分支学科. 二次世界大战之前, 仅限于德国国内发展; 二次世界大战之后, 才扩展到美、英、法及其他一些国家. 大战之前研究的主要对象是飞机, 中心问题是为了增加升力和减少阻力而探索发汗对边界层分离的影响, 理论基础是边界层方程. 大战之后研究的主要对象是导弹和飞船, 中心问题是发汗引起壁面加热的变化, 理论基础是含传质影响的边界层方程. 至今仍有不少学者在这方面继续探索. 可以发现, 近百年来发汗研究总离不开气体边界层方程. 然而, 从飞行器防热工程设计角度讲, 最关心的设计数据是结构温度. 就是说, 温度引起的结构强度的可靠性是安全设计的重要内容. 于是, 这本书对发汗问题的研究, 不是从气体边界层角度. 就是说, 我们不去研究表面加热, 也不去研究热的阻塞, 而是从发汗对结构温度和传热的影响为出发点, 针对飞行器外壳, 建立发汗对结构传热和温度影响的方程. 这是该项研究的第一个特点.

第二个特点是变域的“快烧蚀”模型. 20 世纪 70 年代, 在烧蚀试验过程中, 发现多数防热材料不适合液态层烧蚀理论. 也就是说, 烧蚀表面在某些焓值和热流状态下, 几乎不能发现液态状流体在烧蚀表面上的流动现象, 却存在无数固体颗粒状物质亮点脱离表面注入气体边界层的闪烁现象. 集中到闪烁点观察(某个局部点)时, 发现该点在明亮一小段时间后, 突然出现暗点. 随后暗点逐渐变亮并保持一段时间之后, 随即又突然出现暗点. 从明到暗过程中有颗粒状物质脱离表面进入气体边界层. 它的尺度相对一般烧蚀而言较大. 这一现象的发现迫使我们在处理烧蚀工程问题时放弃液态层烧蚀理论, 而不得不转向试验中发现的现象的研究. 我们把这种现象称为剥蚀. 它是在边界层气流对固体表面加热和剪切的联合作用下, 防热材料到达熔化之前使之以固态物质被剥离的形式出现的. 它的特征是烧蚀边界以快速变化的形式移动. 从这种物理现象进行抽象和归纳, 它不像冰的熔化和冻土带边界的移动那样缓慢, 因而把这类烧蚀称做“快烧蚀”模型. 相对而言, 冰和蜡的溶蚀相变就属于“慢烧蚀”一类. 因此在数学模型上有所不同. 所谓溶蚀相变就是有关拉梅(Lame)与克拉珀龙(Clapeyron)于 1931 年及斯蒂芬于 1891 年针对冰的形成和溶化所进行的早期研究著作中提出来的. 冰的形成或溶化现象的过程十分缓慢, 以至于在一段时间内几乎难以发现边界的运动. 对于“慢烧蚀”, 边界移动对热传导和温度的影响可以忽略; 对于这本书所要集中研究的“快烧蚀”数学模型, 具有较广泛的用途; 不仅用于“快烧蚀”问题, 也用于“慢烧蚀”问题. 这是该项研究的第二个特点.

顺便指出, 书中将会证明,“慢烧蚀”数学模型可以由“快烧蚀”数学模型在简化条件下推导而来. 关于烧蚀的学说, 我国科学家卞荫贵先生在中国科学技术大学近代力学系授课期间所著《高速边界层传热》(见第一章的文献[53])一书包含烧蚀理论的经典著作. 他总结了 60 年代之后烧蚀理论快速发展时期的国内外最重要的研究成果.

当发汗剂流经多孔材料时,能够携带内部热量,因而改变内部温度剖面,同时也能阻塞外部加热对受热体的影响,改变烧蚀量.将前人在气体边界层加热和表面阻塞方面的研究成果,纳入本项研究的边界条件中,得到带烧蚀发汗冷却数学问题.通过对冷却剂流量的调节,达到控制结构温度和表面烧蚀的目的,因而提出了控制概念.这是该项研究的第三个特点.于是我们建立了变域传热发汗控制问题的研究项目.

该项目所要研究的内容包括:就发汗剂而言,分为可压缩发汗剂和不可压缩发汗剂;就传热域而言,分为固定域和可变域;控制而言,分为烧蚀控制和温度场控制;控制类型而言,分为开环控制和闭环控制;每类问题又有一维、二维、和多维之分;每项研究又包括数学模型、数值方法、数学仿真、数学理论、控制理论、试验研究和应用研究等.该项目的发展形成了变域传热发汗控制研究的"问题网".这个网所提出的问题十分庞大,曾获中国国家自然科学基金委员会的连续三期研究经费支持(时间、编号和题目分别为:1991—1993 年,69074010,发汗冷却控制研究;1995—1997 年,69474009,活动边界分布参数控制的基本性质研究;1998—2000 年,69774013,分布参数系统—发汗冷却控制特性研究),结题后被基金委员会的专家们评选为"特优"项目.虽然目前该项目的研究处于初期阶段,作为这个阶段的总结,也作为对国家自然科学基金委员会的感谢,同时为了将这些成果奉献给读者,撰写这本书.

书中分为八章,第一章为数学模型,内容中回顾了固定域热传导,讨论了变域热传导和相变传热数学模型之间的关系;给出了变域传热发汗开环控制和闭环控制模型,以及固定域温度控制模型和变域边界控制模型、多维模型、发汗剂为不可压缩模型和可压缩模型等.第二章为一维变域传热发汗冷却控制数学模型的数值方法和数学仿真研究.第三章为二维和三维模型的数值方法和数学仿真研究.第四章是发汗剂为可压缩气体的变域传热发汗冷却控制数值方法和数学仿真研究.第五章为上述模型的数学特性和数学定理证明.第六章为控制特性研究.第七章为试验研究.第八章为应用研究.

这本书的内容自成体系,在讲述物理问题时,力求从工程事例出发使概念清晰、具体.再结合抽象的理论研究(数学理论和控制理论),整体上以易懂的方式由浅入深.我们在进行该项目的研究过程中,始终坚持理论与实践相结合的原则,实践验证理论,理论指导实践,并使二者互相促进.从另一角度讲,这本书在格式上,内容的完整上,难易的程度上,肯定是参差不齐的.鉴于变域传热发汗冷却控制数学模型的复杂性和高难度,加之我们的水平有限,在完成本书之际,控制性质一章的某些重要定理还未得到满意的结果,在此不能不说遗憾,只能留待后来学者去补充.

作者对国家自然科学基金委员会的研究经费支持表示深深谢意,这些经费支持对我们研究工作的开展十分宝贵.于景元研究员为该项目的建立及获得国家自然科学基金资助所做的贡献值得敬佩,并直接参与研究.朱广田研究员为协助该课题的组织实施有突出的贡献并直接参与研究.瞿寿德教授为该课题同俄罗斯科学家 T. K. Sirazetdinov 院士进行的学术交流所做的努力值得赞赏.直接参与该项目研究的有:袁兆鼎研究员、刘德贵研究员、罗学波教授、郭应钧大校、武津刚教授、王侠超研究员、徐燕侯教授、吴清松教授、梁本中教授、齐忠涛教授、杨醒民教授、郝涌教授、刘幸东副教授、孙冀博士、郭宝珠博士、卜春霞博士、陈丽容博士、谢亚军博士、许香敏博士等 30 多位专家学者.还有卞荫贵研究员、吴朔平研究员、黄

培康研究员、丁夏畦院士、张履谦院士、庄逢甘院士、崔尔杰院士、陈德仁院士、黄纬禄院士等对此项目研究所给予的关心、帮助和指导，在此一并表示衷心感谢.

本书是从事控制理论研究，尤其从事分布参数控制理论研究的专家学者的研究参考书；也是大学教授、研究生、大学生以及防热设计工程师和控制设计工程师从事教学、研究和气动力学防热工程设计和控制设计的重要参考. 同时，在短时间内完成这本著作有一定的难度，书中难免存在这样那样的缺点甚至错误，希望读者批评指正.

在完成第五章(数学性质) 书稿的过程中得到杨万利博士的协助；孙冀博士为全书校对，刘瑞玲高级工程师为该书文字录入做了艰苦细致的工作，在此表示谢意.

杨学实

2001 年 12 月 10 日，北京

目　　录

第一章　数学模型 …… (1)

§ 1.1　一维固定域热传导方程及其定解条件 …… (1)

1.1.1　固定域热传导方程 …… (1)

1.1.2　定解条件 …… (2)

1.1.3　飞行器结构温度设计 …… (3)

§ 1.2　一维可变域热传导方程及其定解条件 …… (4)

1.2.1　变域热传导方程 …… (4)

1.2.2　定解条件 …… (5)

1.2.3　变域热传导方程与固定域热传导方程之间的关系 …… (6)

1.2.4　相变问题数学模型 …… (7)

1.2.5　变域问题和相变问题之间关系的讨论 …… (7)

§ 1.3　一维发汗开环控制问题 …… (11)

1.3.1　变域发汗控制方程 …… (12)

1.3.2　定解条件 …… (13)

1.3.3　变域传热发汗开环控制问题 …… (14)

1.3.4　固定域传热发汗开环控制问题 …… (14)

§ 1.4　一维闭环控制问题 …… (15)

1.4.1　变域闭环边界控制问题 …… (15)

1.4.2　固定域闭环温度控制问题 …… (16)

§ 1.5　二维变域传热发汗控制问题 …… (16)

1.5.1　方程 …… (17)

1.5.2　定解条件 …… (19)

§ 1.6　三维变域传热发汗控制问题 …… (20)

1.6.1　方程 …… (20)

1.6.2　定解条件 …… (21)

§ 1.7　气发汗控制数学模型 …… (21)

1.7.1　基本方程 …… (22)

1.7.2　初边值条件 …… (23)

1.7.3　变域传热闭环控制数学模型 …… (23)

1.7.4　固定域传热闭环控制数学模型 …… (24)

参考文献 …… (25)

附录 1A　热流 q 的计算方法 …… (27)

附录 1B　液态层烧蚀方程推导 …… (28)
附录 1C　剥蚀数值计算的数学模型 …… (31)

第二章　一维发汗控制问题的数值方法和数学仿真 …… (33)

§ 2.1　发汗控制问题的直线方法 …… (33)
2.1.1　固定域问题直线解法 …… (33)
2.1.2　变域问题直线解法 …… (34)
§ 2.2　直线解法的收敛性 …… (35)
2.2.1　固定域问题直线解法收敛性 …… (36)
2.2.2　变域问题直线解法收敛性 …… (38)
§ 2.3　直线解法的稳定性 …… (39)
2.3.1　数值解法 …… (40)
2.3.2　直线解法稳定性 …… (41)
§ 2.4　六点差分与四点中心差分结合方法及差分方程 …… (45)
2.4.1　差分方程 …… (45)
2.4.2　追赶法 …… (47)
§ 2.5　温度场控制数学仿真(第二边值条件下) …… (48)
§ 2.6　数值稳定区 …… (49)
§ 2.7　温度场控制数学仿真(第三边值条件下) …… (51)
2.7.1　差分方程 …… (51)
2.7.2　数学仿真 …… (52)
2.7.3　差分解与解析解比较 …… (53)
§ 2.8　边界控制数学仿真(变域) …… (54)
§ 2.9　域内存在间断条件的计算方法 …… (56)
§ 2.10　发汗量函数 …… (60)
§ 2.11　闭环控制数学仿真 …… (61)
§ 2.12　第二类 Volterra 型积分解 …… (61)
§ 2.13　误差增长分析 …… (64)
2.13.1　差分格式 …… (65)
2.13.2　误差增长分析 …… (65)
2.13.3　稳定性分析 …… (67)
§ 2.14　直线差分解法的并行化计算 …… (68)
2.14.1　显式差分格式及并行化 …… (68)
2.14.2　加速比及效率 …… (68)
2.14.3　隐式差分格式及并行化 …… (69)
2.14.4　加速比及效率 …… (72)
2.14.5　数学仿真 …… (72)
参考文献 …… (73)

附录 2A　直线法的数学仿真 …… (74)

第三章　二维和三维发汗控制问题的数学仿真 …… (78)

§ 3.1　二维发汗控制问题的直线解法 …… (78)
3.1.1　固定域发汗控制问题的直线解法 …… (78)
3.1.2　变域发汗控制问题的直线解法 …… (81)
§ 3.2　二维发汗控制直线解法的收敛性 …… (85)
3.2.1　固定域发汗控制直线解法的收敛性 …… (85)
3.2.2　变域发汗控制直线解法的收敛性 …… (88)
§ 3.3　半步长交替方向法差分方程及数学仿真 …… (89)
3.3.1　差分方程 …… (89)
3.3.2　半步长交替方向法的数学仿真 …… (93)
§ 3.4　旋成体发汗控制数学仿真 …… (96)
3.4.1　表面温度控制 …… (97)
3.4.2　热层烧蚀控制 …… (98)
3.4.3　数值模拟 …… (100)
参考文献 …… (101)

第四章　气发汗冷却控制数学仿真 …… (103)

§ 4.1　控制参数 …… (103)
§ 4.2　温度差分方程 …… (103)
§ 4.3　压力差分方程 …… (104)
§ 4.4　数学仿真结果 …… (105)
4.4.1　控制参数特性 …… (106)
4.4.2　温度特性 …… (107)
4.4.3　发汗剂特性 …… (107)
4.4.4　材料孔隙率特性 …… (108)
4.4.5　发汗防热与对流防热特性对比 …… (109)
4.4.6　结论 …… (110)
参考文献 …… (110)

第五章　数学性质 …… (111)

§ 5.1　发汗控制问题解的局部存在性 …… (111)
5.1.1　基本解 …… (112)
5.1.2　等价积分方程 …… (114)
5.1.3　局部解的存在惟一性 …… (121)
§ 5.2　解的整体存在性 …… (139)
5.2.1　问题的提出 …… (139)

5.2.2 一个不动点问题 …… (140)
5.2.3 整体解的存在性 …… (148)
§ 5.3 两个活动界面的发汗控制问题解的存在惟一性 …… (150)
5.3.1 解的一些性质 …… (150)
5.3.2 解的存在性 …… (154)
§ 5.4 发汗控制第三边值问题的稳定性 …… (157)
§ 5.5 固定域问题解随发汗剂流量的单调性 …… (161)
§ 5.6 固定域大孔隙率温度解随发汗剂流量单调性 …… (164)
§ 5.7 解对初始条件和边界条件的连续依赖性 …… (169)
§ 5.8 固定域解对控制参数的连续依赖性 …… (176)
§ 5.9 发汗控制问题的解析解 …… (179)
5.9.1 一维解析解 …… (179)
5.9.2 二维解析解 …… (182)
参考文献 …… (184)
附录 5A 半群方法证明发汗控制边值问题解的存在惟一性 …… (186)
附录 5B 解对发汗剂流速的连续依赖性 …… (192)

第六章 控制性质 …… (199)

概述 …… (199)
§ 6.1 发汗控制平衡状态特性 …… (202)
§ 6.2 烧蚀界面能控性 …… (206)
6.2.1 问题的提法 …… (207)
6.2.2 $\alpha(t)$ 的估计 …… (207)
6.2.3 可控性条件 …… (208)
§ 6.3 发汗剂流量为控制变量的最优控制 …… (209)
6.3.1 引理 …… (210)
6.3.2 结论 …… (210)
§ 6.4 最优控制的近似解 …… (214)
§ 6.5 测度理论与最优控制及发汗剂最小携带量的计算方法 …… (215)
6.5.1 问题的转换 …… (217)
6.5.2 近似方法 …… (218)
6.5.3 算法及算例 …… (220)
§ 6.6 参数辨识的一般性质 …… (222)
6.6.1 参数辨识性质 …… (223)
6.6.2 辨识的算法 …… (226)
§ 6.7 参数辨识(敏感系数法) …… (227)
6.7.1 数学模型 …… (228)
6.7.2 敏感系数 …… (229)

6.7.3 计算方法 …… (230)
6.7.4 算例 …… (230)
§ 6.8 参数辨识(最小二乘法) …… (232)
6.8.1 最小二乘可辨识性 …… (232)
6.8.2 计算方法 …… (233)
6.8.3 算例 …… (235)
参考文献 …… (237)
附录 6A 水发汗剂自适应控制 …… (238)
附录 6B 最小范数控制 …… (242)
第七章 试验研究 …… (245)
§ 7.1 飞行条件下水发汗试验研究 …… (245)
7.1.1 试验方案 …… (245)
7.1.2 模型 …… (246)
7.1.3 流量控制机构 …… (247)
7.1.4 压力与流量的关系曲线 …… (248)
7.1.5 闭合回路控制的数学模型 …… (250)
7.1.6 模拟闭合回路控制静态调试 …… (250)
7.1.7 在电弧加热风洞实验室进行闭合回路控制实验 …… (252)
§ 7.2 气发汗电极防烧蚀实验研究 …… (256)
7.2.1 设备 …… (256)
7.2.2 模型 …… (257)
7.2.3 试验 …… (257)
7.2.4 结论 …… (259)
§ 7.3 高压大电流电极气发汗试验研究 …… (260)
7.3.1 试验状态设计 …… (261)
7.3.2 等离子体电枢平均压力 …… (264)
7.3.3 放电腔引弧方式 …… (265)
7.3.4 发汗电极模型的放电烧蚀实验 …… (266)
参考文献 …… (270)
第八章 应用研究 …… (271)
§ 8.1 发汗冷却技术在电磁炮导轨防烧蚀中的应用 …… (271)
8.1.1 导轨的温度剖面特性 …… (271)
8.1.2 导轨长度方向温度特性 …… (272)
8.1.3 表面温度随 $\dot{m}_L$ 和 t 的变化 …… (273)
8.1.4 提前开阀的不同材料温度剖面特性 …… (273)
8.1.5 连发状态的受控温度分布特性 …… (274)

8.1.6 发汗剂的消耗量与导轨材料 …… (275)
8.1.7 内弹道特性对发汗的影响 …… (275)
8.1.8 子弹初始速度的影响 …… (275)
§ 8.2 发汗冷却技术在导弹头锥防烧蚀中的应用 …… (276)
§ 8.3 发汗冷却技术在空间运载器中的应用 …… (278)
8.3.1 航天飞机热防护 …… (278)
8.3.2 火箭发动机热防护 …… (279)
§ 8.4 电弧风洞电极防烧蚀发汗控制 …… (280)
8.4.1 电弧风洞(电弧加热器)目前工作状态 …… (280)
8.4.2 技术方案 …… (280)
§ 8.5 结束语 …… (282)
参考文献 …… (283)
符号表 …… (284)

第一章　数 学 模 型

热传导的研究在 1822 年由 J. B. Fourier 公布了他的研究笔记《热的分析理论》而开始，即文献[1]①. 依靠物质的粒子从物体较热的区域向较冷的区域提供的能量称为热. 热的传导依靠物体内部的温度梯度进行能量传输. 尽管热流不能直接测量，但它与温度标量相联系，即 Fourier 定律，使它在概念上变得具体了. 也就是说，虽然热流是一个抽象的概念，但是通过它与温度梯度的关系，使它具有明确的物理意义. 热传导的基本任务就是确定固体内的温度分布. 这一章要讨论的数学模型包括变域(烧蚀)热传导和固定域(无烧蚀)热传导；“快烧蚀”和“慢烧蚀”；发汗防热的开环控制和闭环控制；可压缩发汗剂和不可压缩发汗剂；一维二维和高维等等不同条件下热传导问题的数学模型. 鉴于在“变域”条件下的快烧蚀热传导方程增加了热传导修正项，表现出它在形式上与固定域热传导方程的差别；于是，有必要将数学模型单独作为一章，详细叙述变域热传导的特点，以及快烧蚀与慢烧蚀的区别，为的是在物理概念上有个清楚的认识. 首先从固定域热传导开始.

§ 1.1　一维固定域热传导方程及其定解条件

1.1.1　固定域热传导方程

假设有一长度为 l 的棒，沿一维 y 轴放置. 一端在原点 0，另一端在 y 轴上 l 处(图 1.1)，它在 y 轴上保持着热传导的区域(0, l)固定不变. 也就是说，受热不膨胀也不收缩，称“固定域”. 假定棒足够细，使得在垂直于 y 的同一截面上温度保持均等，棒内物质均匀分布，无化学反应，无热源和热漏. 按照 Fourier 早在 1822 年建立热传导方程的思想[1]，对一维导热，在棒内垂直于 y 轴上任意选取两个相邻截面(i 和 i+ 1)构成长为 Δy 的微元体(图 1.2)，体积为 1 · 1 · Δy. 分析它的热平衡.



图 1.1　一维棒沿坐标放置

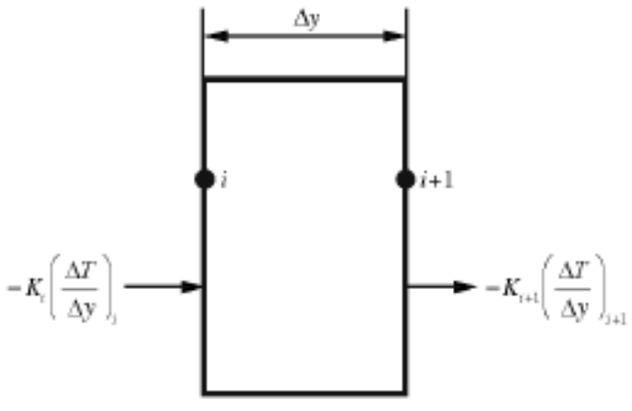


图 1.2　微元体热平衡示意图

① 如不特别说明，文献号均指本章的文献编号.

根据 Fourier 定律,在 y_i 截面处传入微元体的热量为 $-K_i\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_i$,在 y_{i+1} 截面处传出微元体的热量为 $-K_{i+1}\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_{i+1}$. 微元体内热能随时间 Δt 的增加 $\frac{}{t}(\Delta y\,\rho c_{pi}T_i)$,按照能量守恒定律和前述假设条件,等于传入热量减去传出热量. 由于在整个时间过程中, Δy 是固定的,因此下式成立:

$$\frac{}{t}(\rho c_{pi}T_i) = \frac{K_{i+1}\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_{i+1} - K_i\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_i}{\Delta y}.$$

假定棒是固体材料,且密度 ρ 和比热容 c_p 为常值. 导热系数 K 是温度的函数,在所讨论的温度场中温度变化不太剧烈时,可视为常数. 当 $\Delta y \to 0$ 取极限,得

$$\frac{T}{t} = \alpha\frac{^2T}{y^2}, \quad y \in (0,l), \tag{1.1.1}$$

式中 $\alpha = K/\rho c_p$. 方程式(1.1.1)称 Fourier 方程. 在数学物理方程学科中归入抛物型方程一类. 在此详细地叙述 Fourier 方程的建立,是为了在后面建立变域数学模型之前对方程的应用条件能有一个清晰的了解. 这种类型的方程有广泛的应用: 描述热传导现象、扩散现象、海底电缆的电压、导电线圈围成柱内的磁场、以及边界层理论中涡的扩散等,它们都具有方程(1.1.1)的形式.

1.1.2 定解条件

对上述每类问题由各不相同的初始条件和边界条件可以得到它们的定解. 这些解的性质在文献[2～4]中有代表性的成果. 初始条件为:

$$t = 0, \quad T = \phi(y). \tag{1.1.2}$$

边界条件有三种形式:

1) 第一边值条件(在边界上函数值已知)

$$T\big|_s = f(y,t); \tag{1.1.3}$$

2) 第二边值条件(在边界上函数的一阶导数值已知)

$$\frac{T}{y}\bigg|_s = f(y,t); \tag{1.1.4}$$

3) 第三边值条件(第一和第二边值条件混合)

$$\left(K\frac{T}{y} + hT\right)\bigg|_s = f(y,t), \tag{1.1.5}$$

式中 K 和 h 为系数; s 为表面边界; ϕ 和 f 为任意函数. 如果对某物体的局部考察热传导过程,以致边界的影响在研究的时间范围内达不到所研究的地方,或虽达到但影响甚小,则此时只对方程(1.1.1)附加初值条件而没有边值条件,这种问题通常称为初值问题. 反之,边值条件为主要因素时,这也是热传导工程中最普通的问题,即经典固定域热传导问题在第二边值条件下当 $t > 0$ 时的提法为

$$\begin{cases} \dfrac{T}{t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{y^2}, \quad y \in (0, l), \\ \dfrac{T}{y}\Big|_{y=0} = -\dfrac{q}{K}, \\ \dfrac{T}{y}\Big|_{y=l} = 0, \end{cases} \tag{1.1.6}$$

式中 q 为边界上的热流; 数学模型(1.1.6)描述的热传导物理背景是, 一端的加热为 q, 另一端绝热, 由均匀物质构成的长度为 l 的一维棒在受热过程中既不膨胀也不收缩条件下的温度传播规律.

1.1.3 飞行器结构温度设计

当飞行器的外壳结构为单层金属, 在大气层内飞行时, 方程(1.1.1)可以简化[5]. 此时飞行器和空气摩擦而生热, 这种热造成了飞行器的结构温度升高. 温度升高对飞行器的强度不利. 在远离飞行器的驻点和音点之外的大面积上, 在烧蚀出现之前(这一情形总是存在的), 沿母线 x 方向温度梯度很小(零攻角飞行)热的传递可以忽略不计. 此时的温度在弹体厚度 y 方向为一维固定域传热, 弹体外表面受到气动加热 q, 内表面处绝热, 壳体厚度为 l, 可以使用数学模型(1.1.6)描述热传导规律.

气动加热 q 的计算方法见附录 1A. 数学问题(1.1.6)具有通用性. 对于壳体由铝合金构成的良导热材料而言[5], 在实际计算中发现壳体内外温差很小, 仅仅相差 3～5 度, 如果允许将热层中的温度取平均值, 于是计算可以大大简化. 只要在固定域(0, l)内对(1.1.6)式中的主方程取积分

$$\int_0^l \frac{T}{t}\,dy = \int_0^l \alpha \frac{\partial^2 T}{y^2}\,dy = \frac{1}{\rho c_p}\int_0^l K \frac{\partial^2 T}{y^2}\,dy,$$

函数 $\dfrac{T}{t}$ 在固定域[0, l]内有界、可积且连续, 根据中值定理, 有下式成立:

$$\frac{dT}{dt}\int_0^l dy = \frac{1}{\rho c_p}\left(K \frac{T}{y}\Big|_l - K \frac{T}{y}\Big|_0 \right).$$

利用(1.1.6)中的边界条件, 不计辐射热, 上式化为

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{l \rho c_p}.$$

将附录 1A 中的热流公式代入, 差分, 得到

$$T_{wi} = \frac{\dfrac{\Delta t}{l \rho c_p} q_0 \left(\dfrac{h_e}{h^*} \right)^{0.648} + T_{wi-1}}{\left[1 + \dfrac{\Delta t}{l \rho c_p} q_0 \left(\dfrac{h_e}{h^*} \right)^{0.648} \cdot \dfrac{c_p}{h_r} \right]}, \tag{1.1.7}$$

式中 h_e 为边界层外边界焓值; h_r 滞止焓; h^* 为 Ekert 焓; 下标 w 为表面值; 下标 i - 1 为前一刻; 下标 i 为当前值. 利用(1.1.7)式求解良导热壳体的温度是很方便的, 且大大节省计算量.

§ 1.2 一维可变域热传导方程及其定解条件

我们在前言中已经提到过,此处必须再次强调: 在探索飞行器的防热材料适合何种烧蚀模型的实验过程中,发现多数防热材料不适合液态层烧蚀理论(见附录 1B). 也就是说,烧蚀表面很少见到液态状流体流动的现象,却存在无数固体颗粒状物质的亮点快速脱离表面注入气体边界层. 放大观察烧蚀表面,存在一明一暗的闪烁现象. 集中到闪烁点观察时,发现该点在明亮一小段时间之后,突然出现暗点. 随后暗点逐渐变亮并保持一段时间之后,随即又突然变暗. 从明到暗过程中,有颗粒状物质脱离表面进入气体边界层. 它的尺度相对于一般烧蚀而言较大. 我们把这种烧蚀现象称为剥蚀(见附录 1C). 亮点温度为表面温度,暗点温度为剥蚀温度. 它是在边界层气流对固体表面防热材料的加热和剪切联合作用下,防热材料到达熔化之前使之以固态物质被剥离的形式出现的. 冰的溶化是相变; 冰和水之间交界面的移动在文献[3]中有详细叙述. 相变问题也称溶蚀,它的特点是,在自然条件下,冰和水之间的界面移动非常缓慢. 剥蚀一类物理现象的烧蚀问题可以归类到“边界快速移动”的热传导问题. 于是移动边界问题可以分为两种: 一种为边界快速移动的热传导问题; 另一种为边界慢速移动的热传导问题,这是移动边界问题的两个方面,无论“快速”移动或“慢速”移动,在防热工程上通称烧蚀. 我们把前者称做“快烧蚀”问题,后者称做“慢烧蚀”问题. 烧蚀状态中的热传导称可变域热传导,或称变域热传导. 变域热传导习惯上也称动边界传热或自由边界问题. 动边界传热将和控制密切相关连. 这里所称“传热”的概念包含固体和流体(发汗剂)同时存在的传热. 在工业中的电极放电烧蚀控制,电磁导轨炮的放电轨道的烧蚀控制,火箭再入大气的烧蚀分析以及重要结构部件的温度控制都是在本书所涉及的“快烧蚀”传热范围之内. 为了体现“快烧蚀”的特点,我们将采用“运动微元法”来建立传热数学模型.

1.2.1 变域热传导方程

选取一维空间坐标 y 和时间坐标 t 构成坐标系(t, y),在(t, y)坐标系中建立方程. 将图 1.3 中的空间坐标y的原点始终固定在烧蚀边界的初始外表面上,成为固定坐标系,y 与



图 1.3 微元位置示意图

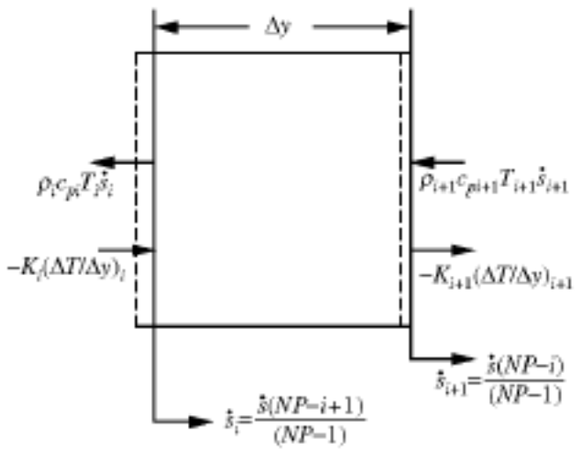


图 1.4 有限元热平衡示意图

t 相互独立. 将厚度为(l- s)的变域等分成 NP 个节点. 在任意两个相邻的节点 i 和 i+ 1 处选取垂直于 y 轴的两个单位截面,它们之间的距离为 Δy. 微元的体积为 1 · Δy. 参照文

献[6]，两个截面之间所构成的微元的两个边界在 Δt 时间过程中分别从图 1.4 的虚线位置移动到实线位置，微元的体积也发生了变化，构成“运动微元”. 我们的兴趣是分析“运动微元”的热能平衡. 假设热的传递只在 y 方向进行，即一维热传导；微元体内热能随时间的改变只与左右界面能量传递有关，当变域内没有化学反应发生也没有热源和热漏时，根据能量守恒定律，有下式成立：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta y\ \rho c_{pi} T_i) = K_{i+1}\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_{i+1} - K_i\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_i + \rho_{i+1} c_{pi+1} T_{i+1}\dot{s}_{i+1} - \rho c_p T_i \dot{s}_i, \quad (1.2.1)$$

式中 ρ 为材料密度；c_p 为比热容；T 为温度；K 为导热系数；$\dot{s}$ 为边界移动速率. 必须强调，观察图 1.4 从虚线位置移动到实线位置的观察者所处的位置是在固定坐标系中，该坐标系就是“坐标原点始终固定在烧蚀边界的初始外表面上”的 (t, y) 坐标系，同时注意，“y 与 t 相互独立”. 有了这种共同认识，才不至于发生思维混乱和运算错误. 然而微元体的体积 $(1 \cdot \Delta y)$ 是随时间变化的，即

$$\frac{d}{dt}(\Delta y) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - s(t)}{NP - 1}\right) = \frac{-\dot{s}(t)}{NP - 1},$$

则(1.2.1)式为

$$\Delta y \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_{pi} T_i) - \rho c_{pi} T_i \frac{\dot{s}(t)}{NP - 1} = K_{i+1}\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_{i+1} - K_i\left(\frac{\Delta T}{\Delta y}\right)_i + \rho_{i+1} c_{pi+1} T_{i+1}\dot{s}(t)\frac{NP - i}{NP - 1} - \rho c_p T_i \dot{s}(t)\frac{NP - i + 1}{NP - 1}, \quad (1.2.2)$$

同类项合并

$$\rho_{i+1} c_{pi+1} T_{i+1}\dot{s}(t)\frac{NP - i}{NP - 1} - \rho c_{pi} T_i \dot{s}(t)\left(\frac{NP - i + 1}{NP - 1} - \frac{1}{NP - 1}\right) = (\rho_{i+1} c_{pi+1} T_{i+1} - \rho c_{pi} T_i)\dot{s}(t)\frac{1 - y}{1 - s(t)}.$$

将上式代入(1.2.2)式，全式除 Δy，当 $\Delta y \to 0$ 取极限得到下式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{T_0}^{T} \rho c_p dT\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \dot{s}(t)\frac{1 - y}{1 - s(t)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{T_0}^{T} \rho c_p dT\right). \quad (1.2.3)$$

对于固体材料，密度 ρ 和比热 c_p 为常值. 导热系数 K 是温度的函数，在所讨论的温度场中温度变化不太剧烈时，可视为常数. 此时，方程(1.2.3)化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{s}(t)\frac{1 - y}{1 - s(t)}\frac{\partial T}{\partial y}, \quad y \in (s(t), 1). \quad (1.2.4)$$

方程(1.2.4)考虑了“变域”为主要因素后所得到的热传导方程[7]，称变域热传导方程. 鉴于物理实验中观察到的剥蚀现象已经抽象为“快烧蚀”规律，因此，在相对于固定坐标系中观测到域边界的变化特性，即 $s(t)$ 可以满足所需要的数学上的连续性性质.

1.2.2 定解条件

在外边界处，表面受到边界层的气动加热的实际热流为 $q(t)$. 假定烧蚀物的潜热为 L，表面烧蚀速率为 $\dot{s}(t)$，密度为 ρ 不计辐射加热，根据能量平衡，外表面边界条件为

$$\rho L\dot{s}(t) - \left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{y = s(t)} = q. \quad (1.2.5)$$

一般情况下舱内是空气,由于空气的导热系数很小,可以认为内边界处绝热,有

$$-\left(K\frac{T}{y}\right)\Big|_{y=l}=0. \tag{1.2.6}$$

初始条件为

$$\begin{cases} t=0, s(0)=0, \quad \dot{s}(0)=0, T=T_0(y), \\ t<t_1, s(t)=0, \quad \dot{s}(t)=0, \\ t\geq t_1, \dot{s}(t)\neq 0, \quad s=\int_{t_1}^{t}\dot{s}(t)\,dt. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

于是,一维可变域热传导数学问题为

$$\begin{cases} \frac{T}{t}=\alpha\frac{^2T}{y^2}+\dot{s}(t)\frac{l-y}{l-s(t)}\frac{T}{y}, \quad y\in(s(t),l), \\ \rho L\dot{s}(t)-\left(K\frac{T}{y}\right)\Big|_{y=s(t)}=q, \\ -\left(K\frac{T}{y}\right)\Big|_{y=l}=0, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

式中气动加热 $q(t)$ 的计算方法见附录 1A.

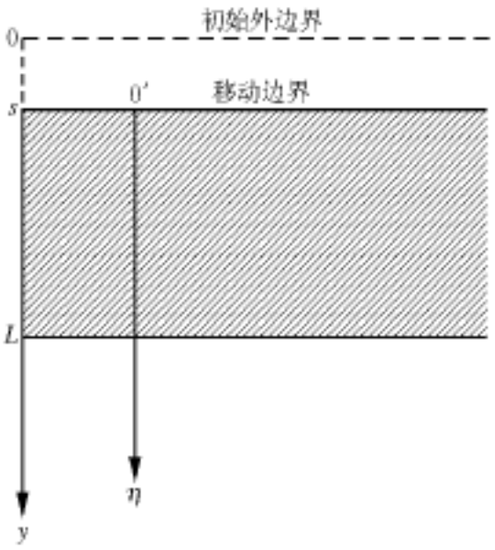


图 1.5 固定坐标系和运动坐标系

1.2.3 变域热传导方程与固定域热传导方程之间的关系

将固定坐标系 (t, y) 的坐标原点 0 取在烧蚀过程的初始外表面上. 站在该坐标系中能够观测到表面的移动距离 $s(t)$. 选取 (τ, η) 坐标系的坐标原点 0 与移动边界 $s(t)$ 固连(见图 1.5),构成运动坐标系. 此时 $\eta=\eta(t)$ 是时间 t 的函数,并与 y 轴平行. 同时取 η 为量纲一坐标. 站在 (τ, η) 运动坐标系中观测到 η 选取的域为 $(0, 1)$. 于是在 (τ, η) 坐标系中的研究对象是固定域 $(0, 1)$ 的热传导问题. 假定均匀固体材料受热不膨胀也不收缩,无化学反应、无热源和热漏条件时. 根据固定域热传导方程(1.1.1),有下式

$$\frac{T(\eta,\tau)}{\tau}=\alpha'\frac{^2T(\eta,\tau)}{\eta^2}, \quad \eta\in(0,1) \tag{1.2.9}$$

成立. 做变换

$$\begin{cases} \tau=t, \\ \eta=\dfrac{y-s(t)}{l-s(t)}. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

此时, $\eta=0$ 时 $y=s(t)$; $\eta=1$ 时 $y=l$. 两个空间的温度函数 $T(\eta,\tau)=T(y,t)$; α 是坐标中的导温系数. 同时有下式

$$\frac{\eta}{t}=-\dot{s}(t)\frac{l-y}{(l-s(t))^2}, \quad \frac{\eta}{y}=\frac{1}{l-s(t)}.$$

方程(1.2.9)式左端为