21 世纪高等学校电子信息类专业规划教材

自动控制原理学习指导

姚佩阳　主　编

曹　锦　李　峰　副主编

清 华 大 学 出 版 社

北京交通大学出版社

·北京·

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内 容 简 介

本书是教材《自动控制原理》（姚佩阳主编）的辅助教学用书，系统而精练地总结了经典控制理论和现代控制理论的基本内容，涵盖了教材中所有习题的分析与解答，有助于学生的学习与提高。

本书可以作为自动化、电子、电气、信息与通信、计算机、机械等专业学生学习自动控制原理和参加相关考试的复习参考资料。

版权所有，翻印必究。举报电话：010－62782989　13501256678　13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术，用户可通过在图案表面涂抹清水，图案消失，水干后图案复现；或将表面膜揭下，放在白纸上用彩笔涂抹，图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目（CIP）数据

自动控制原理学习指导/姚佩阳主编. —北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2005.6

（21 世纪高等学校电子信息类专业规划教材）

ISBN 7－81082－541－0

Ⅰ. 自…　Ⅱ. 姚…　Ⅲ. 自动控制理论－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 054637 号

责任编辑：刘元弘

出 版 者：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969

　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686414

印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×260　　印张：7　　字数：169 千字

版　　次：2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 6 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7－81082－541－0/TP·201

印　　数：1～4 000 册　　定价：12.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail:press@center.bjtu.edu.cn。

前　言

本书是教材《自动控制原理》（姚佩阳主编）的辅助教学用书。全书共 9 章，内容包括基本概念、主要公式等，大部分章配有例题分析、习题解答，目的在于使学生掌握和理解经典控制理论的基本概念和基本分析方法，初步掌握现代控制理论的基础知识。

本书由姚佩阳教授主编，冯新喜教授审阅，曹锦、李峰参加编写。感谢戴苏榕、任宇环、周国超、陈伟达、韩仁杰在本书编写中所做的工作。刘作良、常国岑、周生炳、任昭东等教授对本书编写工作进行指导，这里谨表示诚挚的感谢。

作者水平有限，书中难免有不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月

第 1 章摇绪摇论

本章主要介绍自动控制的基本概念，掌握自动控制系统基本控制方式，通过习题练习使同学们初步掌握对自动控制系统进行定性地粗略分析的技能。

1援摇基 本 概 念

1援援摇基本术语

员援被控制对象

被控制对象简称被控对象 （又称受控对象，被调整对象），被控对象是指要求实现自动控制的机器、设备或生产过程，例如机床、发电机、烘炉以及石油化工生产过程等。

圆援控制装置

控制装置是指对被控对象起控制作用的设备总体，包括测量装置、比较装置、放大装置和执行机构等。

猿援被控量

被控量是指被控对象中要求保持给定数值或按给定规律变化的物理量，如电动机转速、刀架位置、烘炉温度、水池水位等。显然，被控量总是选择表征被控对象工作状态的主要参量，一般为系统的输出量。

源援给定值

给定值是指作用于控制系统输入端并作为控制依据的物理量。一般为系统的参考输入量或输入信号。

缘援干扰量

干扰量除给定值外，凡能引起被控量变化的外界变量或因素都是干扰量。如系统外的负载变化，电源电压及频率的变化，环境温度、湿度和气压的变化等。干扰量将破坏被控量与给定值间预定的函数关系。

远援自动控制

自动控制是指在没有人直接操作的情况下，利用控制装置使被控制对象 （如机器、设备或生产过程） 的某一物理量或工作状态自动地按照预定的规律运行或变化。

苑援自动控制系统

自动控制系统是指能够对被控制对象的工作状态进行自动控制的系统。一般由控制装置和被控制对象组成。

1援援摇基本控制方式

员援开环控制

开环控制是指组成系统的控制装置与被控对象之间只有顺向作用，而没有反向联系的

控制过程。

开环控制系统的输出量对系统的控制作用没有任何影响。如图 员猿员所示。

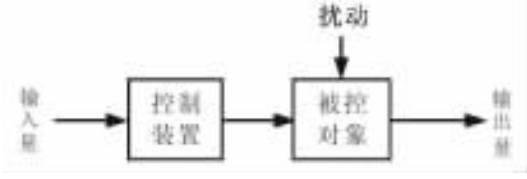


图 员猿员　开环控制系统典型方框图

圆援闭环控制

闭环控制是指控制装置与被控对象之间既有顺向作用，又有反向联系的控制过程，即反馈控制。

闭环控制系统的输出量对系统的控制作用产生直接影响，如图 员猿圆所示。

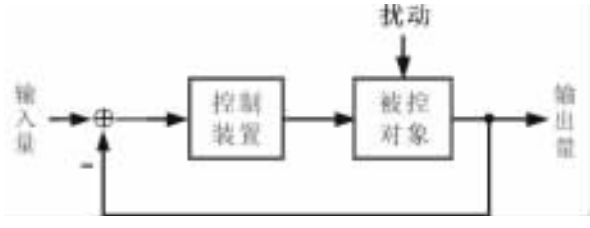


图 员猿圆　闭环控制系统典型方框图

1援摇控制系统的分类

自动控制系统的分类方法有很多种，常用的分类方法如下。

员援按照描述系统的数学模型不同分类

（员）线性控制系统

在自动控制系统中，线性控制系统的数学模型（又称运动方程）是用线性代数方程式、线性微分方程式、线性差分方程式等来描述，其主要特点是：组成系统的元器件都是线性的，且系统的响应与初始状态无关，系统的稳定性与输入信号无关，满足均匀性和叠加性。

如果组成线性控制系统的元器件参数都是不随时间变化的常数，则系统的数学模型是系数均为常数的线性微分方程式，称这样的线性控制系统为定常线性控制系统或线性时不变系统。

（圆）非线性控制系统

如果组成控制系统的元器件至少有一个是非线性的，则称这样的控制系统为非线性控制系统。在非线性控制系统中，系统的响应与初始状态有极大的关系，不能运用叠加原理。

圆援按照系统中传送信号的性质不同分类

（员）连续控制系统

需要全本请访问 www.ertongbook.com

所谓连续控制系统是指系统中各部分信号都是连续函数形式的模拟量。连续控制系统有线性连续控制系统和非线性连续控制系统两类。

（圆 离散控制系统

离散控制系统是指在系统中至少有一处的信号是脉冲序列或数码形式。描述离散控制系统的运动方程是差分方程式，离散控制系统有线性离散控制系统和非线性离散控制系统两类。

猿援按照系统输入信号的变化规律不同分类

（员 自动调节系统

自动调节系统（又称自动调整系统或自动稳定系统）是一种反馈控制系统，它的基本作用在于使系统的输出量不受扰动等因素的影响而保持恒定。也就是说，在存在扰动的情况下，将系统的实际输出量保持在希望数值上。这类系统的输入信号在一段时间内为常量，称为参考信号或基准信号。

（圆 随动系统

随动系统（又称跟踪系统）也是一种反馈控制系统，它的基本作用在于使系统的输出量能够不受扰动等因素的影响而及时、准确地随着输入量的变化而变化。也就是说，在存在扰动的情况下，将系统的实际输出量与输入量的偏差控制到最小。这类系统的输入信号通常是时间的不确定函数，随工作的要求变化。

1援援摇自动控制系统的组成

典型的自动控制系统基本组成方框图如图 员援猿所示。

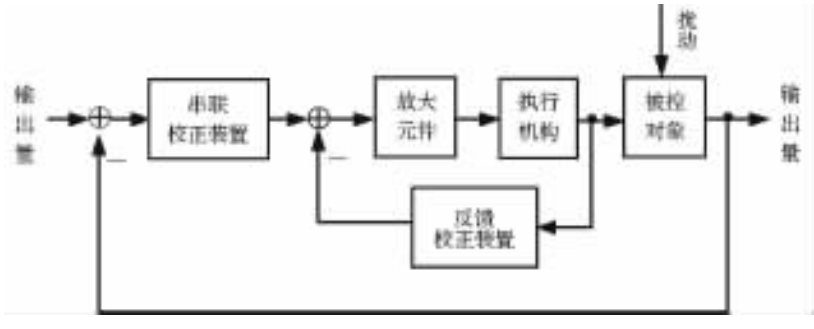


图 员援猿摇自动控制系统的基本组成

在图 员援猿中，系统的基本组成元件或装置和被控对象都用方框表示；信号的传输方向用箭头表示，该传输方向是单向不可逆的，这是由元件的物理特性所决定；符号“⊕”表示误差检测器；“ 原”号表示输入信号与反馈的信号相减，即负反馈。

自动控制系统的组成元件或装置的基本功能如下：

（员 误差检测器

又称误差敏感元件，它的作用是对系统输出量进行测量，并将系统的输出量与输入信号转化为同一物理量（一般为电量）并进行比较，得到偏差（或误差）信号，用来控制后级。误差敏感元件对信号起综合作用，这个作用往往是由测量元件和比较元件共同完成，简称综合器或比较器。

⑷圆 放大元件

它的作用是实现对前级微弱的偏差信号的放大和变换，输出具有足够功率和满足要求的物理量，用来推动后级的执行机构。

⑸猿 执行机构

它的作用是在前级送来的信号控制下，完成对被控对象的控制任务，使执行机构按照输入信号的要求进行工作。

⑹源 被控对象

自动控制系统需要进行控制的机器、设备或生产过程。被控对象内要求实现自动控制的物理量称为被控制量或系统输出量。

⑺缘 校正装置

它的作用是用来改善个别元件或装置的工作性能，也可以用于改善系统的性能。校正装置主要包括串联校正装置和反馈校正装置。

在图 员猿缘中，信号从输入端沿箭头方向到达输出端的传输通路称为前向通路；系统输出量反馈到输入端的传输通路称为主反馈通路，前向通路与主反馈通路一起，构成主回路。此外，还有局部反馈通路以及由它组成的内回路，如放大元件、执行机构、反馈校正装置和综合器构成的内回路。只有一条反馈通路的闭环控制系统称单回路系统，有两条以上反馈通路的闭环控制系统，称为多回路系统。

1援援摇控制系统的基本要求

员援稳定性

控制系统稳定是其能正常工作的必要条件。系统稳定性包括两层的含义，分别称为绝对稳定性和相对稳定性。

绝对稳定性就是通常所说的稳定性，即系统稳定。而相对稳定性是指系统的输出相应振荡的强烈程度，如果随着时间的增加系统振荡的振幅逐渐减小，并很快恢复到原来的静止状态，则称这种振荡为衰减振荡，这时系统是稳定的；反之，随着时间的增加系统振荡的振幅是恒值或者是逐渐增加的，则称为等幅振荡或发散振荡，这时的系统振荡不止或振荡愈演愈烈，那么系统就是不稳定的。

圆援响应速度

对于自动控制系统，它受到的外作用是多种多样的，既有确定性外作用，又有随机性外作用。对不同形式的外作用，系统有不同的输出特性，一般称为响应特性。

当系统受到外作用时，其输出将会发生相应变化。由于系统中总是包含具有惯性或贮能特性的元件，因此，系统的输出量不可能立刻按希望的规律变化，而是要经过一段过渡过程，然后才能达到稳态，这个过渡过程称为暂态过程或动态过程。系统在暂态过程中的工作情况，就反映了系统的响应速度，要具有快速性和平稳性。

猿援精确度

控制系统的精确度一般用系统在稳态工作时的误差来衡量。系统在输入信号的作用下，其输出响应经过暂态过程进入某种稳态后，系统的输出量与希望值之间存在的误差叫做稳态误差。一般要求稳态误差小、控制精度高。

1援摇典 型 例 题

【例题 员原员】 设直流电动机转速控制系统如图 员猿原 (葬、(遭 所示，简述其工作原理，并画出系统的原理方框图。

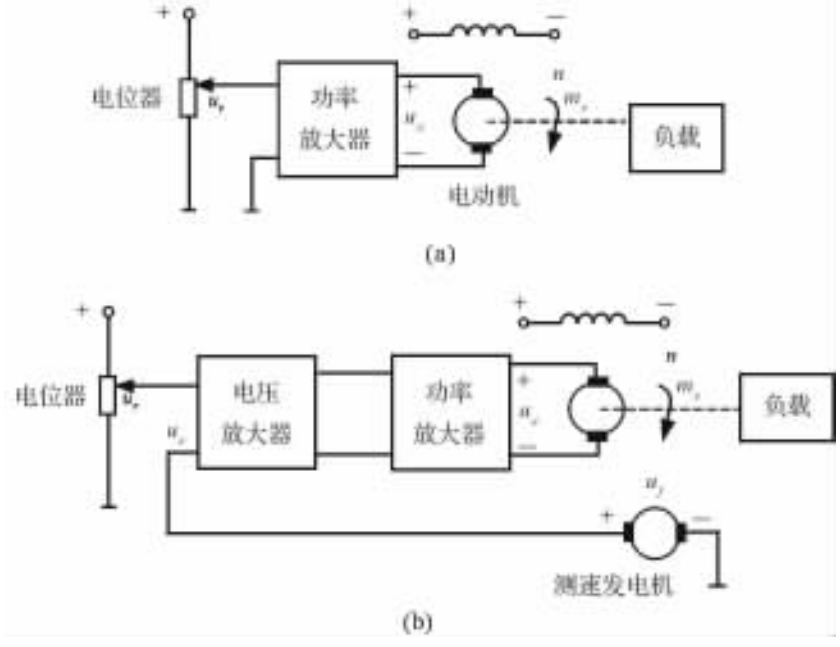


图 员猿原摇例题 员原图

例题 员原员解：图 员猿原 (葬、(遭 所示控制系统的控制方式分别是开环控制和闭环控制，通过对这两种控制方式的分析和比较，理解开环控制方式和闭环控制方式的工作过程及各自优缺点。

图 员猿原(葬)所示为图 员猿原 (葬 的原理方框图。这是一个直流电动机转速控制系统，其控制任务是使电动机的转速 灶等于给定转速 灶$_{则}$，电动机为被控对象；系统参考输入量为给定转速 灶$_{则}$，不同的给定电压 怎$_{则}$对应于不同的给定转速 灶$_{则}$，给定电压 怎$_{则}$可通过改变电位器滑臂位置来调节；系统输出量为电动机的转速 灶，当给定电压 怎$_{则}$经功率放大器放大后，作为电动机的输入电压 怎$_{葬}$来控制电动机的转速 灶，当负载力矩 皂$_{藻}$不变时，怎$_{则}$与 灶有一一对应的关系，因此可由给定电压 怎$_{则}$直接控制电动机的转速 灶，故该系统是一个开环控制系统。

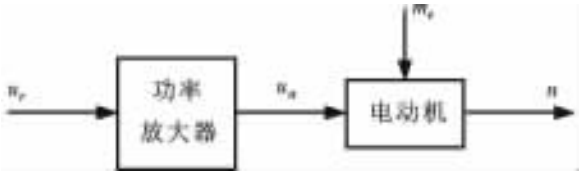


图 员猿原摇例题 员原图 (葬 的原理方框图

开环控制系统结构简单、成本低、容易实现，但当系统出现扰动时（例如负载力矩 皂藻发生变化时），将会引起转速 灶的变化，这种变化信息无法反馈到系统的输入端来改变电动机的输入电压 怎葬，因此会导致电动机的转速偏离给定值。所以开环系统的抗干扰能力差，控制精度较低。

图 员圆原所示为图 员猿原（遭）的原理方框图，是在图 员猿原（葬）所示开环控制系统的基础上增加了一个测速发电机和电压放大器。其中测速发电机是测量元件，用来测量电动机的转速 灶，并给出与转速成比例的电压信号 怎则，怎则反馈到系统输入端与给定电压 怎则相比较得到偏差信号 怎藻越怎则原怎则，从而实现系统的自动控制。一般 怎藻较微弱，故需增加一个电压放大器，用放大后的电压作为功率放大器的输入信号。当电动机正常工作时，对于给定电压 怎则，电动机必有确定的转速 灶与给定值 怎则相对应，同时亦有相应的测速发电机电压 怎则，偏差 怎藻和控制电压 怎葬，如果电动机的负载力矩 皂藻发生变化，例如增加负载，则将使电动机的转速降低而偏离给定值，同时测速发电机电压 怎则将相应减小，而偏差电压 怎藻和控制电压 怎葬将因此增大，从而使电动机转速回升到给定值附近；反之亦然。所以该系统可以根据给定值的要求，自动地调节电动机的转速，故该系统是一个闭环控制系统。

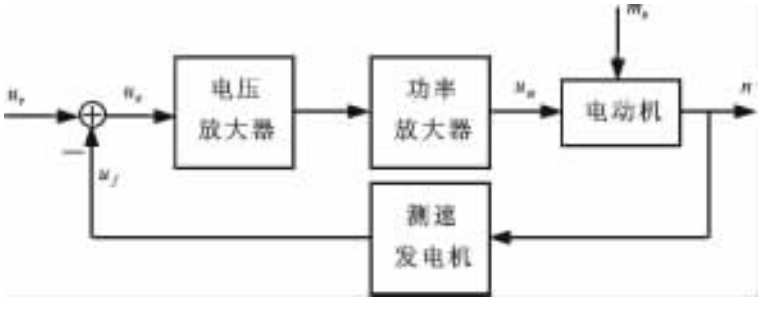


图 员猿原摇例题 员圆原图（遭）的原理方框图

闭环控制系统通过反馈控制装置，可以抑制扰动对被控量产生的影响，有较高的控制精度。但是，这类控制系统使用的元部件较多，结构较复杂，系统的分析与设计也比较麻烦。尽管如此，闭环控制仍然是一类重要的并被广泛应用的控制方式。自动控制理论中主要的研究对象就是用这种控制方式所构成的自动控制系统。

1援摇习 题 解 答

【习题 员原员】 举出几个日常生活中的开环控制系统和闭环控制系统的例子，并说明其工作原理。

习题 员原员解：根据开环控制的基本概念，日常生活中经常遇到的开环控制系统有：照明灯的亮和熄、煤气灶的开和关、吊扇的开和关等，工作原理（略）；根据闭环控制的基本概念，日常生活中经常遇到的闭环控制系统有：空调机和电冰箱的温度控制、压力锅的压力控制等，工作原理（略）。

【习题 员原圆】 图 员猿原所示为一随动系统。试说明其工作原理并画出其原理方框图。

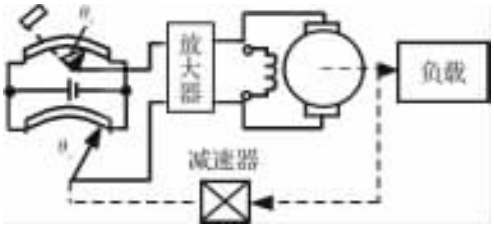


图 员原员摇习题 员原图

习题 员原圆解：图 员原所示为角位移随动系统，其基本组成、元部件和有关变量在随动系统中具有代表性，是自动控制技术的典型应用。

(员) 系统的工作原理

如图 员原所示，该控制系统的任务是控制负载的角位移 $\theta_{精}$跟踪输入手柄的角位移 $\theta_{则}$。

当负载的转角 $\theta_{精}$与手柄转角 $\theta_{则}$一致时，即 $\theta_{精}$越$\theta_{则}$，两个环形电位器组成的桥式电路处于平衡状态，电桥的输出电压为零，电动机不转动，系统处在平衡状态。

当手柄转角 $\theta_{则}$发生变化时，负载的转角 $\theta_{精}$与手柄转角 $\theta_{则}$不一致，则电桥有输出电压，此电压信号经放大器放大后驱动电动机转动，使负载角位移 $\theta_{精}$趋向 $\theta_{则}$变化，即逐步使 $\theta_{则}$和 $\theta_{精}$的偏差减小，直到 $\theta_{精}$越$\theta_{则}$，电桥的输出电压为零，电机停止转动，系统达到新的平衡状态。因此，当 $\theta_{则}$任意变化时，控制系统均能保证 $\theta_{精}$跟随 $\theta_{则}$的任意变化，从而实现角位移的跟踪目的。

(圆) 系统的原理方框图

绘制系统原理方框图的一般方法是，先根据系统的控制目的和任务确定系统的输入量和输出量，然后按控制系统的基本组成划分为若干个相对独立的部分 (如被控对象、测量元件、比较元件、放大元件及执行机构等)，最后从输入量开始，按信号传递的顺序和方向将各部分连接起来，即可得出系统原理方框图。该系统中的手柄是给定元件，手柄角位移 $\theta_{则}$是给定值 (参考输入量)，负载是被控对象，负载的角位移 $\theta_{精}$是被控量 (系统输出量)。电桥电路是测量和比较元件，它测量出系统输入量和输出量的跟踪偏差 ($\theta_{则}$原$\theta_{精}$)并转换为电压信号，该电压信号经放大后驱动电动机，而电动机和减速器组成系统的执行机构。系统的原理方框图如图 员原圆所示。

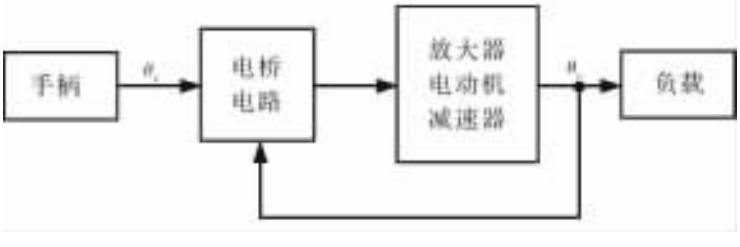


图 员原圆摇习题 员原图 (葬) 的原理方框图

【习题 员原缘】 图 员愿原所示为水位自动控制系统的示意图。试说明系统的工作原理，并画出其原理方框图。

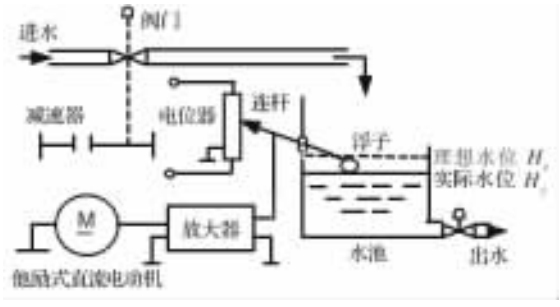


图 员愿原缘 习题 员原缘图

习题 员原缘解：图 员愿原所示为典型的恒值控制系统，通过对该系统工作原理的分析，便于理解和掌握闭环控制系统原理方框图的正确画法。

（员）系统的工作原理

如图 员愿原所示，水位自动控制系统的控制任务是，使水箱的实际水位高度 $h_{槽}$等于给定理想水位高度 $h_{则}$。

当水箱的实际水位 $h_{槽}$正好等于理想水位 $h_{则}$时，电位器电刷的位置对应于电位器的接地点，供给电动机的电枢电压为零，电动机不动，控制阀门保持原有的开度，使水箱中的流入水量与流出水量相等，系统处在平衡状态。

当水箱中的流入水量或流出水量发生变化时，例如出水量增加，水箱水位会下降，浮子位置也相应下降，通过连杆作用使电位器电刷上移，于是给电动机电枢提供一定的控制电压，经放大器放大后使电动机转动，带动减速器调节控制阀门，增大进水量，使水箱水位升高，这时，浮子位置相应升高，并通过连杆改变电位器电刷的位置，进而调整电动机的转速，控制进水量，直到实际水位等于理想水位，系统重新处于平衡状态。反之，若由于流入水量或流出水量的变化使水箱水位升高，系统会自动减小控制阀门的开度，减小流入水量，使实际水位降到希望的水位高度上。

（圆）系统的原理方框图

在本系统中，被控对象是水箱，它是一个看得见的实体。水箱的实际水位 $h_{槽}$是被控制量，表征被控对象的工作状态，也是系统的输出量。$h_{则}$是水箱的理想水位，为给定的水位希望值，也是系统的参考输入量（或给定输入量）。水箱中的浮子跟随液面上下浮动，反映水位的实际高度 $h_{槽}$，同时可以表明实际水位与希望水位的偏差 $h_{偏}=h_{则}-h_{槽}$，原 $h_{槽}$相当于系统中的测量和比较元件。另外，系统的流出水量是引起实际水位发生变化的不利因素或变量，称为扰动量（或干扰输入量）。系统的原理方框图如图 员愿原圆所示。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

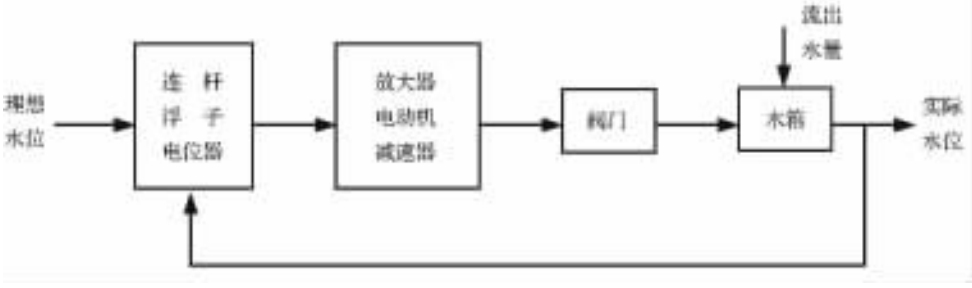


图 员员摇摇习题 员猿摇原理方框图

应当指出，在确定该系统变量时，不要将水箱的流入水量和流出水量误认为是系统的输入量和输出量。

第 2 章摇数 学 基 础

拉普拉斯变换法是一种解线性微分方程的简便运算方法，是后续学习的数学基础。利用拉普拉斯变换，能使许多普通函数，如正弦函数、指数函数转换成复变数的代数函数；微积分的运算可以由在复平面内的代数运算代替。这样，线性微分方程就转换成复变数的代数方程，解微分方程就可以同时获得解的瞬态分量和稳态分量。

2.1摇拉普拉斯变换

2.1.1摇摇拉普拉斯变换的定义

函数 $x(t)$的拉普拉斯变换定义为：

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

其中：

(1) $x(t)$为时间 t的函数，且当 $t<0$时，$x(t)=0$;

(2) s为复变数，$\mathcal{L}$为运算符号；

(3) $X(s)$为 $x(t)$的拉普拉斯变换。

2.1.2摇摇拉普拉斯变换的性质

(1) 若函数 $x(t)$存在拉普拉斯变换，即

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$$

那么，函数 $ax(t)$的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[ax(t)]=a\mathcal{L}[x(t)]=aX(s)$$

式中 a是常数。

(2) 若函数 $x_1(t)$和 $x_2(t)$存在拉普拉斯变换，即

$$X_1(s)=\mathcal{L}[x_1(t)]$$

$$X_2(s)=\mathcal{L}[x_2(t)]$$

那么，函数 $x_1(t)\pm x_2(t)$的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[x_1(t)\pm x_2(t)]=\mathcal{L}[x_1(t)]\pm\mathcal{L}[x_2(t)]=X_1(s)\pm X_2(s)$$

表 2.1.1给出了拉普拉斯变换对照表。

表 2 鄄摇拉普拉斯变换对照表

序号	枣贼	云(泽
员	δ (贼	员
圆	员(贼	$\frac{员}{泽}$
猿	贼	$\frac{员}{泽^{2}}$
源	$藻^{-1}$	$\frac{员}{泽恒葬}$
缘	$贼藻^{-1}$	$\frac{员}{(泽恒葬^{圆}}$
远	$泽^{-1}$贼	$\frac{\omega}{泽^{2}垣\omega^{圆}}$
苑	$糟^{-1}$贼	$\frac{泽}{泽^{2}垣\omega^{圆}}$
愿	贼摇 (灶越员圆猿摆	$\frac{灶!}{泽^{员贡}}$
怨	$贼藻^{-1}$摇 (灶越员圆猿摆	$\frac{灶!}{(泽恒葬^{灶!员贡}}$
员园	$\frac{员}{遭原葬}(藻^{-1}$ 原$藻^{-1})$	$\frac{员}{(泽恒葬\ (泽恒遭}$
员员	$\frac{员}{遭原葬}(遭藻^{-1}$ 原$葬藻^{-1})$	$\frac{泽}{(泽恒葬\ (泽恒遭}$
员圆	$\frac{员}{葬遭}\left[\ 员垣\frac{员}{葬原遭}(遭藻^{-1}$ 原$葬藻^{-1})\ \right]$	$\frac{员}{泽泽恒葬\ (泽恒遭}$
员猿	$藻^{-1}泽^{-1}$贼	$\frac{\omega}{(泽恒葬^{圆}垣\omega^{圆}}$
员源	$藻^{-1}糟^{-1}$贼	$\frac{泽恒葬}{(泽恒葬^{圆}垣\omega^{圆}}$
员缘	$\frac{员}{葬^{圆}}$(葬原员垣$藻^{-1})$	$\frac{员}{泽^{2}(泽恒葬}$
员远	$\frac{\omega_{灶}}{\sqrt{员原\zeta^{圆}}}藻^{\omega_{灶}时}泽^{-1}_{\omega_{灶}}$贼$\sqrt{员原\zeta^{圆}}$	$\frac{\omega_{灶}^{圆}}{泽^{2}垣圆\omega_{灶}泽恒\omega_{灶}^{圆}}$
员苑	$\frac{原员}{\sqrt{员原\zeta^{圆}}}藻^{\omega_{灶}时}泽^{-1}_{\omega_{灶}}$贼$\sqrt{员原\zeta^{圆}}$ 原ϕ)摇摇ϕ 越葬$\frac{\sqrt{员原\zeta^{圆}}}{\zeta}$	$\frac{泽}{泽^{2}垣圆\omega_{灶}泽恒\omega_{灶}^{圆}}$

2援摇拉普拉斯变换定理

2援援摇平移函数

若时间函数 枣(贼) 的拉普拉斯变换为 云(泽)，则时间函数 枣(贼原α) 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\ [枣(贼原\alpha)\ ]\ 越\int_{园}^{肆} 枣(贼原\alpha)\ 藻^{原贼s}\ 凿贼=越\ 藻^{原\alpha s}云(泽)$$

其中：α 为常量，且当 贼＜α 时，枣(贼原α) 越园

2援援摇f(t)与 e$^{-\alpha t}$相乘

若时间函数 枣(贼) 的拉普拉斯变换为 云(泽)，则时间函数 藻$^{原\alpha贼}$援枣(贼) 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\ [藻^{原\alpha贼}枣(贼)\ ]\ 越\int_{园}^{肆} 藻^{原\alpha贼}枣(贼)藻^{原贼s}\ 凿贼=越云(泽+\alpha)$$

其中：α 是实数或复数。

2援援摇 时间比例尺

若时间函数 枣(贼) 的拉普拉斯变换为 云(泽)，则时间函数 枣($\frac{贼}{\alpha}$) 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\ [枣(\frac{贼}{\alpha})\ ]\ 越\int_{园}^{肆} 枣(\frac{贼}{\alpha})\ 藻^{原贼s}\ 凿贼=越\alpha云(\alpha泽)$$

其中：α 是正常数。

2援援摇微分定理

假设时间函数 枣(贼)的拉普拉斯变换为 云(泽)，且函数 枣(贼)的一阶导数存在，那么，函数 枣(贼)的导数的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\left[\frac{凿枣(贼)}{凿贼}\right]\ 越泽云(泽)\ 原枣(园)$$

式中：枣(园) 是 枣(贼)在 贼越园处的初始值。

这里需要说明，对于一个给定的时间函数 枣(贼)，枣(园$_{垣}$) 和 枣(园$_{加}$) 的值可能相等，也可能不相等。如果函数 枣(贼)在 贼越园处有间断点，那么 枣(园$_{垣}$) 和 枣(园$_{加}$) 之间是有差别的。假若 枣(园$_{垣}$) ≠ 枣(园$_{原}$)，则

$$\mathscr{L}_{垣}\left[\frac{凿枣(贼)}{凿贼}\right]\ 越泽云(泽)\ 原枣(园_{垣})$$

$$\mathscr{L}_{原}\left[\frac{凿枣(贼)}{凿贼}\right]\ 越泽云(泽)\ 原枣(园_{原})$$

摇摇假如函数 枣(贼)的 灶阶导数都存在，经过分析证明，我们得到对于 枣(贼)的 灶阶导数的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\left[\frac{凿^{灶}枣(贼)}{凿贼^{灶}}\right]\ 越泽^{灶}云(泽)\ 原泽^{灶原员}枣(园)\ 原泽^{灶原圆}枣^{(员)}(园)\ 原\cdots\ 原泽枣^{(灶原员)}(园)\ 原枣^{(灶原员)}(园)$$

式中：枣(园)，$枣^{(员)}(园)$，…，$枣^{(灶原员)}(园)$ 分别表示 枣(贼)，$\frac{凿枣(贼)}{凿贼}$在 贼越园 …，$\frac{凿^{灶原员}枣(贼)}{凿贼^{灶原员}}$在 贼越园

处的值。

注意，假若 枣(贼)及其导数的所有的初始值都等于零，即初始条件为零，那么 枣(贼)的 灶阶导数的拉普拉斯变换为 泽灶云(泽)，即

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}枣(贼)\right]越泽灶云(泽)$$

2援援摇终值定理

假设函数 枣(贼)及其一阶导数 凿枣(贼)辕凿贼都可以进行拉普拉斯变换，且 $\lim_{贼\to\infty}枣(贼)$ 存在，且除在原点处唯一的极点外，泽云(泽)在包含 躁 轴的右半 泽平面内是解析的，存在

$$\lim_{贼\to\infty}枣(贼)越\lim_{泽\to0}泽云(泽)$$

2援援摇初值定理

假设函数 枣(贼)及其一阶导数 凿枣(贼)辕凿贼都可以进行拉普拉斯变换，而且 $\lim_{泽\to\infty}泽云(泽)$ 存在，那么

$$枣(0_{+})越\lim_{泽\to\infty}泽云(泽)$$

摇摇初值定理是终值定理的对偶定理。

2援援摇积分定理

假设时间函数 枣(贼)的拉普拉斯变换为 云(泽)，且时间函数 枣(贼)的一阶积分存在，则

$$\mathscr{L}\left[\int枣(贼)\mathrm{d}贼\right]越\frac{云(泽)}{泽}垣\frac{枣^{(-1)}(0)}{泽}$$

式中：$枣^{(-1)}(0)$ 表示 $\int 枣(贼)\mathrm{d}贼$ 在 贼越0处的值

说明，假如函数 枣(贼)在 贼越0处包含一个脉冲函数，那么 $枣^{(-1)}(0_{+})\neq枣^{(-1)}(0_{原})$，则

$$\mathscr{L}_{垣}\left[\int枣(贼)\mathrm{d}贼\right]越\frac{云(泽)}{泽}垣\frac{枣^{(-1)}(0_{+})}{泽}$$

$$\mathscr{L}_{原}\left[\int枣(贼)\mathrm{d}贼\right]越\frac{云(泽)}{泽}垣\frac{枣^{(-1)}(0_{原})}{泽}$$

摇摇表 圆原圆是拉普拉斯变换理论中常用的定理和关系式的简略一览表。

表 2 型摇拉普拉斯变换的特性

员	$\mathscr{L}[粤枣(贼)]越粤云(泽)$
圆	$\mathscr{L}[枣_{员}(贼)依枣_{圆}(贼)]越云_{员}(泽)依云_{圆}(泽)$
猿	$\mathscr{L}_{依}\left[\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}枣(贼)\right]越泽灶云(泽)原枣(0_{依})$

续表

源	$\mathscr{L}_{依}\left[\frac{凿^{圆}}{凿贼^{圆}}枣(贼)\right]$ 越 $\frac{灶}{\sum_{k=1}^{圆}}$ 泽云(泽 原 $\frac{灶}{\sum_{k=1}^{圆}}$ 泽枣(园)$_{依}$ 原枣(园)$_{依}$
缘	$\mathscr{L}_{依}\left[\frac{凿^{n}}{凿贼^{n}}枣(贼)\right]$ 越泽云(泽 原 $\sum_{k=1}^{灶}$ 泽$_{k}$ 枣$^{(k)}$(园)$_{依}$ 式中 枣$^{(k)}$(贼 越 $\frac{凿^{(k)}}{凿贼^{(k)}}$枣(贼
远	$\mathscr{L}_{依}\left[\int_{泽}^{贼}枣(贼)凿贼\right]$ 越 $\frac{云(泽}{泽}$ 垣 $\frac{\left[\int_{泽}^{贼}枣(贼)凿贼\right]_{贼=园}}{泽}$
苑	$\mathscr{L}$ [藻$^{\alpha贼}$枣(贼] 越云(泽垣$_{\alpha}$)
愿	$\mathscr{L}$ [枣(贼)原$_{\alpha}$) 员(贼)原$_{\alpha}$)] 越藻$^{\alpha泽}$云(泽
怨	$\mathscr{L}$ [贼凿(贼] 越原$\frac{凿云(泽}{凿择}$
员园	$\mathscr{L}\left[\frac{员}{贼}枣(贼)\right]$ 越$\int_{泽}^{肆}$ 云(泽凿择
员员	$\mathscr{L}\left[枣\left(\frac{贼}{\alpha}\right)\right]$ 越$_{\alpha}$云($_{\alpha}$泽

2援摇拉普拉斯反变换

2援援摇拉普拉斯反变换的概念

拉普拉斯反变换是拉普拉斯变换的逆过程，是用复变数表达式来推导其相应的时间函数表达式的数学运算。拉普拉斯反变换的符号是 $\mathscr{L}^{原员}$，表示如下

$$\mathscr{L}^{原员}[\ 云(泽)\ ]\ 越枣(贼)$$

摇摇在数学上，已知 云(泽来计算时间函数 枣(贼表达式如下

$$枣(贼)\ 越\frac{员}{圆_{i}}\int_{精_{圆}躁}^{精_{圆}躁}云(泽藻^{凿择}摇摇摇\ (贼原员园$$

式中的收敛横座标 精是实常数，且选择的值比 云(泽的所有奇点的实部都要大。于是，积分的路线平行于 躁 轴，并且与 躁 轴的距离是 精 以及该积分路线位于所有奇点的右面。

2援援摇拉普拉斯反变换的计算

介绍求拉普拉斯反变换的常用方法：部分分式展开法。

假设函数 枣(贼)的拉普拉斯变换为 云(泽，且 云(泽 越$\frac{云_{员}}{}$(泽 垣$\frac{云_{圆}}{}$(泽 垣·· 垣$\frac{云_{灶}}{}$(泽，则

$$枣(贼)\ 越\mathscr{L}^{原员}[\ 云(泽]\ 越\mathscr{L}^{原员}[\ 云_{员}(泽]\ 垣\mathscr{L}^{原员}[\ 云_{圆}(泽]\ 垣··\ 垣\mathscr{L}^{原员}[\ 云_{灶}(泽]$$

$$越枣_{员}(贼)\ 垣枣_{圆}(贼)\ 垣··\ 垣枣_{灶}(贼)摇摇摇摇摇$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com