

第一章 控制系统的一般概念

§ 1.1 自动控制的发展历史

自动控制 就是在无人直接参与的情况下 利用控制装置(控制器)使被控制对象或过程自动地按预定的运行规律去运行。导弹能准确地命中目标,人造卫星能按预定轨道运行并返回地面,宇宙飞船能准确地月球上着落并安全返回,都是自动控制技术发展的结果。

自动控制是一门理论性很强的工程技术 称“自动控制技术”实现这些技术的理论叫“自动控制理论”它分为三部分 即“经典控制理论”、“现代控制理论”、“大系统理论与智能控制理论”。

自动控制是一门年轻学科 从 1945年开始形成。这以前,世界各国对此作出很多贡献 是自动控制理论的胚胎与萌芽时期 在这一时期 我国具有杰出的成就。“中国是世界文明发达最早的国家之一”,天文学有关领域的需要产生了自动装置。三千年前发明了自动计时的“铜壶滴漏”装置;公元前 2 世纪发明了用来模拟天体运动和研究天体运动规律的“浑天仪”;二千一百年前研制出指南车;公元 132 年产生了世界第一架自动测量地震的“地动仪”;公元 3 世纪发明了自动记录里数的“记里鼓车”;公元 11 世纪发明了自动调节器“平衡装置”。

工业生产和军事技术的需要,促进了经典自动控制理论和技术的产生和发展。18 世纪欧洲产业革命后 由于生产力的发展 蒸汽机被广泛用作原动力。为使工作更完善 解决不易控制问题),1765 年俄国机械师波尔祖诺夫发明了蒸汽机锅炉水位调节器;1784 年英国瓦特发明了蒸汽机离心式调速器。在蒸汽机控制中 人们总希望转速恒定 因此判定稳定、设计稳定可靠的调节器成为重要课题。1877 年 ROUTH 和 HURWITZ 提出判定系统稳定的判据。19 世纪前半期 生产中开始利用发电机电动机 又促进了水力发展 出现了水电站远控、简单程序控制、电压和电流的自动调整等技术。19 世纪末到 20 世纪前半期,由于内燃机的应用 促进了船舶、汽车、飞机制造业、石油业的发展 同时对自动化又提出了要求 由此相应产生了伺服控制、过程控制等技术。二次世界大战中 为了生产和设计飞机、雷达和火炮上各种伺服机构,需要把过去自动调节技术和反馈放大器技术进行总结,于是搭起了经典控制理论的架子 战后这些理论公开 并用于一般工业生产控制中。

经典控制理论(40~60 年代) 1945 年美国波德写了“网络分析和反馈放大器设计”,奠定了经典控制理论基础,在西方国家开始形成自动控制学科,1947 年美国出版了“伺服机件原理”的第一本自动控制教材,1948 年美国麻省理工学院出版了“伺服机件原理”另一本教材 建立了现在广泛使用的频率法。50 年代是经典控制理论发展和成熟的时期。主要内容为频率法(拉氏变换及 Z 变换)根轨迹法、相平面法、描述函数法、稳定性的代数判据和几何判据、校正网络等,这些理论基本解决了单输入单输出自动控制系统的问题。

同时开始逐渐分化。由线性控制向非线性控制发展，由常系数控制向变系数控制发展，由连续控制向断续控制发展，由分散控制向集中控制发展，由反馈控制向前馈控制、最优控制、自适应控制发展。

现代控制理论期（60年代中期成熟）空间技术的需要和电子计算机的应用，推动了现代控制理论和技术的产生与发展。50年代末 60年代初 空间技术的发展迫切要求对多输入多输出、高精度参数时变系统进行分析与设计，这是经典控制理论无法有效解决的问题 于是出现了新的自动控制理论 称“现代控制理论”。1960年卡尔曼发表了“控制系统的一般理论”，1961年又与布西发表了“线性过滤和预测问题的新结果”。西方国家公认卡尔曼奠定了现代控制理论基础，他的工作是控制论创始人维纳工作的发展，主要引进了数学计算方法中的“校正”概念。现代控制理论主要内容为 状态空间法、系统识辨、最佳估计、最优控制。

以经典控制理论为基础，以自动调节器为核心的自动调节系统阶段，对象是单输入单输出线性自动调节系统，数学模型用传递函数表示，方法是频域法，研究的主要内容是稳定性问题 主要控制装置是自动调节器 技术工具类型为机械、气动、液体、电子等 主要用于实现局部自动化。

以现代控制理论为基础，以控制计算机为核心的最优控制系统阶段，对象是多输入多输出的复杂系统 数学模型用状态方程表示 方法是时域法。主要内容是最优性问题 主要控制装置是电子计算机，用于实现企业管理和控制综合自动化。

大系统理论和智能控制理论 它是 70年代后，控制理论向广度和深度发展的结果。大系统是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统，它涉及生产过程、交通运输、计划管理、环境保护、空间技术等多方面的控制和信息处理问题。而智能控制系统是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统，其中最典型的的就是智能机器人。

§ 1.2 开环控制与闭环控制

一、基本定义

被控对象 是指要求实现自动控制的机器、设备或生产过程。如电机、锅炉、机床、飞行器及工业生产过程等。

控制装置 也称控制器，是指对被控对象起控制作用的装置的总称，目的是使被控对象完成既定任务。

自动控制系统 它是由控制装置和被控对象组成的，是以某种规律或互相依赖的方式结合为一个有机整体，并使被控对象工作状态能自动控制。自动控制系统不限于物理系统，也可应用于抽象的动态现象。

被控量在自动控制系统中，按给定的要求要加以控制的物理量。

控制量作为被控量的控制信号，而加给自动控制系统的输入量。

干扰量也称扰动量，在自动控制系统中，是使被控量偏离期望值的不利因素。如果干扰产生于系统的内部叫内部干扰，干扰产生于系统的外部叫外部干扰。

二、开环控制

开环控制 是指组成系统的控制装置与被控对象之间，只有顺向作用而没有反向联系的控制。炉温控制系统如图 1.1 方块图如图 1.2。

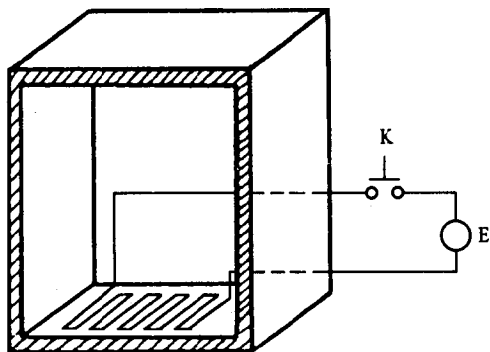


图 1.1 炉温控制系统

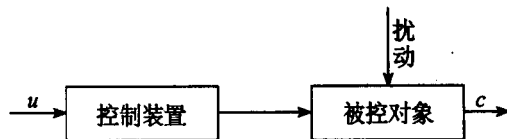


图 1.2 开环控制方块示意图

对炉温系统开环控制分析 炉子是被控对象，炉温是被控制量 c 加热电阻丝的开关 K 受时间继电器控制，按照预先规定的时间接通或断开电源 E 从而使炉温保持在希望炉温的一定范围内。如果工作条件变化较大 如炉门的开闭引起炉温降低 而偏离希望值 但开关 K 不因此改变接通时间，所以炉温偏差一般无法自动修正。

开环控制系统的特点 由上分析可知，系统输出量（被控量）对系统输入量（控制量）不发生影响，不需要对输出量测量，所以控制容易实现，系统的稳定性不是重要问题。它的问题是对存在变化规律无法预测的干扰，往往无法实现控制。为保证系统精度较高，组成系统的每一个部件或元件质量要好，但部件或元件的高精度往往难以保证。

三、闭环控制

在开环控制的基础上，为了解决上述矛盾，人可以直接参与系统工作。如图 1.3 为人参与工作的炉温控制系统，开关 K 不是用继电器控制，而由人操纵，这样人可以通过观察实际炉温，然后根据实际炉温偏离希望炉温的高低来操纵开关 K 的通断时间，从而使炉温保持在希望值。这里人的作用就是完成测量输出并改变输入的任务。用元部件代替人的作用，即实现了无人直接参与的闭环系统。控制系统如图 1.4 方块示意图如图 1.5。

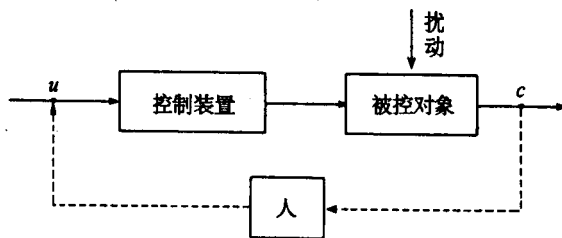


图 1.3 人直接参与系统工作的方块示意图

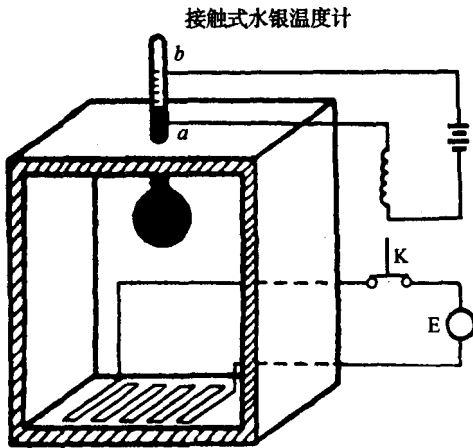


图 1.4 炉温闭环控制系统

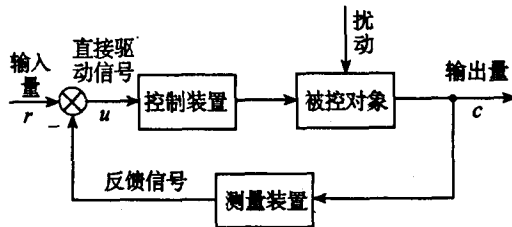


图 1.5 闭环控制方块示意图

闭环控制 是指控制装置与被控对象之间既有顺向作用，又有反向联系的控制。它的控制过程大致为 对被控量（即输出量）进行测量 并与控制信号（输入量）进行比较 得到偏差信号 将偏差信号进行处理（放大与变换）利用变换与放大后的偏差信号产生控制作用 这个控制作用使被控量（即输出量）做与原来相反方向运动。这种利用偏差产生控制作用 达到消除或减小偏差的控制原理叫反馈原理。如果经过反馈使系统偏差增加 即为正反馈，它不能达到自动控制的目的，所以一般地说，反馈控制系统都是负反馈。

闭环控制系统的优点 通过闭环，随着扰动而变化的直接驱动信号，使输出恢复到扰动前的状态 因此对扰动有补偿、抵抗的能力 能用精度低的元件或部件 组成精度较高的控制系统 因为闭环后可能超调、振荡 所以稳定性问题很重要 为此 在系统中 通常要加入校正元件（环节）

§ 1.3 控制系统的组成及性能要求

一、控制系统的基本类型

1. 恒值控制系统

恒值控制系统 如果控制信号为恒定常量，承受这类控制信号作用的闭环系统为恒值控制系统。自动调速系统、恒温控制系统及稳压、稳流、恒频的控制系统 均是恒值控制系统。电机调速系统如图 1.6 所示。

恒值控制系统的优点 其特点是控制信号是常量或是极为缓慢的信号。主要任务是补偿干扰 使系统输出保持恒值。

2. 随动控制系统

随动控制系统如果控制信号为任意时间函数，此函数在系统工作之前又是无法预先确定的，承受这类控制信号作用的闭环系统称为随动控制系统。工作机械的位置控制、导弹发射架的控制、火炮的控制均是随动控制系统 工作机械的随动控制系统如图 1.7 所

示。

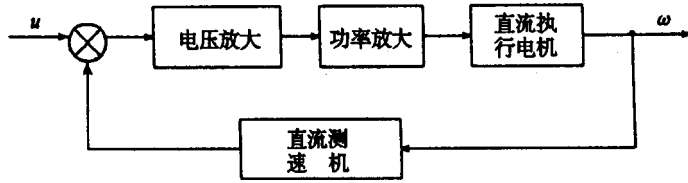


图 1.6 电机调速系统方块示意图

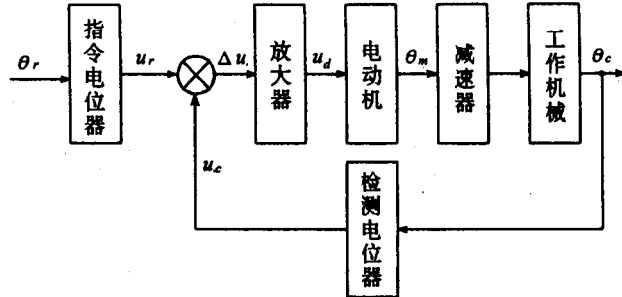


图 1.7 工作机械随动系统方块示意图

随动控制系统的特点 其特点是能以一定的准确度使被控对象跟踪复现控制信号所给定的预先无法确定的运动规律。其主要任务是解决跟踪，而补偿干扰是次要的矛盾。

3. 计算机控制系统

计算机不只是作为计算工具而是作为系统的核心部件参与工作以完成高精度复杂系统的控制。宇宙飞船姿态控制系统如图 1.8 所示。

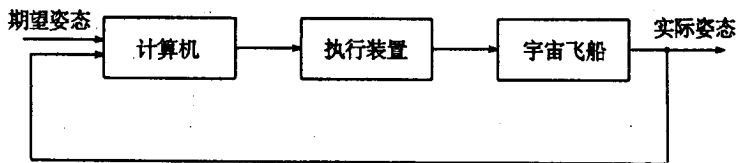


图 1.8 宇宙飞船姿态控制系统方块示意图

计算机控制系统的特点 其特点是闭环内采用计算机控制；系统信号中既有模拟量也有数字量。

二、控制系统的基本组成

由以上闭环系统举例不难看到，尽管控制系统由不同元件组成，其功能也不一样，但它们都是基于负反馈工作原理。相同的工作原理，决定它们必然具有类似的基本结构。同样不同系统中可采用不同元件去实现某种相同的功能。一般来说，一个闭环自动控制系统组成如图 1.9 所示。

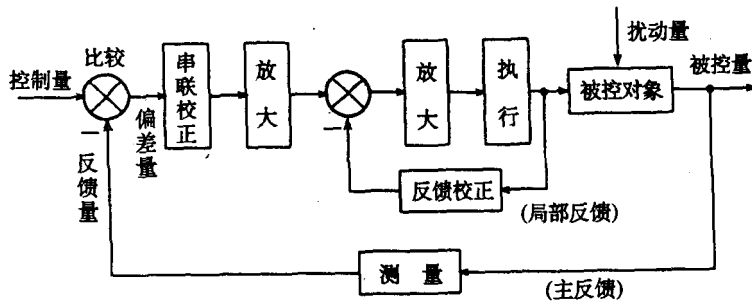


图 1.9 反馈控制系统的组成

测量元件 它是对系统被控量（输出量）进行测量的元件，因为它的精度直接影响控制系统精度，所以应尽可能用精度高的测量元件和合理测量线路。

比较元件 它是用来对系统输出量与输入量进行代数运算并给出偏差信号的元件，起综合、比较变换作用。有时这个作用是由综合电路或测量元件一起完成的，这时这些元件统称误差检测元件。

放大元件 它被用来对微弱的偏差信号进行放大，使其有足够的幅值与功率。

执行元件 它根据放大后的偏差信号，对被控对象执行控制任务，使输出量与希望值趋于一致。

被控对象 它是指自动控制系统需要进行控制的机器、设备或生产过程。被控对象要求实现自动控制的物理量称为被控量或输出量。

校正元件 实践证明，按反馈原理由上述元件简单组合的闭环控制系统，往往不能完成任务。这是因为系统的内部存在不利控制的因素，由于有干摩擦、死区，系统输出并不马上反映输入，只有当偏差信号大到一定时系统才有反应；由于惯性的存在，在反应控制信号过程中还可能产生振荡，严重时破坏系统正常工作。为了使系统能正常工作，要加入能消除或减弱上述不利影响的一些元件，把这样一类元件称为校正元件。

总之，可认为控制系统由对象、比较环节（包含测量元件、比较元件）、放大环节、执行环节、校正环节组成。一般来说，尽管反馈系统控制任务不同，以及使用元件的结构和能源形成不同，但就其信号传递、变换职能来说，都可抽象为上面的基本组成。

三、对控制系统的一般要求

为了实现自动控制的基本任务，必须对系统在控制过程中表现出的行为提出要求，对控制系统的基本要求，通常是通过系统反应特定输入信号（或叫试验信号），例如单位阶跃信号的过渡过程及稳态的一些特征值来表示。其基本要求可综述为三个方面，即系统的稳定性、动态特性和稳态特性。

1. 系统的稳定性

若系统有扰动或给定输入作用发生变化，系统的输出量产生的过渡过程随时间增长而衰减，而回到（或接近）原来的稳定值，或跟踪变化了的输入信号，则称系统稳定。反之，输出量过渡过程随时间增长而发散或持续等幅振荡，则称系统不稳定。

2. 系统的动态特性

由于系统的对象和元件通常都具有一定的惯性(如电磁惯性、机械惯性)又由于能源功率的限制,系统中的各种物理量(如电压、电流、位移、速度、温度等)的变化不可能突变。因此,系统从一个稳定状态过渡到另一个新的稳定状态,都需要经历一个过渡过程,它反映了系统的动态特性,通常用能描述过渡过程的特征值来表示。现以单位阶跃信号作用下控制系统的过渡过程来说明如图 1.10 所示。

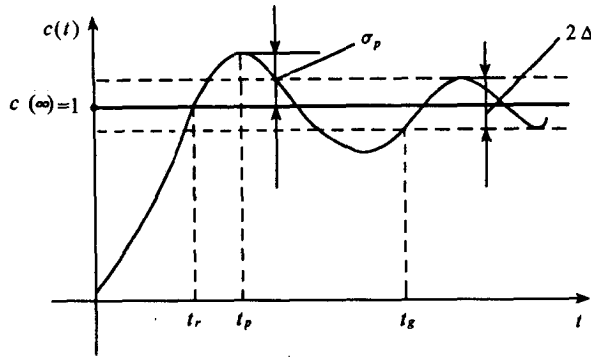


图 1.10 单位阶跃响应特性

系统上升时间 t_r 。系统过渡过程首先达到新的状态需要的时间为上升时间 t_r 它是说明系统反应速度的。

系统超调量 σ_p 。对于稳定系统而言,系统过渡过程的第一次超调量为最大,取其作为性能指标之一。

$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

它是说明系统阻尼性即振荡性的。阻尼大振荡小,即超调量小,说明系统过渡过程进行得平稳。不同的控制系统,对超调量要求也不同,如一般调速系统 $\sigma_p = 10\% \sim 35\%$; 轧钢机的初轧机要求 $\sigma_p < 10\%$ 。

系统的过渡过程时间 t_s 。它是从给定输入作用于系统开始,到输出量进入离期望值的 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 区域所需时间。当 $t \geq t_s$ 时,则有

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \quad (\Delta = 0.05 \text{ 或 } \Delta = 0.02)$$

过渡过程时间 t_s 是说明系统惯性的,反映了系统的反应速度,如连轧机 $t_s = 0.2 \sim 0.5 \text{ s}$ 造纸机 $t_s = 0.3 \text{ s}$ 。

系统振荡次数 N 。它是指在过渡过程时间内,输出量在期望值上下摆动的次数。振荡次数 N 小,说明系统阻尼性好。如普通机床 $N = 2 \sim 3$ 次,造纸机传动 $N = 0$ 即不允许有振荡。

3. 系统的稳态特性

对于稳定系统,输出的稳态值与其期望值之间出现的偏差称为系统的稳态误差 e_{ss} 。系统稳态误差的大小反映了系统的稳态精度,说明了系统的准确程度。

综上 对控制系统的性能要求 可归结为稳定好、动作快、精度高。

四、练习及讨论示例

例 1 图 1.11 为水位控制系统，说明它的工作原理，画出方块示意图，并标明控制量、被控量、干扰量及组成的环节。

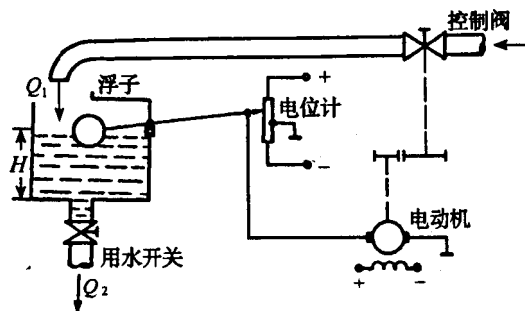


图 1.11 水位控制系统

例 2 图 1.12 为电机直流调速系统，试说明其组成及工作原理，并画出方块示意图。以此系统为背景，阐述闭环控制的特点。

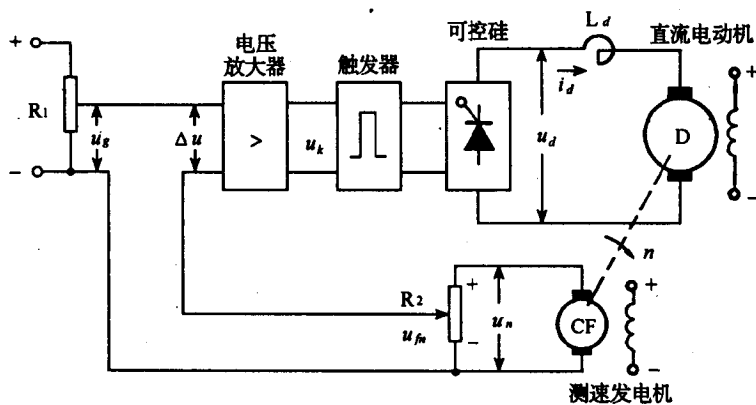


图 1.12 电机直流调速系统

第二章 控制系统的数学模型

§ 2.1 控制系统的运动方程

一、数学模型

根据系统性质 运用相应的物理学、化学、生物学等规律列写的方程式 代表系统在运动过程中各变量间的相互关系，系统动态性能的这个微分方程式的数学表达式，叫数学模型。一个合理的数学模型，是指它既能正确地代表被控对象或系统的特性，即要求精确性，又必须是最简化的形式 即要求简化性。因此处理时 通常抓住主要因素 矛盾 忽略对系统特性影响较小的一些物理因素后，可以得到一个简化模型（起码适用于设计初步阶段）。大多数工程控制系统的简化数学模型是一个线性微分方程，这种控制系统称为线性系统。当微分方程的系数是常数时 相应的控制系统称为线性定常系统 或线性时不变系统 ；当微分方程的系数是时间函数时，相应的控制系统称为线性时变系统。线性系统的重要特点是可以运用叠加原理，即几个外作用加于系统所产生的总响应，等于各个外作用单独作用时产生的响应之和。

如果系统中存在非线性特性，则需用非线性微分方程来描述，这种系统称为非线性系统。严格说 实际控制系统的元件都含有非线性 如同服电动机需一定的起动电源 放大器有饱和 齿轮减速器有间隙存在等等。所以在自然界中 真正的线性系统是不存在的 均为含有非线性特性的系统，虽然可用非线性微分方程描述，但求解很困难，除了可以用计算机进行数值计算外，大部分非线性系统，可以在一定工作范围内用线性系统模型近似，称为非线性模型的线性化。工程实践中，常常把非线性特性在工作点附近用台劳级数展开的方法进行线性化。所以线性化是研究非线性系统的一种常用方法，凡是可以进行线性化的系统，都可以用线性理论进行分析，而线性微分方程的求解一般都有标准的方法，因此线性系统的研究具有重要实用意义。

建立微分方程式的一般步骤是：

全面了解系统的工作原理，及由哪些部分如何联系在一起组成闭环系统。

一般从系统的输入端开始，根据各元件或环节所遵循的物理规律，依次列写它们的微分方程。

将各元件或环节的微分方程联立起来消去中间变量，得到一个仅含有系统输入量与输出量的微分方程，即为整个系统的运动方程式。

二、随动系统运动方程

随动系统示意图如图 2.1 所示。

执行元件为交流两相电机，控制相电压与固定相构成 90° 相移 控制绕组与固定绕组

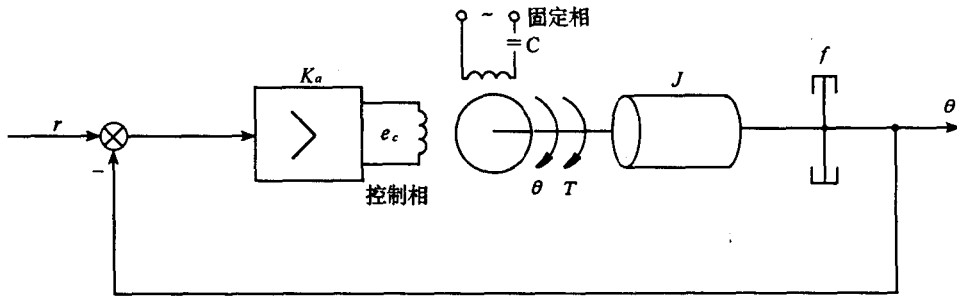


图 2.1 随动系统

空间配置相隔 90° ，这样在电机轴上能有效产生转矩（两个定子绕组通过单相电源相连，但参考电压在固定相要通过电容产生 90° 相移）

J 为电机转动惯量与负载折合到电机轴上转动惯量之和。 f 为电机粘性摩擦系数与负载折合到电机轴上粘性摩擦系数之和。

放大元件放大倍数为 K_a 有

$$e_c = K_a(r - \theta)$$

两相电机列转矩-速度曲线方程为

$$T = K_n\theta + K_c e_c \quad (2.1)$$

式中 K_n, K_c 为常数。

两相电机转矩平衡方程式为

$$T = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \quad (2.2)$$

联解上述三个方程得到

$$J\ddot{\theta} + (K_n + f)\dot{\theta} = K_c K_a (r - \theta)$$

整理得闭环系统输入 $r(t)$ 与输出 $\theta(t)$ 的关系为

$$J\ddot{\theta} + (K_n + f)\dot{\theta} + K_c K_a \theta = K_c K_a r \quad (2.3)$$

三、调速系统运动方程

调速系统示意图如图 2.2 所示。

执行元件为直流枢控电机： L_a 电枢绕组自感， R_a 导线电阻及铁铜损， e_b 电机反电势。

确定系统中每一元部件方程式：

1. 比较电路

$$\Delta e = e_r - e_s$$

2. 线性放大器

$$e_a = K_a \cdot \Delta e$$

3. 直流枢控电机

在电枢电路中 据基尔霍夫第二定律 有

$$e_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b$$

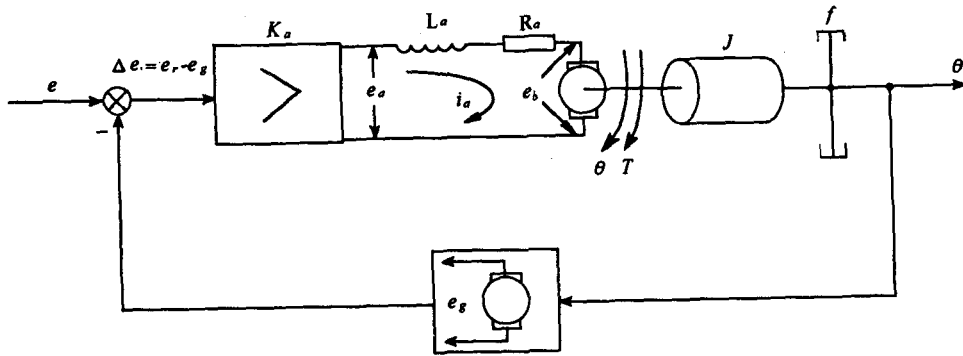


图 2.2 调速系统

当磁通固定不变时，反电势与角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ 成正比，即

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

式中 K_b 为反电势常数。

再找电枢电流与 θ 的关系 由牛顿定律

$$\sum T = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\therefore \sum T = T_e - T_m = K i_a - f \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

得

$$i_a = \frac{1}{K} \left(J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \right)$$

式中 K 为电机力矩常数。

联解上述三个方程得到

$$e_a = \frac{L_a}{K} \left(J \frac{d^3\theta}{dt^3} + f \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + R_a \cdot \frac{1}{K} \left(J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} \right) + K_b \frac{d\theta}{dt}$$

整理

$$\left(\frac{L_a J}{K} \right) \frac{d^3\theta}{dt^3} + \left(\frac{L_a f}{K} + \frac{R_a J}{K} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{R_a f + K K_b}{K} \right) \frac{d\theta}{dt} = e_a$$

即

$$L_a J \ddot{\theta} + (L_a f + R_a J) \dot{\theta} + (R_a f + K K_b) \theta = K e_a \quad (2.4)$$

4. 测速机

$$e_s = K_s \frac{d\theta}{dt}$$

式中 K_s 为测速机常数。

综上方程组：

$$\Delta e = e_r - e_s$$

$$e_a = K_a \cdot \Delta e$$

$$L_a J \ddot{\theta} + (L_a f + R_a J) \dot{\theta} + (R_a f + K K_b) \theta = K e_a$$

$$e_s = K_h \frac{d\theta}{dt}$$

联立解得闭环系统输出与输入的关系为

$$L_a J \theta + (L_a f + R_a J) \theta + (R_a f + K K_b + K K_a K_h) \theta = K K_e e_r \quad (2.5)$$

§ 2.2 传递函数

一、拉氏变换

控制系统的微分方程，是在时域中描述系统动态性能的数学模型。在给定外作用及初始条件下，求解微分方程可以得到系统的输出响应。这种方法比较直观，尤其是借助于电子计算机，可迅速而准确地求解结果。但是，如果系统中某个参数变化或者结构形式改变，则需要重新列写并求解微分方程，不便于对系统进行分析与设计。用拉氏变换将线性常微分方程转化为易处理的代数方程，可以得到系统在复数域中的数学模型，称为传递函数。它不仅可以表征系统动态特性，而且可借以研究系统的结构或参数变化对系统性能的影响。经典控制理论广泛应用的频率法和根轨迹法，就是在传递函数基础上建立起来的。因此，拉氏变换成为自动控制理论的数学基础。

1. 拉氏变换的概念

若将实变量 t 的函数 $f(t)$ 乘以指数函数 e^{-st} (其中 $s = \sigma + j\omega$ 是一个复变数) 再在 0 到 ∞ 之间对 t 进行积分 就得到一个新的函数 $F(s)$ 。 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉氏变换 并可符号 $L[f(t)]$ 表示。

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.6)$$

上式称为拉氏变换的定义式。为了保证式中 等号右边的积分存在， $f(t)$ 应满足下列条件：

- 若 $t < 0$ 则 $f(t) = 0$;
- 若 $t > 0$ 则 $f(t)$ 分段连续；
- 若 $t \rightarrow \infty$ 则 e^{-st} 较 $f(t)$ 衰减得更快。

由于 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ 是一个定积分 t 将在新函数中消失。因此 $F(s)$ 只取决于 s 它是复变数 s 的函数。拉氏变换将原来的实变量函数 $f(t)$ 转化为复变量函数 $F(s)$ 。

拉氏变换是一种单值变换， $f(t)$ 和 $F(s)$ 之间具有一一对应的关系。通常称 $f(t)$ 为原函数 $F(s)$ 为象函数。

2. 常用函数的拉氏变换

实用中 常把原函数与象函数之间的对应关系列成对照表的形式。通过查表 就能够知道原函数的象函数 或象函数的原函数 这十分方便。常用函数的拉氏变换对照表见表 2.1。

3. 拉氏变换的基本定理

线性定理

两个函数和的拉氏变换 等于每个函数拉氏变换的和 即

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \quad (2.7)$$

函数放大 K 倍的拉氏变换, 等于函数拉氏变换的 K 倍 即

$$L[Kf(t)] = KF(s) \quad (2.8)$$

表 2.1 常用函数拉氏变换照表

原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t^n (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

微分定理

函数求导的拉氏变换, 等于函数拉氏变换乘以 s 的求导次幂 (这时, 初始条件需为零) 即当初始条件 $f(0) = 0$ 时 $L[f'(t)] = sF(s)$ 。

同理 若初始条件

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

则有

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) \quad (2.9)$$

积分定理

函数积分的拉氏变换, 等于函数拉氏变换除以 s 的积分次幂 这时 初始条件需为零) 即当初始条件 $\int f(t)dt|_{t=0}$ 时, $L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s}$ 。

同理 当初始条件为零时 则有

$$L[\underbrace{\int \dots \int f(t) dt^n}_n] = \frac{F(s)}{s^n} \quad (2.10)$$

初值定理

函数的初始值 ($t \rightarrow 0$ 的数值) 等于函数的拉氏变换乘以 s 后的 $t \rightarrow \infty$ 的极限值。即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.11)$$

终值定理

函数的稳态值 ($t \rightarrow \infty$ 的数值) 等于函数的拉氏变换乘以 s 后的 $t \rightarrow 0$ 的极限值。即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.12)$$

二、传递函数的概念

1. 定义

线性定常系统方块图如图 2.3。当初始条件为零时，输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比，定义为传递函数。

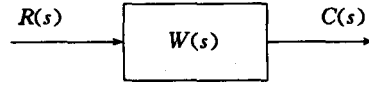


图 2.3 系统方块图

若线性定常系统用 n 阶微分方程描述 即

$$c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} c(t) + a_n c(t) = b_0 r^{(m)}(t) + \dots + b_1 r^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} r(t) + b_m r(t)$$

式中 $c(t)$ 是系统输出量 $r(t)$ 是系统输入量 $a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ 是与系统结构参数有关的常数。在初始条件为零时 进行拉氏变换 得 s 的代数方程为

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)C(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)R(s)$$

传递函数定义为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (2.13)$$

2. 求取传递函数举例

求前面随动系统中二相电机的传递函数：

式(2.1)、(2.2) 联解 有 $J\theta + (K_n + f)\theta = K_c e_c$ 在初始条件为零时进行拉氏变换：

$$Js^2\Theta(s) + (K_n + f)s\Theta(s) = K_c E_c(s)$$

$$\therefore \frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (K_n + f)s} = \frac{K_c / (K_n + f)}{s \left(\frac{J}{K_n + f} s + 1 \right)}$$

令 $K_m = \frac{K_c}{K_n + f}$ 为电动机增益常数

$T_m = \frac{J}{K_n + f}$ 为电动机时间常数

故得

$$\frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (2.14)$$

求前面调速系统中的枢控电机的传递函数：

把式(2.4) $L_a J \ddot{\theta} + (L_a f + R_a J) \dot{\theta} + (R_a f + K K_b) \theta = K e_a$ 在初始条件为零时 进行拉氏变换 即

$$L_a J s^2 \Theta(s) + (L_a f + R_a J) s \Theta(s) + (R_a f + K K_b) \Theta(s) = K E_a(s)$$

$$\therefore \frac{s\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{L_a J s^2 + (L_a f + R_a J) s + R_a f + K K_b} = \frac{K}{\frac{L_a J}{R_a f + K K_b} s^2 + \frac{L_a f + R_a J}{R_a f + K K_b} s + 1}$$

通常电枢中电感级小, $L_a \approx 0$ 所以

$$\frac{s\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K}{R_a f + KK_b}}{\frac{R_a J}{R_a f + KK_b} s + 1}$$

令 $K_m = \frac{K}{R_a f + KK_b}$ 为电动机增益常数

$T_m = \frac{R_a J}{R_a f + KK_b}$ 为电动机时间常数

故得

$$\frac{s\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1} \quad (2.15)$$

3. 传递函数的性质

传递函数描述既适用于元件, 也适用于系统(开环或闭环系统)。它是描述其动态特性的一种关系式, 与系统或元件的运动方程对应。

传递函数是通过复数形式来表征系统和元件的内在性质工具, 与外作用无关。

传递函数是从实际物理系统出发, 用数学方法抽象出来的, 但是它不代表系统或元件的物理结构, 许多物理性质不同的系统或元件, 可以具有相同的传递函数。

传递函数是复变量 s 的有理分式 分母多项式的最高阶次 n 高于或等于分子多项式最高阶次 m 即 $n \geq m$ 。这是因为实际系统或元件总具有惯性, 以及能源为有限所致。

三、串联环节的传递函数

串联环节组成的开环系统, 如图 2.4 所示。

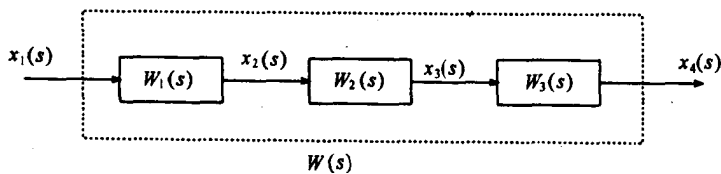


图 2.4 串联环节组成的开环系统

求取三个元件串联后, 总的传递函数

$$W(s) = \frac{x_4(s)}{x_1(s)}$$

按定义

$$W_1(s) = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}, W_2 = \frac{x_3(s)}{x_2(s)}, W_3 = \frac{x_4(s)}{x_3(s)}$$

所以

$$W(s) = \frac{x_4(s)}{x_1(s)} = \frac{x_4(s)}{x_3(s)} \cdot \frac{x_3(s)}{x_2(s)} \cdot \frac{x_2(s)}{x_1(s)} =$$

$$W_3(s) \cdot W_2(s) \cdot W_1(s) \quad (2.16)$$

故数个元件串联（元件间无负载效应）后的传递函数，等于每个串联元件的传递函数的乘积。

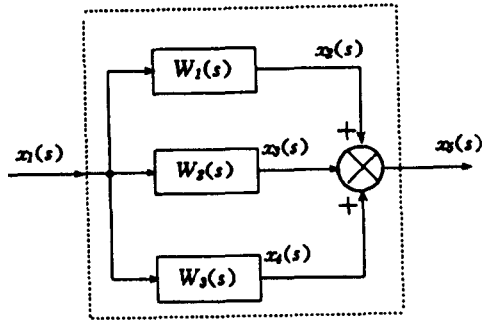
四、并联环节的传递函数

并联环节组成的开环系统如图 2.5 所示。求取三个元件并联后的传递函数，由定义

$$W_1(s) = \frac{x_2(s)}{x_1(s)}$$

$$W_2(s) = \frac{x_3(s)}{x_1(s)}$$

$$W_3(s) = \frac{x_4(s)}{x_1(s)}$$



按叠加原理

图 2.5 并联环节组成的开环系统

$$x_5(s) = x_2(s) + x_3(s) + x_4(s)$$

$$\therefore W(s) = \frac{x_5(s)}{x_1(s)} = \frac{x_2(s)}{x_1(s)} + \frac{x_3(s)}{x_1(s)} + \frac{x_4(s)}{x_1(s)} = W_1(s) + W_2(s) + W_3(s) \quad (2.17)$$

故数个元件并联（同方向）后的传递函数，等于每个并联元件的传递函数之和。

§ 2.3 方 块 图

由前节可知 使用传递函数尚有不足之处 信号流向不鲜明、元件函数功能不鲜明、元件相互作用不鲜明。而任何复杂的控制系统都由许多元件组成，在系统分析设计中，为了表示各个元件所起的作用及其相互关系，常常需要画出完整的系统原理线路图，这种图一般比较详细且难绘制。为了简化，工程上通常把每个元件用一个方块表示，方块内标明元件的传递函数，元件之间的信号传递关系，用方块之间的连接线表示。这种用标明传递函数的方块和连接线表示系统功能的图形叫方块图。因此，控制系统的方块图是描述系统各组成元件之间信号传递关系的数学图形，它表示系统输入量与输出量间因果关系以及对系统中各物理量所做的运算，是控制工程中描述复杂系统的一种简便方法。

一、方块图的组成与特点

1. 方块图组成

方块图的每一元件用标有传递函数的方块表示 方块代有箭头 其方向表示信号传递方向 箭头处标有代表信号物理量的符号字母，如图 2.6 所示。

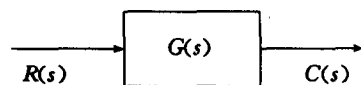


图2.6 元件方块图

然后把系统中所有元件都用上述方块形式表示 按系统输入信号经过各元件的先后次序 依次将代表各元件的方块用连接线连结起

来，显然前后两方块连接时，前面方块输出信号必为后面方块的输入信号。

对于闭环系统，需引入两个新符号。

相加点用“ $R \rightarrow \otimes \rightarrow E$ ”符号表示，是系统的比较元件，表示两个以上信号的代数运算。当反馈为正时用正号表示，当反馈为负时用负号表示。

分支点用“ $C \rightarrow \nabla \rightarrow C$ ”符号表示由方块出来的信号，从这一点起，同时进入另一方块或相加点。

现以 § 2.1 的随动系统与调速系统为例，画出相应的方块图。

随动系统方块图，如图 2.7 所示。

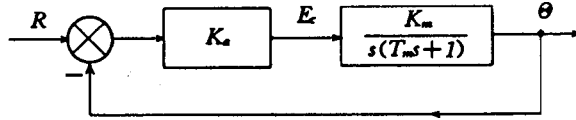


图 2.7 随动系统方块图

调速系统的方块图如图 2.8 所示。

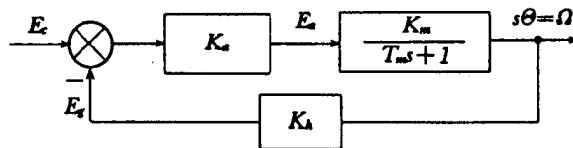


图 2.8 调速系统方块图

由举例不难得出，任何线性控制系统，都可以用方块、相加点和分支点组成的方块图表示。绘制时，首先列写描述每一个元件动态特性的方程式，然后在初始条件为零的条件下进行拉氏变换得传递函数，分别以方块形式表示出来，最后从比较元件（相加点）入手，按输入信号流经的先后次序，将各方块单元连结起来，组成完整的方块图。

2. 方块图的特点

方块图也是从实际物理系统抽象出来的信号关系，不代表系统或元件的物理结构；元部件功能、相互关系、流向是单向不可逆的，只有依据信号流向连结起来，组成方块图才有效；一定系统的方块图不是唯一的，由于分析角度不同，同一系统可画出不同方块图。

二、具有负反馈闭环（标准形式）系统的传递函数

当系统具有负反馈时，标准形式闭环系统方块图如图 2.9 由图列方程

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$

$$B(s) = H(s) \cdot C(s)$$

联解得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} =$$

前向通道传递函数

$$1 + \text{前向通道传递函数} \cdot \text{反馈通道传递函数}$$

1. 定义