

高等学校教材

# 自动控制原理

程 鹏 主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书列入北京市 2002 年高等教育精品教材计划。

书中全面系统地介绍了自动控制理论的基本内容和分析、研究方法,包括系统数学模型的建立,分析系统的时域法、根轨迹法和频率域方法,线性系统的校正设计;采样系统理论;非线性系统理论,包括相平面法和描述函数法;现代控制理论基础,包括状态方程、可控性与可观测性、极点配置和状态观测器、系统稳定性等问题;附录中有拉氏变换、矩阵相似对角化和约当标准形、MATLAB 应用的基础知识。每章均有适当的习题,书末给出了部分习题解答。

本书可作为高等学校电子信息科学类、仪器仪表类、电气信息类、自动控制类一些专业的教材,也可作为成人教育和继续教育的教材,还可以作为科技人员参考用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/程鹏主编. —北京:高等教育出版社,

2003.7

ISBN 7-04-011866-1

I. 自... II. 程... III. 自动控制理论-高等学校-教材 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 043836 号

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷

开 本 787×960 1/16

印 张 31.75

字 数 590 000

版 次 年 月第 1 版

印 次 年 月第 次印刷

定 价 39.20 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

## 前 言

目前,自动控制技术已广泛地应用于工、农业生产,交通运输和国防建设。指导自动控制系统分析和设计的控制理论也有了很大的发展,它的概念、方法和体系已经渗透到许多学科领域。在20世纪40和50年代中发展起来的经典控制理论至今仍被成功地应用于单变量定常系统的分析和设计。在20世纪50年代末、20世纪60年代初发展起来的状态空间方法具有更广泛的适用性,它可以用于多变量、定常或时变系统,所讨论的问题更复杂。为了适应高等工业院校本科生的需要,根据相应的教学大纲和学时安排,选取了经典控制理论和状态空间方法基础部分作为内容,编写本教材。本书可供电子信息科学类、仪器仪表类、电气信息类、自动控制类一些专业选用。

本教材在经典控制理论和状态空间方法这两部分内容的处理上,遵循“传统模式”,即将经典理论与现代控制理论分开编写,主要是考虑到传统模式已经证明行之有效,并且可以继续采用。另外,这两方面内容的数学基础不同,处理问题的思路不同,混编在一起有教学上的不便。为了弥补传统编写模式的不足,建议在讲现代控制理论时能有意识地多联系经典控制理论。

本书安排了九章内容。一至六章介绍经典线性理论,包括时域法、根轨迹法和频率域方法。第一章介绍自动控制的一般概念,首先从人工控制的过程引出自动控制系统应有的职能和部件,从而引出反馈系统的概念与组成特点,而不是通过大量实例的罗列而引出。然后举三个例子介绍开环控制、闭环控制、复合控制等概念。重点是反馈系统的原理、组成部件的阐述。动态过程和对系统的性能要求只介绍初步概念。

第二章介绍自动控制系统的数学模型,包括微分方程、传递函数和脉冲响应函数。强调了用线性常系数微分方程描述的系统特点:叠加原理、时不变性、物理实现性;讲梅森公式时,直接使用动态结构图,不引入信号流图,从而使梅森公式与方框图融成一体。

第三章介绍时域分析法,包括一、二阶系统的分析与计算,系统稳定性分析(劳思判据、赫尔维茨判据)稳态误差分析、计算和一般规律。讲解稳态误差时,强调了拉氏变换终值定理的使用条件和系统稳定性要求的关系,在讲消去稳态误差的条件时,强调了内模原理与稳定性要求,使得数学的严谨性与物理概念一致。

第四章介绍根轨迹法,包括根轨迹方程与根轨迹的绘制法则,应用主导极点、偶极子等概念近似分析系统的性能,广义根轨迹等内容。在根轨迹绘制法则中,将分离角的求法总结为简单、便于使用的法则。分析系统的性能强调用主导极点、偶极子等概念,不罗列繁琐的近似估算公式。

第五章介绍频率域方法,包括频率特性及其图示方法、物理意义,奈奎斯特判据和对数判据。为了加强系统频带的概念介绍了连续信号的频谱。开、闭环频率特性与系统性能的关系,以定性分析的物理概念为主。

第六章介绍控制系统的校正设计,包括串联校正、反馈校正(超前校正、滞后校正、滞后-超前校正、PID调节器)、复合校正。串联校正主要讲定性分析的物理概念,串联校正的理论设计方法另节处理。反馈校正的讲法中汲取了最初反馈放大器的结果,也充分吸收了20世纪80年代多变量频率域的结果,使得与后续结果一致。复合控制一节中包含了多种形式的初偿方案。

第七章介绍非线性系统理论,包括相平面法和描述函数法。

第八章介绍采样系统理论,包括采样定理、 $z$ 变换、脉冲传递函数、系统分析等内容,稳定性判据主要介绍朱利判据,性能分析主要讲闭环极点位置与瞬态分量的对应关系,数字校正中讲最小拍控制。

第九章介绍了现代控制理论基础,包括状态方程、可控性与可观测性、极点配置和状态观测器、系统稳定性等问题。集中讲述单变量线性时不变系统,对所有定理都给出了符合学生基础的严格

证明,使论述严谨,加强了逻辑思维与抽象思维的训练。

书末有三个附录,分别为拉普拉斯变换、矩阵相似对角化和约当标准形、MATLAB 语言与自动控制系统设计。附录部分应根据不同专业学生的需要,在课程教学合适的时间安排一定学时讲解。为了教学的方便,每章均有适当的习题,书末附有主要练习题的简单答案。

本书在取材和阐述方式上,注意了工程性,将实验教学环节和计算机辅助设计融合一体,贯穿全书。在内容上贯彻了删繁就简的原则,避免过分地引申和扩充。在叙述问题时,力求概念明确、层次分明和遵循教学顺序。在例题和习题的编排上考虑了不同专业的背景,以供不同专业的教学选用。由于前六章与第七章、第八章、第九章的内容有相对独立性,删除一些章节后可供其他非控制类专业或成人教育和继续教育选用。

本教材由程鹏主编,参加编写的有:祁慧珍(第一、五章)、于凤仙(第二、四章、附录 I)、赵平(第三章)、王艳东(第四章、附录 III)、邱红专(第八章)、程鹏(第六、七、九章、附录 II),全书习题由邱红专提供了答案。由于本书是在北京航空航天大学内部使用教材的基础上修订的,十余年来曾经多次修改,除了前述同仁外,沈程智、汪声远和王纪文等都曾经参加过本书的筹划和提供过初稿,李昌隆为本书提供了图稿。

本教材在编写过程中参考了许多院校专家们编写的教科书和习题集,在此表示感谢。

北京航空航天大学

程 鹏

2002 年 12 月

# 目 录

第一章 自动控制的一般概念 .....	1
§ 1-1 自动控制的任務 .....	1
§ 1-2 自动控制的基本方式 .....	2
§ 1-3 对控制系统的性能要求 .....	11
习题 .....	13
第二章 自动控制系统的数学模型 .....	15
§ 2-1 控制系统微分方程的建立 .....	16
§ 2-2 非线性微分方程的线性化 .....	21
§ 2-3 传递函数 .....	24
§ 2-4 动态结构图 .....	34
§ 2-5 系统的脉冲响应函数 .....	52
§ 2-6 典型反馈系统的几种传递函数 .....	54
习题 .....	57
第三章 时域分析法 .....	63
§ 3-1 时域分析基础 .....	63
§ 3-2 一、二阶系统分析与计算 .....	68
§ 3-3 系统稳定性分析 .....	86
§ 3-4 稳态误差分析及计算 .....	98
习题 .....	111
第四章 根轨迹法 .....	117
§ 4-1 根轨迹与根轨迹方程 .....	117
§ 4-2 绘制根轨迹的基本法则 .....	124
§ 4-3 广义根轨迹 .....	145
§ 4-4 系统闭环零、极点分布与阶跃响应的关系 .....	153
§ 4-5 系统阶跃响应的根轨迹分析 .....	160
习题 .....	165
第五章 频率域方法 .....	169
§ 5-1 频率特性 .....	169
§ 5-2 典型环节的频率特性 .....	174
§ 5-3 系统的开环频率特性 .....	190
§ 5-4 频率稳定判据 .....	200
§ 5-5 系统闭环频率特性与阶跃响应的关系 .....	212
§ 5-6 开环频率特性与系统阶跃响应的关系 .....	222
习题 .....	226
第六章 控制系统的校正 .....	234
§ 6-1 系统校正设计基础 .....	234
§ 6-2 串联校正 .....	238

§ 6-3 串联校正的理论设计方法 .....	244
§ 6-4 反馈校正 .....	252
§ 6-5 复合校正 .....	257
习题 .....	263
<b>第七章 非线性系统分析</b> .....	<b>269</b>
§ 7-1 非线性问题概述 .....	269
§ 7-2 常见非线性因素对系统运动特性的影响 .....	274
§ 7-3 相平面法基础 .....	282
§ 7-4 非线性系统的相轨迹分析 .....	294
§ 7-5 描述函数 .....	306
§ 7-6 用描述函数法分析非线性系统 .....	314
习题 .....	328
<b>第八章 采样系统理论</b> .....	<b>332</b>
§ 8-1 采样过程与采样定理 .....	334
§ 8-2 信号的恢复与零阶保持器 .....	337
§ 8-3 $z$ 变换与 $z$ 反变换 .....	339
§ 8-4 脉冲传递函数 .....	349
§ 8-5 采样系统的性能分析 .....	355
§ 8-6 采样系统的数字校正 .....	362
习题 .....	365
<b>第九章 状态空间分析方法</b> .....	<b>369</b>
§ 9-1 状态空间方法基础 .....	369
§ 9-2 线性系统的可控性和可观性 .....	388
§ 9-3 状态反馈与状态观测器 .....	416
§ 9-4 有界输入、有界输出稳定性 .....	427
§ 9-5 李雅普诺夫第二方法 .....	429
习题 .....	432
<b>附录 I 拉普拉斯变换</b> .....	<b>437</b>
<b>附录 II 矩阵相似对角化和约当标准形</b> .....	<b>452</b>
<b>附录 III MATLAB 语言与自动控制系统设计</b> .....	<b>457</b>
部分习题解答 .....	484
参考文献 .....	495

## 第八章 采样系统理论

在前面各章中所研究的控制系统中的所有变量,不论是输入量、输出量,还是反馈量和偏差量,均是时间  $t$  的连续系统,这类系统统称为连续控制系统,其中控制器是由模拟装置实现的,但对于复杂的控制系统,模拟装置难于实现复杂的控制规律。近 20 年来,随着数字计算机,特别是微处理器的快速发展,其价格逐渐下降,性能逐渐提高,使得采用数字计算机或微处理器的控制系统越来越多。

图 8-1 是机载火力控制系统的某一个通道的方框图。雷达、瞄准具等测量装置所给出的测量信号  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 通过 A/D 转换成数字量,输入计算机中,经过解命中问题的瞄准计算程序,计算出武器应有的转角指令信号  $y$ 。另一方面,反馈电位计将武器实际的机械转角  $x$  转换成电压信号  $x_f$ ,再经 A/D 转换器将  $x_f$  转换成数字信号,反馈到计算机中,由计算机中的程序实现指令信号与反馈信号的减法运算,即  $e = y - x_f$ 。计算机中的控制程序再对误差  $e$  进行加工,得到输出控制信号  $u = f(e)$ ,D/A 转换器将数字控制信号转换成模拟控制信号,再经运算和伺服放大器放大,驱动伺服电机,经减速器改变武器的转角  $x$ 。控制系统的作用是力图使误差  $e$  趋于零,即使武器的实际转角趋于  $x$  趋于计算机所得到武器的应有的转角  $y$  (二进制数码形式)。图中测速发电机的作用是改善控制系统的性能。

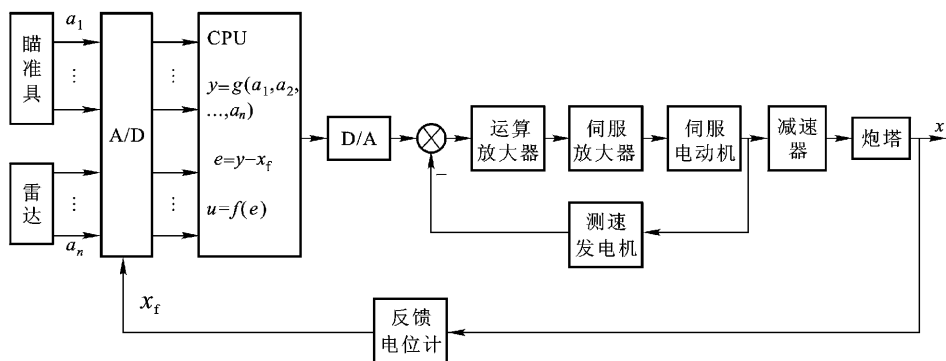


图 8-1 机载火力控制系统原理图

这个系统将计算机设置在闭合回路内,形成误差  $e$  的相减运算是由计算机  
此为试读,需要完整PDF请访问: [www.ertongbook.com](http://www.ertongbook.com)

程序实现的。这里,计算机给出的武器应有的转角  $y$  就是控制系统的参考量或输入量,武器的实际转角  $x$  则是该系统的被控量或输出量。

将图 8-1 所示的机载火力控制系统简化后,可得到一般的单回路闭环计算机控制系统原理方框图,如图 8-2 所示。图中  $r(t)$  为系统的输入量,  $c(t)$  为系统的输出量。由于数字计算机只能接收和处理数字信号,因此需要由模拟-数字(A/D)转换器将连续的偏差信号转化为数字信号,数字计算机根据预先按照控制规律设计的程序,对这些数字偏差信号进行运算或处理,并给出合适的数字控制信号,又由于在多数情况下被控对象是时间的连续环节,因此需要通过数字-模拟(D/A)转换器将数字控制信号转化为模拟控制信号,以实现对被控对象的控制。通常称这类既有离散信号又有连续信号的系统为采样控制系统。

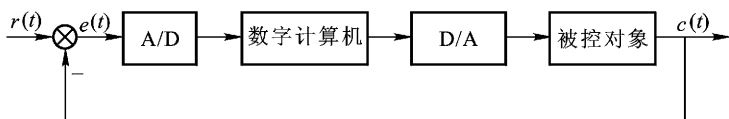


图 8-2 采样系统

由于采样系统中被控对象本身是连续信号部件,因而它与离散系统有所区别;又由于数字计算机的输入和输出信号都是以数码形式出现,因而它又与连续系统有所区别。总体来说,采样系统的分析与设计是按离散系统的方法来处理,所以常常将其归结为离散系统。严格地说,两者是有区别的,主要表现在采样信号与离散信号的描述上,采样信号(或函数)是在整个实数轴上取值,其定义域是一维数集,而离散信号(或函数)则是在实数轴上正整数处取值,其定义域是孤立的点集。离散信号是一类客观存在的信号,如雷达系统中的脉冲序列,数字系统中的二进制数码以及电报、电话号码等,而采样信号是人为地将连续信号用采样器采样后得到的,其周期可根据实际需要而定。

采用数字计算机或微处理器的控制系统有很多优点,如采用数字编码的信号,可减低对噪声的灵敏度,提高了测量精度;若利用一台高速的计算机,还可实现对多个被控对象的分时控制,提高了设备的利用率;由于控制规律是由软件实现的,可以很方便地根据系统的运行情况调整控制规律(如实现自适应控制和最优控制),特别是计算机具有逻辑判断能力,可以实现模拟装置难于实现的控制规律(如智能控制)。

由于在采样系统中存在时间的离散信号,因此需要采用不同于连续控制系统的分析和设计方法,本章将以  $z$  变换为数学工具,重点介绍分析采样系统稳定性、稳态精度、动态品质及设计数字校正装置的方法。

## § 8-1 采样过程与采样定理

## 一、采样过程

将连续信号转换成离散信号的过程称为采样过程,该过程可以看成是一个信号的调制过程,如图 8-3 所示,其中载波信号  $p(t)$  是一个周期为  $T$ , 宽度为  $\tau$  ( $\tau < T$ ) 幅值为  $\frac{1}{\tau}$  的脉冲序列,如图 8-3(b) 所示。调制后得到的采样信号是一个周期为  $T$ , 宽度为  $\tau$ , 幅值正比于采样瞬时值的脉冲序列,如图 8-3(c) 所示,并可用下式表示为

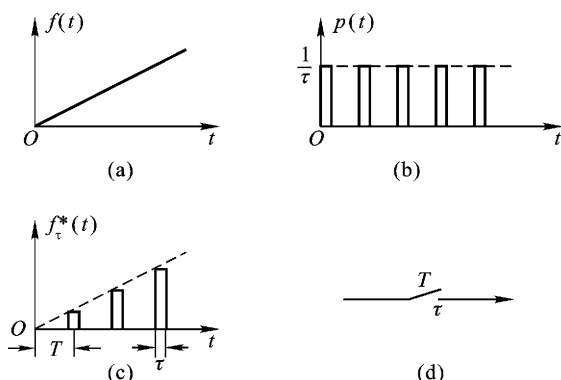


图 8-3 信号的采样过程

$$f_{\tau}^*(t) = p(t) \cdot f(t) \quad (8-1)$$

实现上述采样过程的装置称为采样开关,可用图 8-3(d) 所示的符号表示。

由于载波信号  $p(t)$  是周期函数,故可以展成如下傅里叶级数

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (8-2)$$

其中  $\omega_s$  为采样频率,傅里叶系数  $C_n$  由下式给出

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \frac{\sin(n\omega_s \tau/2)}{n\omega_s \tau/2} e^{-jn\omega_s \tau/2} \quad (8-3)$$

则采样信号  $f_{\tau}^*(t)$  可以表示为

$$f_{\tau}^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n f(t) e^{jn\omega_s t} \quad (8-4)$$

若连续信号  $f(t)$  的 Fourier 变换为  $F(j\omega)$ , 则采样信号  $f_{\tau}^*(t)$  的傅里叶变换为

$$F_{\tau}^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) \quad (8-5)$$

连续信号  $f(t)$  与离散信号  $f_{\tau}^*(t)$  的频谱曲线如图 8-4 所示。  $F_{\tau}^*(j\omega)$  中对应于  $n=0$  的部分称为  $F_{\tau}^*(j\omega)$  的主分量, 其余称为  $F_{\tau}^*(j\omega)$  的补分量, 主分量与连续信号的频谱  $F(j\omega)$  只相差一个常数因子  $\frac{1}{T}$ , 若采样频率  $\omega_s$  越高,  $F_{\tau}^*(j\omega)$  中主分量与补分量的重叠就越少, 设  $\omega_{\max}$  为连续信号频谱的上限频率, 则当  $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$  时, 主分量与补分量不再发生重叠, 此时若存在一个理想的低通滤波器, 其频率特性如图 8-5 所示, 便可以将采样信号完全恢复成原连续信号。由此可得如下著名的香农 (Shannon) 采样定理:

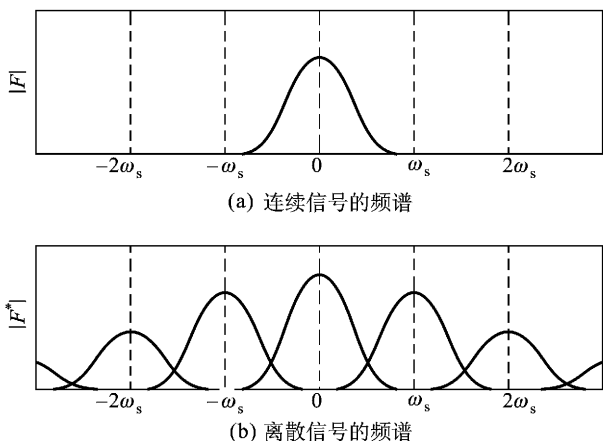


图 8-4 连续信号与离散信号的频谱

如果采样频率  $\omega_s$  满足以下条件

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad (8-6)$$

式中  $\omega_{\max}$  为连续信号频谱的上限频率, 则经采样得到的脉冲序列可以无失真地恢复为原连续信号。

## 二、理想采样过程

为了简化采样过程的数学描述, 引入如下理想采样开关的概念。当脉冲序列的宽度  $\tau$  相对于采样周期  $T$  很小, 并小于连续信号  $f(t)$  的最小时间常数时, 载波信号  $p(t)$  可以近似成如下理想脉冲序列 ( $\tau \rightarrow 0$ )

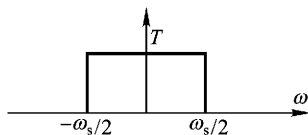


图 8-5 理想低通滤波器的频率特性

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (8-7)$$

再设当  $t < 0$  时  $f(t) = 0$  则采样过程的数学描述为

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) \quad (8-8)$$

此时, 采样过程如图 8-6 所示, 其中理想采样开关的输出是一个理想脉冲序列, 在  $t = kT$  时刻, 脉冲序列的强度等于被采样信号在该时刻的瞬时值。

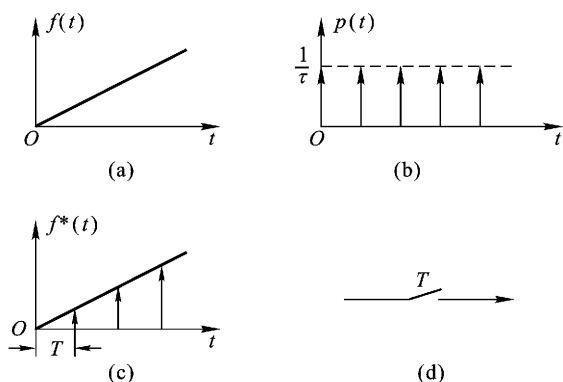


图 8-6 理想采样开关的采样过程

同样  $\delta_T(t)$  可以展成如下傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (8-9)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{T} \quad (8-10)$$

则有

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{jn\omega_s t} \quad (8-11)$$

和

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(j\omega + jn\omega_s) \quad (8-12)$$

图 8-7 所示为连续信号和理想采样信号的频谱, 同样根据香农采样定理有, 当采样频率满足条件(8-7)时, 可用理想低通滤波器完全恢复被采样信号。

值得指出的是, 上述香农采样定理要求满足以下两个条件: ①  $f(t)$  的频谱的上限频率是有限的。② 存在一个理想的低通滤波器。但可以证明理想的低通滤波器在物理上是不可实现的, 在实际应用中只能用非理想的低通滤波器来

代替理想的低通滤波器。 $f(t)$  频谱的上限频率也往往不是有限的,但通常频谱曲线是随着频率的增大而衰减的,这时可以根据实际情况选择一个适当的频率作为  $\omega_{\max}$ 。因此,香农采样定理只是从理论上给出了选择采样频率的指导原则,从物理意义上可以理解为,采样频率越高,采样信号中包含被采样信号的信息就越多,因此,在实际应用中采样频率  $\omega_s$  往往比选择的  $\omega_{\max}$  大很多。

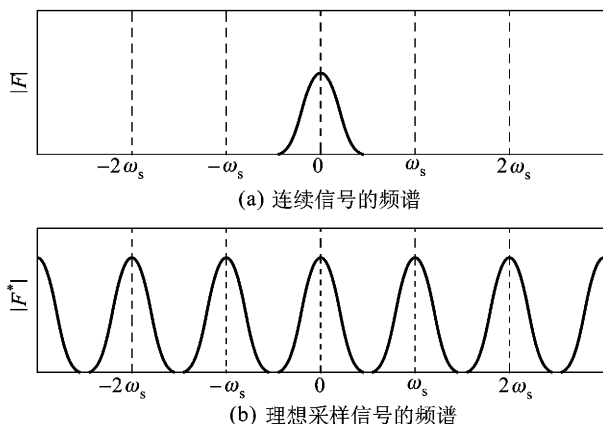


图 8-7 连续信号与采样信号的频谱

## § 8-2 信号的恢复与零阶保持器

信号的恢复是指将采样信号恢复为连续信号的过程,能够实现这一过程的装置称为保持器。从数学意义上看,保持器的作用是根据被采样函数  $f(t)$  在各个采样时刻的瞬时值,求出采样时刻之间的函数值。若已知  $f(t)$  在  $kT$  时刻的函数值及各阶导数,则当  $kT < t < (k+1)T$  时,可将  $f(t)$  展成如下泰勒级数

$$f(t) = f(kT) + f'(t)|_{t=kT} \cdot (t-kT) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)|_{t=kT} \cdot (t-kT)^n + \dots \quad (8-13)$$

由于采样后所得到的信息是各个采样时刻的瞬时值,当采样周期足够小时可用以下方式得到各阶导数的近似值

$$f'(kT) \approx \frac{f(kT) - f(kT-T)}{T} \quad (8-14)$$

$$f''(t)|_{t=kT} \approx \frac{f(kT) - 2f(kT-T) + f(kT-2T)}{T^2} \quad (8-15)$$

由此类推,计算  $n$  阶导数的近似值需已知  $n+1$  个采样时刻的瞬时值。若式(8-13)的右边只取前  $n+1$  项,便得到  $n$  阶保持器的数学表达式。工程上考虑到实时性的要求,通常只取常数项,于是零阶保持器(ZOH——zero order hold)的数学表达式为

$$f(t) = f(kT) \quad kT < t < (k+1)T \quad (8-16)$$

图8-8所示为信号的采样与保持过程,其中理想采样开关的输出为式(8-8),其拉氏变换为

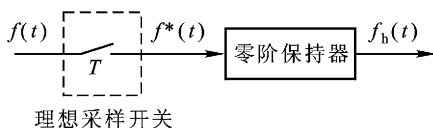


图8-8 信号的采样与保持过程

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad (8-17)$$

零阶保持器的输出为

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) [1(t-kT) - 1(t-kT-T)] \quad (8-18)$$

上式两边取拉氏变换,得

$$\begin{aligned} F_h(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \left[ \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] \\ &= \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) e^{-kTs} \end{aligned} \quad (8-19)$$

由上式可知零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (8-20)$$

用  $j\omega$  代替上式中的  $s$ ,便得到零阶保持器的频率特性

$$\begin{aligned} G_h(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-\frac{1}{2}j\omega T} \\ &= T \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-\pi\omega_s} \end{aligned} \quad (8-21)$$

其幅频特性为

$$|G_h(j\omega)| = T \cdot \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right| \quad (8-22)$$

相频特性为

$$\angle G_h(j\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \angle \sin(\pi\omega/\omega_s) \quad (8-23)$$

其中

$$\angle \sin(\pi\omega/\omega_s) = \begin{cases} 0 & 2n\omega_s < \omega < (2n+1)\omega_s \\ \pi & (2n+1)\omega_s < \omega < 2(n+1)\omega_s \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (8-24)$$

零阶保持器的频率特性曲线如图 8-9 所示,对比图 8-5 可知零阶保持器是一个低通滤波器,但不是理想的低通滤波器,它除了允许信号的主频谱分量通过外,还允许部分高频分量通过,因此由零阶保持器恢复的连续信号  $f_h(t)$  与被采样的连续信号  $f(t)$  不完全相同。零阶保持器是按阶梯形状恢复原来的连续信号,只要采样周期足够小  $f_h(t)$  与  $f(t)$  的差距就越小,加之零阶保持器的数学描述简单,易于实现,所以在实际中被广泛采用。

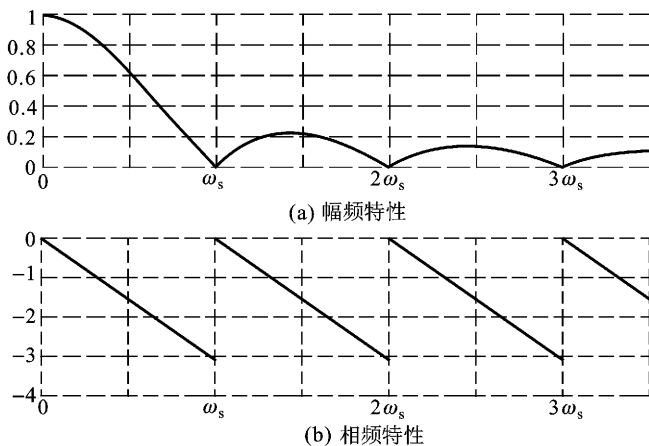


图 8-9 零阶保持器的频率特性曲线

### § 8-3 $z$ 变换与 $z$ 反变换

在前面各章中分析连续系统时,所用的主要数学工具之一是拉氏变换,而分析采样系统的主要数学工具之一是  $z$  变换。这两类分析方法有不同之处,又有一定的联系,  $z$  变换方法可以看作是拉氏变换的一种变形,因此许多结论都具有相类同的形式,在学习  $z$  变换时将两种方法作对比将是十分有益的。

## 一、z 变换

连续信号  $f(t)$  经采样后得到的脉冲序列为

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (8-25)$$

对上式进行拉氏变换, 得

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) e^{-kTs} \quad (8-26)$$

因在  $F^*(s)$  的表达式中含有因子  $e^{Ts}$ , 它不是  $s$  的有理函数, 故引入一个新的复变量

$$z = e^{Ts} \quad (8-27)$$

将式(8-27)代入式(8-26)可得  $z$  变换的定义式如下

$$F^*(s) \Big|_{s=(1/T)\ln z} = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} \quad (8-28)$$

称  $F(z)$  为  $f^*(t)$  的  $z$  变换, 记作  $\mathcal{Z}[f^*(t)] = F(z)$  或  $\mathcal{Z}[f(kT)] = F(z)$ , 将式(8-28)展开可得

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots \quad (8-29)$$

由此可看出  $F(z)$  是关于复变量  $z^{-1}$  的幂级数(或称罗伦级数), 其一般项  $f(kT)z^{-k}$  中复变量  $z^{-1}$  的幂次表示采样时刻, 而系数表示该采样时刻的瞬时值(或脉冲序列  $f^*(t)$  在  $kT$  时刻的脉冲强度), 并可将  $z^{-1}$  理解为单位延迟因子。

**例 8-1** 求单位脉冲信号的  $z$  变换。

**解** 设  $f(t) = \delta(t)$  则  $f^*(t) = f(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) = \delta(t)$ , 由于  $f^*(t)$  在  $t=0$  时刻的脉冲强度为 1, 其余时刻的脉冲强度均为零, 所以有

$$F(z) = 1 \cdot z^0 = 1$$

**例 8-2** 求单位阶跃信号的  $z$  变换。

**解** 设  $f(t) = 1(t)$  则

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} + \dots$$

该级数的收敛域为  $|z| > 1$ , 在该收敛域内上式可以写成如下闭合形式

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (|z| > 1)$$

**例 8-3** 求单位斜坡信号的  $z$  变换。

**解** 设  $f(t) = t (t > 0)$  则

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT \cdot z^{-k}$$

由例 8-2 可知

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

上式两边对  $z$  求导数, 并将和式与导数交换, 得

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-k) \cdot z^{-k-1} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

上式两边同乘  $(-Tz)$ , 使得单位斜坡信号的  $z$  变换为

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT \cdot z^{-k} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1)$$

**例 8-4** 求指数函数的  $z$  变换。

解 设  $f(t) = e^{-at}$ , 则

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-a2T}z^{-2} + \dots + e^{-akT}z^{-k} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (|z| > e^{-aT}) \end{aligned}$$

**例 8-5** 设  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , 求  $f^*(t)$  的  $z$  变换。

解 由  $F(s)$  求得

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

上式两边求拉氏反变换, 得

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad (t > 0)$$

再由例 8-2 和例 8-4 有

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

需要指出的是, 不能直接将  $s = \frac{1}{T} \ln z$  代入  $F(s)$  来求  $F(z)$ , 因为是针对采样信号  $f^*(t)$  进行  $z$  变换。

在表 8-1 中列出了常用函数的  $z$  变换。

## 二、 $z$ 变换的基本定理

下面介绍一些常用的  $z$  变换定理, 利用这些定理可以简化  $z$  变换的计算。

表 8-1  $z$  变换表

序号	$F(s)$	$f(t)$ 或 $f(k)$	$F(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$

3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$