

高等学校教材

# 自动控制原理

程 鹏 主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书列入北京市 2002 年高等教育精品教材计划。

书中全面系统地介绍了自动控制理论的基本内容和分析、研究方法,包括系统数学模型的建立,分析系统的时域法、根轨迹法和频率域方法,线性系统的校正设计;采样系统理论;非线性系统理论,包括相平面法和描述函数法;现代控制理论基础,包括状态方程、可控性与可观测性、极点配置和状态观测器、系统稳定性等问题;附录中有拉氏变换、矩阵相似对角化和约当标准形、MATLAB 应用的基础知识。每章均有适当的习题,书末给出了部分习题解答。

本书可作为高等学校电子信息科学类、仪器仪表类、电气信息类、自动控制类一些专业的教材,也可作为成人教育和继续教育的教材,还可以作为科技人员参考用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/程鹏主编. —北京:高等教育出版社,

2003.7

ISBN 7-04-011866-1

I. 自... II. 程... III. 自动控制理论-高等学校-教材 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 043836 号

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷

开 本 787×960 1/16

印 张 31.75

字 数 590 000

版 次 年 月第 1 版

印 次 年 月第 次印刷

定 价 39.20 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

## 前 言

目前,自动控制技术已广泛地应用于工、农业生产,交通运输和国防建设。指导自动控制系统分析和设计的控制理论也有了很大的发展,它的概念、方法和体系已经渗透到许多学科领域。在20世纪40和50年代中发展起来的经典控制理论至今仍被成功地应用于单变量定常系统的分析和设计。在20世纪50年代末、20世纪60年代初发展起来的状态空间方法具有更广泛的适用性,它可以用于多变量、定常或时变系统,所讨论的问题更复杂。为了适应高等工业院校本科生的需要,根据相应的教学大纲和学时安排,选取了经典控制理论和状态空间方法基础部分作为内容,编写本教材。本书可供电子信息科学类、仪器仪表类、电气信息类、自动控制类一些专业选用。

本教材在经典控制理论和状态空间方法这两部分内容的处理上,遵循“传统模式”,即将经典理论与现代控制理论分开编写,主要是考虑到传统模式已经证明行之有效,并且可以继续采用。另外,这两方面内容的数学基础不同,处理问题的思路不同,混编在一起有教学上的不便。为了弥补传统编写模式的不足,建议在讲现代控制理论时能有意识地多联系经典控制理论。

本书安排了九章内容。一至六章介绍经典线性理论,包括时域法、根轨迹法和频率域方法。第一章介绍自动控制的一般概念,首先从人工控制的过程引出自动控制系统应有的职能和部件,从而引出反馈系统的概念与组成特点,而不是通过大量实例的罗列而引出。然后举三个例子介绍开环控制、闭环控制、复合控制等概念。重点是反馈系统的原理、组成部件的阐述。动态过程和对系统的性能要求只介绍初步概念。

第二章介绍自动控制系统的数学模型,包括微分方程、传递函数和脉冲响应函数。强调了用线性常系数微分方程描述的系统特点:叠加原理、时不变性、物理实现性;讲梅森公式时,直接使用动态结构图,不引入信号流程图,从而使梅森公式与方框图融成一体。

第三章介绍时域分析法,包括一、二阶系统的分析与计算,系统稳定性分析(劳思判据、赫尔维茨判据)稳态误差分析、计算和一般规律。讲解稳态误差时,强调了拉氏变换终值定理的使用条件和系统稳定性要求的关系,在讲消去稳态误差的条件时,强调了内模原理与稳定性要求,使得数学的严谨性与物理概念一致。

第四章介绍根轨迹法,包括根轨迹方程与根轨迹的绘制法则,应用主导极点、偶极子等概念近似分析系统的性能,广义根轨迹等内容。在根轨迹绘制法则中,将分离角的求法总结为简单、便于使用的法则。分析系统的性能强调用主导极点、偶极子等概念,不罗列繁琐的近似估算公式。

第五章介绍频率域方法,包括频率特性及其图示方法、物理意义,奈奎斯特判据和对数判据。为了加强系统频带的概念介绍了连续信号的频谱。开、闭环频率特性与系统性能的关系,以定性分析的物理概念为主。

第六章介绍控制系统的校正设计,包括串联校正、反馈校正(超前校正、滞后校正、滞后-超前校正、PID调节器)、复合校正。串联校正主要讲定性分析的物理概念,串联校正的理论设计方法另节处理。反馈校正的讲法中汲取了最初反馈放大器的结果,也充分吸收了20世纪80年代多变量频率域的结果,使得与后续结果一致。复合控制一节中包含了多种形式的初偿方案。

第七章介绍非线性系统理论,包括相平面法和描述函数法。

第八章介绍采样系统理论,包括采样定理、 $z$ 变换、脉冲传递函数、系统分析等内容,稳定性判据主要介绍朱利判据,性能分析主要讲闭环极点位置与瞬态分量的对应关系,数字校正中讲最小拍控制。

第九章介绍了现代控制理论基础,包括状态方程、可控性与可观测性、极点配置和状态观测器、系统稳定性等问题。集中讲述单变量线性时不变系统,对所有定理都给出了符合学生基础的严格

证明,使论述严谨,加强了逻辑思维与抽象思维的训练。

书末有三个附录,分别为拉普拉斯变换、矩阵相似对角化和约当标准形、MATLAB 语言与自动控制系统设计。附录部分应根据不同专业学生的需要,在课程教学合适的时间安排一定学时讲解。为了教学的方便,每章均有适当的习题,书末附有主要练习题的简单答案。

本书在取材和阐述方式上,注意了工程性,将实验教学环节和计算机辅助设计融合一体,贯穿全书。在内容上贯彻了删繁就简的原则,避免过分地引申和扩充。在叙述问题时,力求概念明确、层次分明和遵循教学顺序。在例题和习题的编排上考虑了不同专业的背景,以供不同专业的教学选用。由于前六章与第七章、第八章、第九章的内容有相对独立性,删除一些章节后可供其他非控制类专业或成人教育和继续教育选用。

本教材由程鹏主编,参加编写的有:祁慧珍(第一、五章)、于凤仙(第二、四章、附录 I)、赵平(第三章)、王艳东(第四章、附录 III)、邱红专(第八章)、程鹏(第六、七、九章、附录 II),全书习题由邱红专提供了答案。由于本书是在北京航空航天大学内部使用教材的基础上修订的,十余年来曾经多次修改,除了前述同仁外,沈程智、汪声远和王纪文等都曾经参加过本书的筹划和提供过初稿,李昌隆为本书提供了图稿。

本教材在编写过程中参考了许多院校专家们编写的教科书和习题集,在此表示感谢。

北京航空航天大学

程 鹏

2002 年 12 月

# 目 录

第一章 自动控制的一般概念 .....	1
§ 1-1 自动控制的任務 .....	1
§ 1-2 自动控制的基本方式 .....	2
§ 1-3 对控制系统的性能要求 .....	11
习题 .....	13
第二章 自动控制系统的数学模型 .....	15
§ 2-1 控制系统微分方程的建立 .....	16
§ 2-2 非线性微分方程的线性化 .....	21
§ 2-3 传递函数 .....	24
§ 2-4 动态结构图 .....	34
§ 2-5 系统的脉冲响应函数 .....	52
§ 2-6 典型反馈系统的几种传递函数 .....	54
习题 .....	57
第三章 时域分析法 .....	63
§ 3-1 时域分析基础 .....	63
§ 3-2 一、二阶系统分析与计算 .....	68
§ 3-3 系统稳定性分析 .....	86
§ 3-4 稳态误差分析及计算 .....	98
习题 .....	111
第四章 根轨迹法 .....	117
§ 4-1 根轨迹与根轨迹方程 .....	117
§ 4-2 绘制根轨迹的基本法则 .....	124
§ 4-3 广义根轨迹 .....	145
§ 4-4 系统闭环零、极点分布与阶跃响应的关系 .....	153
§ 4-5 系统阶跃响应的根轨迹分析 .....	160
习题 .....	165
第五章 频率域方法 .....	169
§ 5-1 频率特性 .....	169
§ 5-2 典型环节的频率特性 .....	174
§ 5-3 系统的开环频率特性 .....	190
§ 5-4 频率稳定判据 .....	200
§ 5-5 系统闭环频率特性与阶跃响应的关系 .....	212
§ 5-6 开环频率特性与系统阶跃响应的关系 .....	222
习题 .....	226
第六章 控制系统的校正 .....	234
§ 6-1 系统校正设计基础 .....	234
§ 6-2 串联校正 .....	238

§ 6-3 串联校正的理论设计方法 .....	244
§ 6-4 反馈校正 .....	252
§ 6-5 复合校正 .....	257
习题 .....	263
<b>第七章 非线性系统分析</b> .....	<b>269</b>
§ 7-1 非线性问题概述 .....	269
§ 7-2 常见非线性因素对系统运动特性的影响 .....	274
§ 7-3 相平面法基础 .....	282
§ 7-4 非线性系统的相轨迹分析 .....	294
§ 7-5 描述函数 .....	306
§ 7-6 用描述函数法分析非线性系统 .....	314
习题 .....	328
<b>第八章 采样系统理论</b> .....	<b>332</b>
§ 8-1 采样过程与采样定理 .....	334
§ 8-2 信号的恢复与零阶保持器 .....	337
§ 8-3 $z$ 变换与 $z$ 反变换 .....	339
§ 8-4 脉冲传递函数 .....	349
§ 8-5 采样系统的性能分析 .....	355
§ 8-6 采样系统的数字校正 .....	362
习题 .....	365
<b>第九章 状态空间分析方法</b> .....	<b>369</b>
§ 9-1 状态空间方法基础 .....	369
§ 9-2 线性系统的可控性和可观性 .....	388
§ 9-3 状态反馈与状态观测器 .....	416
§ 9-4 有界输入、有界输出稳定性 .....	427
§ 9-5 李雅普诺夫第二方法 .....	429
习题 .....	432
<b>附录 I 拉普拉斯变换</b> .....	<b>437</b>
<b>附录 II 矩阵相似对角化和约当标准形</b> .....	<b>452</b>
<b>附录 III MATLAB 语言与自动控制系统设计</b> .....	<b>457</b>
部分习题解答 .....	484
参考文献 .....	495

## 第五章 频率域方法

频率法所研究的问题,仍然是自动控制系统控制过程的性能,即稳定性、快速性、稳态精度,研究系统的控制性能最好是用时域特性进行度量,但对于高阶系统的时域特性很难用分析法确定,目前还没有直接按给出的时域指标,进行系统设计的通用方法。而频率法是一种间接的研究控制系统性能的工程方法。它研究系统的依据——频率特性,所以,频率特性是控制系统的又一种数学模型。由于频率特性具有明确的物理意义,因此,频率法可以通过实验方法进行研究,这正是频率法的优点,因为它提供了一个用实验确定元部件或系统数学模型的方法。频率法不仅适用于线性定常系统的分析研究,而且可推广应用到某些非线性系统。所以,频率法在工程上得到了广泛的应用。

本章将介绍频率特性的定义及几何表示方法、典型环节的频率特性、系统开环频率特性、频率稳定判据、开、闭环系统的频率特性与系统阶跃响应的关系。

### § 5-1 频率特性

#### 一、控制系统在正弦信号作用下的稳态输出

对于  $n$  阶线性定常系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{s^n + \dots + a_n} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{(s - s_1) \dots (s - s_n)} \quad (5-1)$$

式中  $s_1, \dots, s_n$  为闭环  $n$  个互异特征根。

设输入信号  $r(t) = A_r \sin \omega t$

$A_r$ ——正弦输入振幅;

$\omega$ ——正弦输入频率。

其拉氏变换式

$$R(s) = \frac{A_r \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5-2)$$

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{(s - s_1) \dots (s - s_n)} \cdot \frac{A_r \omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{C_1}{s - s_1} + \dots + \frac{C_n}{s - s_n} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - j\omega} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - s_i} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - j\omega} \quad (5-3)$$

式中  $C_i$  和  $B, D$  均为待定系数。

将(5-3)式进行拉氏反变换,得系统的输出响应

$$c(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} + (B e^{-j\omega t} + D e^{j\omega t}) = c_c(t) + c_s(t) \quad (5-4)$$

式(5-4)中的第一项  $c_c(t)$  为系统的瞬态分量,若系统是稳定的,其特征根  $s_i$  均具有负实部,此项随着时间  $t$  趋于无穷而最后趋于零,式中第二项  $c_s(t)$  为系统的稳态分量。这正是需要求解的部分,下面对这部分进行推导。

$$c_s(t) = B e^{-j\omega t} + D e^{j\omega t} \quad (5-5)$$

$$\begin{aligned} B &= \Phi(s) \frac{A_r \omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = \Phi(s) \frac{A_r \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} \\ &= \Phi(-j\omega) \frac{A_r}{-2j} = |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)} A_r \frac{1}{-2j} \\ &= \frac{|\Phi(j\omega)|}{2} A_r e^{-[ \angle\Phi(j\omega) - \pi/2 ]} \end{aligned}$$

同理可得

$$D = \frac{|\Phi(j\omega)|}{2} A_r e^{[ \angle\Phi(j\omega) - \pi/2 ]}$$

将  $B, D$  代入式(5-5)则

$$\begin{aligned} c_s(t) &= \frac{|\Phi(j\omega)|}{2} A_r ( e^{-j(\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2})} + e^{j(\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2})} ) \\ &= |\Phi(j\omega)| A_r \cos\left(\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |\Phi(j\omega)| A_r \sin(\omega t + \angle\Phi(j\omega)) \\ &= A_c \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (5-6)$$

式中  $A_c = |\Phi(j\omega)| A_r$  —— 稳态输出的振幅;

$\varphi = \angle\Phi(j\omega)$  —— 稳态输出的相位。

从式(5-6)看出,线性定常系统,在正弦信号作用下,输出的稳态分量是和输入同频率的正弦信号。只是稳态输出的振幅和相位与输入不同。其输出振幅是输入振幅的  $|\Phi(j\omega)|$  倍。输出相位与输入相位差  $\angle\Phi(j\omega)$  度。

## 二、频率特性的定义

线性定常系统,在正弦信号作用下,稳态输出的振幅与输入振幅之比,称幅频特性。用  $A(\omega)$  表示。稳态输出的相位与输入相位之差,称相频特性,用  $\varphi(\omega)$  表示。即

$$A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = \frac{|\Phi(j\omega)|A_r}{A_r} = |\Phi(j\omega)| \quad (5-7)$$

$$\varphi(\omega) = [\omega t + \angle \Phi(j\omega)] - \omega t = \angle \Phi(j\omega) \quad (5-8)$$

幅频  $A(\omega)$  与相频  $\varphi(\omega)$  统称幅相频率特性。即

$$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = |\Phi(j\omega)|e^{j\angle \Phi(j\omega)} = \Phi(j\omega) \quad (5-9)$$

如果将输入、输出的正弦函数用电路理论中的符号法表示, 即输入为  $A_r e^{j\omega t}$ , 输出为  $A_c e^{j\varphi}$ , 则输出与输入的复数之比为

$$\frac{A_c e^{j\varphi}}{A_r e^{j\omega t}} = \frac{A_c}{A_r} e^{j\varphi} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = |\Phi(j\omega)| e^{j\angle \Phi(j\omega)}$$

所以, 频率特性可定义为:

线性定常系统, 在正弦信号作用下, 输出的稳态分量与输入的复数比。称为系统的频率特性 (即为幅相频率特性, 简称幅相特性)。

不难证明, 频率特性与传递函数之间有着确切的简单关系。即

$$\Phi(s)|_{s=j\omega} = \Phi(j\omega) = |\Phi(j\omega)| e^{j\angle \Phi(j\omega)}$$

将传递函数中的复变量  $s$  用  $j\omega$  代换后, 即可得到频率特性表达式。

下面以  $RC$  网络为例求频率特性,  $RC$  网络如图 5-1 所示。

其传递函数

$$\alpha(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-10)$$

式中  $T = RC$

将式(5-10)中的  $s$  用  $j\omega$  代换, 得频率特性

$$\alpha(s)|_{s=j\omega} = \alpha(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} \quad (5-11)$$

幅频特性

$$A(\omega) = |\alpha(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \quad (5-12)$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \angle \alpha(j\omega) = -\arctan T\omega \quad (5-13)$$

从上式看出, 幅频与相频特性都是输入正弦频率  $\omega$  的函数。

关于频率特性的几点说明:

① 频率特性不只是对系统而言, 其概念对控制元件、部件、控制装置均适用。

② 频率特性只适用于线性定常模型, 否则不能用拉氏变换求解, 也不存在这种稳态对应关系。

③ 前面在推导频率特性时, 是在假定线性微分方程稳定的条件下导出的。

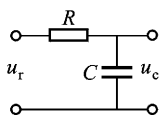


图 5-1  $RC$  网络图

如果不稳定,则动态过程  $c(t)$  最终不可能趋于稳态振荡  $c_s(t)$ ,当然也就无法由实际系统直接观察到这种稳态响应。但从理论上推导动态过程时它的稳态分量总是可以分离出来的,而且其规律性并不依赖于系统的稳定性。因此可以扩展频率特性的概念,将频率特性定义为:在正弦输入下,线性定常模型输出的稳态分量与输入的复数比。以  $\Phi(j\omega)$  或  $\alpha(j\omega)$  表示。

④ 由频率特性的表达式  $\Phi(j\omega)$  或  $\alpha(j\omega)$  可知,其包含了系统或元件的全部结构和参数。故尽管频率特性是一种稳态响应,而动态过程的规律性必将寓于其中。所以频率法就是运用稳态的频率特性间接研究系统的动态响应,从而避免了直接求解高阶微分方程的困难。

频率特性与微分方程和传递函数一样,也是系统或元件的动态数学模型。

### 三、频率特性的几何表示方法

在工程分析和设计中,通常把频率特性画成一些曲线,通过这些曲线对系统进行研究,常用的一些曲线有:幅频特性曲线、相频特性曲线、幅相特性曲线、对数频率特性曲线。下面以  $RC$  网络为例来画这组曲线。

#### 1. 幅频特性、相频特性、幅相特性

由式(5-11)可知  $RC$  网络的频率特性

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} e^{-j\arctan T\omega}$$

$RC$  网络的幅频、相频随输入正弦频率  $\omega$  变化的数据见表 5-1 所示。

表 5-1 幅频特性和相频特性数据

$\omega$	0	$\frac{1}{2T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{3}{T}$	$\frac{4}{T}$	$\frac{5}{T}$	$\infty$
$1/\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$	1	0.89	0.707	0.45	0.32	0.24	0.2	0
$-\arctan T\omega(^{\circ})$	0	-26.6	-45	-63.5	-71.5	-76	-78.7	-90

#### (1) 幅频特性

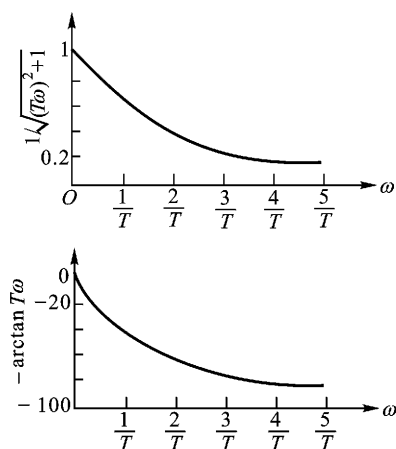
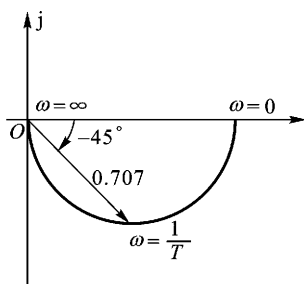
以频率  $\omega$  为横坐标,以幅频  $A(\omega)$  为纵坐标,画出  $A(\omega)$  随频率  $\omega$  变化的曲线,称为幅频特性曲线。按表 5-1 的数据画出  $RC$  网络的幅频特性曲线如图 5-2 所示。

#### (2) 相频特性

以频率  $\omega$  为横坐标,以相频  $\varphi(\omega)$  为纵坐标,画出  $\varphi(\omega)$  随频率  $\omega$  变化的曲线,称为相频特性曲线。按表 5-1 的数据,画出  $RC$  网络的相频特性曲线如图 5-2 所示。

#### (3) 幅相特性

幅相特性曲线是将频率  $\omega$  作为参变量,将幅频与相频特性同时表示在复数平面上。图上实轴正方向为相角的零度线,逆时针方向转过的角度为正角度,顺时针方向转过的角度为负角度。对于一个确定的频率,必有一个幅频的幅值和一个相频的相角与之对应,例如表 5-1 中在  $\omega = \frac{1}{T}$  时  $A(\omega) = 0.707$ 、 $\varphi(\omega) = -45^\circ$ 。根据  $A(\omega)$  与  $\varphi(\omega)$  的值,在复数平面上画出一个向量。当频率  $\omega$  由零变到无穷大时,可在复数平面上画出一组向量,将这一组向量的矢端连成一条曲线,即为幅相特性曲线,又称乃奎斯特曲线。 $RC$  网络的幅相特性曲线如图 5-3 所示。

图 5-2  $RC$  网络的幅频特性与相频特性图 5-3  $RC$  网络的幅相特性曲线

## 2. 对数频率特性

为了较方便的绘制频率特性曲线,常将幅频与相频特性画在对数坐标上,这种几何表示方法应用十分广泛。

对数频率特性曲线又称伯德(Bode)图,它包括对数幅频与对数相频两条曲线。

### (1) 对数幅频特性

对数幅频特性的纵坐标,是以幅频  $A(\omega)$  取对数(以 10 为底)后再乘以 20,即  $20\lg A(\omega)$ ,用  $L(\omega)$  表示,单位为分贝(用 dB)表示。即

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) \text{ dB}$$

横坐标按  $\lg \omega$  刻度,但标注的数字是真数  $\omega$ ,由于是按以 10 为底的对数刻度,因此,频率每变化十倍,横坐标轴上就变化一个单位长度,称为“十倍频程”。对数刻度是不均匀的刻度。

## (2) 对数相频特性

对数相频特性的纵坐标表示相频特性  $\varphi(\omega)$  值, 是线性刻度, 单位是“度”。横坐标是以  $\lg \omega$  刻度, 标注的仍然是真数  $\omega$ 。与对数幅频特性的横坐标相同。

图 5-4 为对数坐标刻度图。

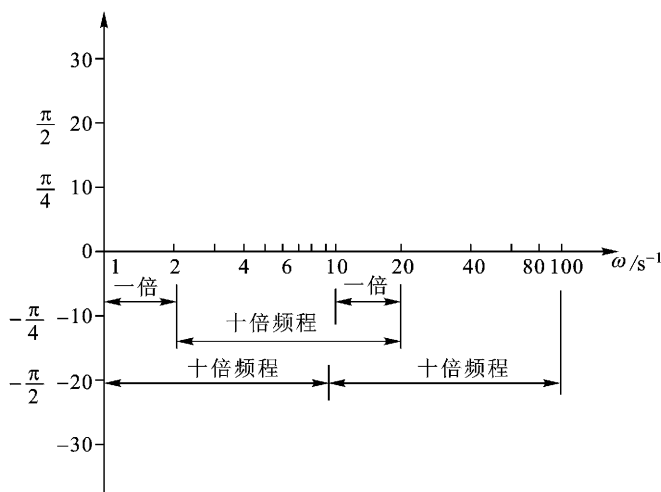


图 5-4 对数坐标刻度图

## § 5-2 典型环节的频率特性

用频率法研究控制系统的稳定性和动态响应时, 是根据系统的开环频率特性进行的, 而控制系统的开环频率特性通常是由各典型环节的频率特性组成, 掌握好各典型环节的频率特性, 能很方便的绘制出系统的开环频率特性。

下面将逐个介绍常见典型环节的频率特性。

### 一、比例环节(放大环节)

其传递函数

$$G(s) = K \quad (5-14)$$

故幅相特性

$$G(j\omega) = K = Ke^{j0} \quad (5-15)$$

### (1) 幅频特性

$$A(\omega) = K$$

## (2) 相频特性

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

## (3) 对数幅频特性

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K$$

诸特性曲线如图 5-5 所示。

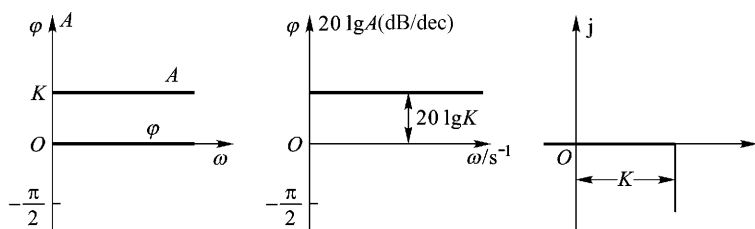


图 5-5 比例环节的频率特性曲线

## 二、积分环节

其传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (5-16)$$

故频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (5-17)$$

## 1. 幅频特性、相频特性、幅相特性

## (1) 幅频特性

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad (5-18)$$

## (2) 相频特性

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (5-19)$$

## (3) 幅相特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}$$

幅频、相频、幅相特性曲线如图 5-6 所示。

积分环节的幅频特性为双曲线,随  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时,  $A(0)$  由无穷大逐渐衰减为零。

相频特性与频率  $\omega$  无关。是一常值,等于  $-\frac{\pi}{2}$ 。

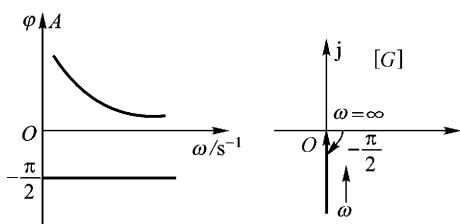


图 5-6 积分环节的幅频、相频、幅相特性曲线

幅相特性是与负虚轴相重合的一条直线。

## 2. 对数频率特性

### (1) 对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega \quad (5-20)$$

当  $\omega = 0.1$  时  $L(\omega) = 20 \text{ dB}$

$\omega = 1$  时  $L(\omega) = 0 \text{ dB}$

$\omega = 10$  时  $L(\omega) = -20 \text{ dB}$

所以 积分环节的对数幅频特性是一条通过横坐标轴  $\omega = 1$  处的斜率为  $-20 \text{ dB/}$ 十倍频程的直线。

### (2) 对数相频特性

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

积分环节的对数幅频与对数相频特性如图 5-7 所示。

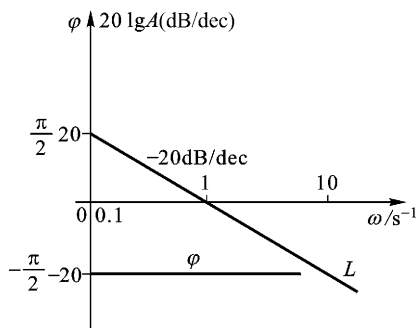


图 5-7 积分环节的对数频率特性曲线

## 三、惯性环节(一阶系统)

其传递函数

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-21)$$

频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} \quad (5-22)$$

## 1. 幅频特性、相频特性、幅相特性

## (1) 幅频特性

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \quad (5-23)$$

## (2) 相频特性

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan T\omega \quad (5-24)$$

## (3) 幅相特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} e^{-j\arctan T\omega} \quad (5-25)$$

给  $\omega$  (由  $0 \rightarrow \infty$ ) 一系列数据, 可得相应的幅频特性、相频特性、幅相特性曲线, 如图 5-8 所示。

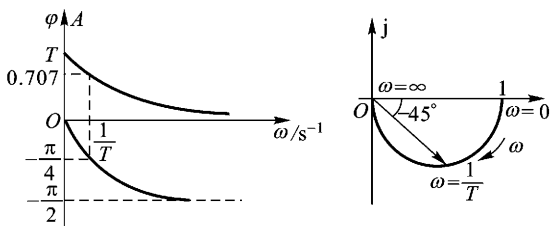


图 5-8 惯性环节的幅频、相频、幅相特性曲线

由图看出, 当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  变化时, 幅频  $A(\omega)$  由 1 逐渐衰减到零, 没有谐振峰值。相频  $\varphi(\omega)$  由  $0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 。幅相特性是一个半圆, 圆心在实轴的 0.5 处, 半径为 0.5, 这种几何关系可用数学方法证明。

当  $\omega = \frac{1}{T}$  时

惯性环节的幅频  $A(\omega) = 0.707$

$$\text{相频 } \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4} \quad (5-26)$$

这是一个特征点。

如果实验直接测得  $A(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$  曲线, 并根据其变化趋势判断是惯性环节, 则利用特征点可以换算出参数  $T$ 。

惯性环节的时间常数  $T$  越大, 动态过程的快速性越差。反映在幅频特性上, 即  $A(\omega)$  随外加信号的角频率  $\omega$  的增加很快衰减。所以  $A(\omega)$  衰减的快慢是衡量环节动态响应快速性的重要标志。

## 2. 对数频率特性

惯性环节的对数幅频特性

由式(5-23)可知, 幅频

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$$

其对数幅频与相频

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} = -20\lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \quad (5-27)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan T\omega \quad (5-28)$$

给不同的  $\omega$  值, 可逐点求得对数幅频的分贝值和相角  $\varphi(\omega)$  值, 根据  $L(\omega)$  及  $\varphi(\omega)$  绘制的对数幅频与相频曲线如图 5-9 所示。

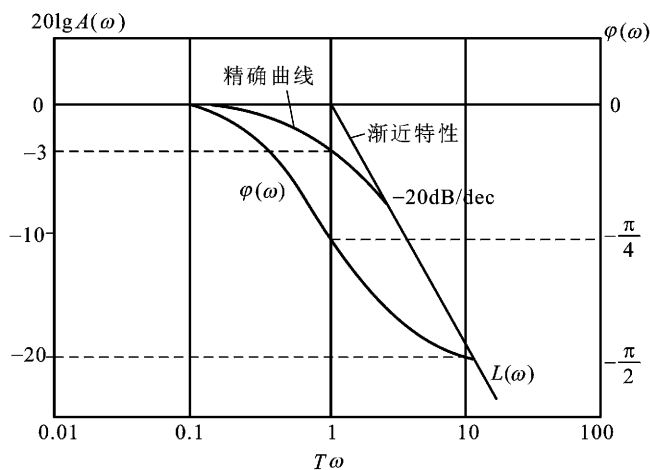


图 5-9 惯性环节的对数频率特性曲线

由图 5-9 可看出, 惯性环节的对数幅频特性  $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$  是一条曲线, 这给作图带来很大的不便, 在工程实践中, 常常将对数幅频特性用两条直线来代替, 由这两条直线组成的对数幅频特性称为渐近特性。下面介绍惯性环节

的对数幅频渐近特性的求法。

由式(5-27)可知,惯性环节的对数幅频表达式

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

当  $T\omega \ll 1$ , 即  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,可略去根号中的“ $T^2\omega^2$ ”项。得

$$L(\omega) \approx -20\lg 1 = 0 \text{ dB} \quad (5-29)$$

这是一条与横坐标轴重合的直线,称低频渐近特性。

当  $T\omega \gg 1$ , 即  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,可略去根号中的“1”,得

$$L(\omega) \approx -20\lg T\omega \quad (5-30)$$

这是一个直线方程

$$\text{取 } \omega = \frac{1}{T} \text{ 时, } L(\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\omega = \frac{10}{T} \text{ 时, } L(\omega) = -20 \text{ dB}$$

$$\omega = \frac{10^2}{T} \text{ 时, } L(\omega) = -40 \text{ dB}$$

$$\omega = \frac{10^n}{T} \text{ 时, } L(\omega) = n(-20) \text{ dB}$$

频率  $\omega$  每增加 10 倍,对数幅值下降 20 dB,故  $-20\lg T\omega$  是一条斜率为  $[-20 \text{ dB/dec}]$  的直线。此直线称为高频渐近特性。

惯性环节的对数幅频特性,就用这两条渐近特性来代替。在  $0 < \omega < \frac{1}{T}$  的低频范围内  $L(\omega)$  是一条 0 dB 线。在  $\frac{1}{T} < \omega < \infty$  的高频范围内  $L(\omega)$  是一条斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$  的直线。这两条渐近特性相交于  $\omega = \frac{1}{T}$  处。故称  $\omega = \frac{1}{T}$  为转折频率(或交接频率)。惯性环节的对数幅频渐近特性如图 5-9 所示。

用渐近特性来代替精确曲线,给作图带来了很大的方便。渐近特性的最大误差发生在转折频率  $\omega = \frac{1}{T}$  处。误差值为 3 dB

绘制对数相频特性曲线一般比绘制对数幅频特性复杂,但注意到相频特性的特点将有利于画出它的大致形状。惯性环节的对数相频特性随  $\omega$  增加,相位由零度变化到负  $90^\circ$ 。在转折频率  $\omega = 1/T$  处,相位为  $-45^\circ$ 。且曲线对  $-\pi/4$  点具有奇对称性质。当改变时间常数  $T$  时,转折频率便向左或向右移动,但对数相频特性曲线的形状保持不变。

表 5-2 给出了相频特性的数据,图 5-10 表示了时间常数不同时,对数相