

第 一 篇

工程材料流变问题的
解析方法和室内试验

第 1 章 绪论——国内外文献综述与评价

§ 1.1 概述——材料流变的定义和研究工作的重要性

“流变 (rheology) 一词来源于古希腊哲学家 Heractitus 所说的“ $\pi\alpha\gamma\tau\alpha\rho\epsilon\gamma$ ”, 意即万物皆流。原则上讲, 所有实际物体都具有流变特性。山, 经历长久的地质年代可发生流动, 只是时间太长, 不为普通人所注意; 土的流变现象则到处可见: 建筑物的长期沉降, 坑道开挖引起的地表面向临空面的位移以致边坡失稳以及隧道开挖引起的地面沉降等等, 所有这些流变过程都在很短时间内即为人们所发现、所认识, 比如几天、几年、或者几十年。

1922 年 Bingham《流动和塑性》名著的出版, 以及根据他的倡议, 1928 年流变协会的成立, 标志着流变学成为一门独立的学科。如今流变学正广泛应用于化学工业、航天航空技术、建筑材料等许多方面。它的基本课题是研究应力-应变状态的规律及其随时间的变化, 并根据所建立的本构规律去解决工程实际中遇到的与流变有关的问题。

土是一种三相体系的介质, 它由土颗粒作为基本骨架, 水和气体充填其中。其中水与土颗粒之间由于物理化学作用, 形成了强结合水和弱结合水。对于这样一种介质, 其粘滞性已是一致公认的基本特性, 因而, 应力、应变、时间的关系不是简单的函数关系。变形不仅取决于加荷时刻的作用力, 而且与加载以前的历史有关。

流变学概念所涉及的范围很广, 土的流变学研究一般包括以下几个方面的内容:

1. 蠕变: 在常应力作用下, 变形随时间发展的过程。
2. 应力松弛: 在恒应变水平下, 应力随时间衰减的过程。
3. 长期强度: 强度随时间的降低 (亦有学者认为强度随时间增加)。

4. 弹性后效和滞后效应: 加荷时继瞬时的弹性变形产生之后, 仍有部分变形随时间增长而产生, 因为这部分变形属于可恢复的, 且在恢复时亦需要一定的时间, 因此, 这部分变形仍属于弹性变形范畴。对于这种现象, 加荷过程中变形随时间的增长称为滞后效应, 卸荷后变形随时间的逐渐恢复称为弹性后效。

土的流变学的研究是从第Ⅲ届国际土力学和基础工程会议(1953)开始的, 会上有许多关于此问题的论文和发言。在关于土、雪和冰的蠕变问题综合性报告中指出, 蠕变研究的成就将影响土力学将来的发展, 因为蠕变变形直接或间接地对土力学的所有过程起作用。在以后的第Ⅳ~Ⅺ届会议(1957, 1961, 1965, 1969, 1973, 1977, 1981, 1985, 1989)上, 有关土的流变的论文数量越来越多, 研究的侧重点主要有以下三个方面:

1. 本构模型的建立: 探讨用什么样的本构方程去描述土的应力、应变及时间之间的关系, 既要使得本构方程能够准确反映土的流变特性, 又要考虑到实际工程应用的可行性;
2. 本构方程的解析: 包括方程的解析解和数值解。在解析解方面, 给人印象最深的是日本学者 Sakurai; 数值解主要是有限元法。此外, 还有边界元法、无限元法以及它们的耦

合,有限差分法等。

3. 工程问题的应用 选用适当的本构模型和解析方法,解决工程中涌现的各种问题,如建筑物的变形和长期沉降,边坡和护岸工程的变形,坑道和隧道的变形等等。

土的流变学研究的方法也不外乎以下两个方面:

1. 从土体的微细观角度出发,认为土的流变特性是因土粒子骨架的微细观变化引起的,以土体的微细观构造的变化和机理来推导出整体的流变特性。自本世纪 20 年代,太沙基、普什、波迪斯、陈宗基、马斯特等人对自然状态的粘土提出过很多微结构模型和新概念。70 年代末期,随着高倍扫描电子显微镜在地质领域的广泛应用,产生了受荷载作用下制备土土颗粒结构在空间重排列的研究,这种方法对查明流变方程式中各参数的物理意义有特别的说服力,但由于目前研究手段、设备的成熟和不完善,这种方法至今大都只能对土体流变特性作一定性的描述,定量的描述成果极为少见或者成果缺少重现性;

2. 从土体的宏观角度出发,假设土体为一均匀连续体,通过数学、力学的推导及解析,综合各条件下所表现的流变现象,以此得出流变方程式。这种方法运用弹塑性理论、粘弹塑性理论等已系统化的理论和为人们所认同的实验结果,得出土体新的流变理论,相继提出了老化理论、遗传理论和内时变量理论。不足的是对土体流变机理方面的认识尚不充分;

因此,进行土体的流变特性的研究,必须综合以上两种研究方法,将微观与宏观相结合,理性与物性相结合,探讨土体内部的微观、细观结构与宏观流变特性的内在联系及相关规律,从机理上进一步深化认识软土流变的发生和发展条件。

在此背景下,本文对原状粘土进行了较多的室内流变试验,以判别软粘土流变模型及求解模型参数。同时,在微观方面还进行了蠕变过程中软粘土结构动态变化的探讨,并提出蠕变破坏的机制模型。

§ 1.2 流变理论概要

1.2.1 模型理论

把土的流变特性看成是弹性、粘滞性和塑性的联合作用的结果。物体的弹性用弹性元件即弹簧来模拟,弹簧符合虎克定律即 $\tau = G\gamma$,用符号[H]表示。物体的粘滞性用粘壶模型来模拟,粘壶模型符合理想的牛顿体的运动规律即 $\tau = \eta\dot{\gamma}$,用符号[N]表示。物体的塑性用摩擦元件来模拟,摩擦元件服从圣维南定律, $\tau = \tau_c$ (其中 $\tau_c = \tau_s$,当应力未超过 τ_s 之前,则不产生变形),用符号[V]表示。

上述元件可以分别以串联(用“—”表示)和并联(用“|”表示)两种方式连接。可见,以上三种元件可以有多种不同的组合,各种组合描述某一稳定土的粘弹塑性的各种表现。

模型理论的概念直观、简单,同时又能全面反映流变介质的各种流变特性,蠕变、应力松弛、弹性后效以及滞后效应。上述[H]元件和[N]元件的各种组合,描述的是土的线性粘弹性特性;当我们考虑[H]元件的非线性应力应变关系或者[N]元件的非牛顿体的特性时,[N]和[H]的组合可以描述土的非线性粘弹性特性。因此,模型理论获得了广泛的应用。

1.2.2 遗传流变理论

按照 Boltzmann 叠加原理有:过去某时刻加上的荷载到任一时刻 t 引起的变形等于各个互不相干的荷载到时刻 t 引起的变形总和。换句话说,在某时刻的变形不仅与这个时刻

的应力值有关,而且与变形的历史有关,仿佛继承了过去的应力影响,由此产生了遗传理论(有人也称之为记忆理论)。

对于任意的应力加载历程,流变状态方程为:

$$\epsilon(t) = [\alpha(t) + \int_0^t K(t-\tau)\alpha(\tau)d\tau] / E \quad (1.2-1)$$

其中: $K(t-\tau) = EJ(t-\tau)$

$K(t-\tau)$ ——蠕变核,反映材料的蠕变性能。

流变状态方程也可以写成:

$$\alpha(t) = E[\epsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\epsilon(\tau)d\tau] \quad (1.2-2)$$

$R(t-\tau)$ ——松弛核,反映材料的松弛性能。

方程(1.2-1)的核 $K(t-\tau)$ 和方程(1.2-2)的核 $R(t-\tau)$ 是两个变量 t 和 τ 的函数。此时,函数 $R(t-\tau)$ 是 $K(t-\tau)$ 函数的逆解核;反之,函数 $K(t-\tau)$ 是函数 $R(t-\tau)$ 的逆解。

根据方程(1.2-1)和(1.2-2)中的任意一个,即可确定蠕变方程和松弛方程。

当考虑应力和变形的非线性关系时, σ 和 ϵ 的关系则不是变形和应力本身,而是变形和应力的函数 $\varphi(\epsilon)$ 或 $f(\sigma)$ 。

1.2.3 老化理论

老化理论表述的流变状态方程是以变形、应力和时间之间关系的形式表示的,即:

$$\epsilon = f(\sigma, t) \quad (1.2-3)$$

把总的变形看成是弹性变形和蠕变变形的总和,即可将上式表达为:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^c = \sigma/E + f(\sigma)\Phi(t) \quad (1.2-4)$$

也可得到松弛方程:

$$\sigma = \sigma_0 - E f(\sigma)\Phi'(t) \quad (1.2-5)$$

其中 $\sigma_0 = E\epsilon_0 = \text{常数}$ 。

老化理论所确定的变形、时间和荷载的关系,既反映了蠕变过程,又反映了松弛过程。将状态方程(1.2-3)写成 $F(\sigma, \epsilon, t) = 0$ 表达式并绘成三维曲面 (σ, ϵ, t) 的形式,这个曲面在平面 $\sigma-\epsilon$, $\epsilon-t$, $\sigma-t$ 上的截迹的投影为相应的等时曲线、蠕变曲线和松弛曲线。

以下是老化理论表述的状态方程的一具体表达式

$$\epsilon = A(t)\sigma^m \quad (1.2-6)$$

其中, $A(t)$ 是变形系数,可以取多种形式的表达式。

老化理论的名称来源,主要是由于 $\Phi(t)$ 函数表征了变形的增长随时间而减缓,从本质上反映了材料特性随时间的变化即“老化”。材料的这种特性以及反映在理论上的名称,不应和固体物理学中的老化现象相混淆。老化理论适用于荷载是恒载或是缓慢和单调增长的情况。

1.2.4 流动理论

流动理论的状态方程是以变形速率、应力和时间之间的关系式来描述的,即:

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma, t) \quad (1.2-7)$$

总的变形速率是由弹性变形速率和蠕变变形速率叠加而成,即

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^c \quad (1.2-8)$$

取 $\dot{\epsilon}^c = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$ 和 $\dot{\epsilon}^c = f(\sigma) \chi(t)$ 得：

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma) \chi(t) + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \tag{1.2-9}$$

在衰减蠕变时, $\chi(\infty) = 0$;非衰减蠕变时, $\chi(\infty) = \infty$;有固定速率的稳定流动时, $\chi(\infty) = x_\infty = \text{常数}$ 。

蠕变方程通过对方程 (1.2-7) 积分求得,而松弛方程则通过在 $\epsilon = \epsilon_0 = \text{常数}$ 时,对方程 (1.2-7) 求解得 $\alpha(t)$ 的表达式。流动理论既描述蠕变过程,又描述松弛过程。在坐标 $\sigma - \dot{\epsilon} - t$ 中,状态方程 (1.2-7) 可以写成 $F(\sigma, \dot{\epsilon}, t) = 0$ 的形式,并绘制成三维曲面形式,这些曲面在 $\sigma - \dot{\epsilon} - t$ 坐标面上截迹的投影反映了不同 $\sigma = \text{常数}$ 下的“应力-应变速率”曲线(流变曲线),不同 t 时刻的变形速率变化曲线和松弛曲线。

以下是流动理论状态方程的一具体表达式：

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{A_0} \right)^{1/m} \chi(t) + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \tag{1.2-10}$$

松弛方程写成：

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + \frac{1-m}{m} E \frac{\sigma_0^{m/(m-1)}}{A_0^{1/m}} \Phi(t) \right]^{-m/(1-m)} \tag{1.2-11}$$

式中 $\Phi(t) = \int_0^t \chi(t) dt$

“流动理论”这一名称是根据这个理论的方程与粘滞流动的方程相似而得到,不应把这个理论的名称与塑性力学中有关的名称混淆。流动理论有时又称为第二老化理论,当起始时刻变化时,流变理论的状态方程亦相应变化。一般建议在荷载平稳变化的条件下采用该方程。

1.2.5 硬化理论

硬化理论的状态方程是以变形速率、应力和变形本身之间的关系式来描述的,即：

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma, \epsilon) \tag{1.2-12}$$

比如,蠕变变形速率,应力和应变本身的关系用下式表示：

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma) \varphi(\epsilon) \tag{1.2-13}$$

随着变形增加,变形速率减小,物体仿佛硬化了。这个理论由此而得名。

式中 $f(\sigma)$ 和 $\varphi(\epsilon)$ 的函数形式可有各种各样,比如,取 $\varphi(\epsilon) = \gamma^a$, $f(\sigma) = \alpha e^{\sigma/b}$

在 $\tau = \text{常数}$ 时,得

$$\epsilon = [\alpha(\alpha + 1)]^{1/(\alpha + 1)} \exp\{\sigma / b(\alpha + 1)\} + 1/(\alpha + 1) \tag{1.2-14}$$

1.2.6 速率过程理论

速率过程理论是从物理化学学的角度来描述土体内部的分子热运动的。

该理论由 Glasstone(1941)等人作了详尽的叙述,后用于土力学来预测土的特性。自然界的很多现象都可描述为速率过程,如气体扩散、化学反应以及液体流动,土的流变现象也包括在内,因为它和前几种自然界现象一样,都涉及到分子或者原子的相对运动。

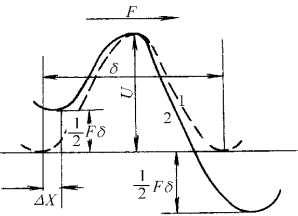


图 1.2-1 剪切力对势能线的影响

1—加力 F 以前 2—加力 F 以后

固体的蠕变和流体的流动有同一性质,两者都是单元质点(分子、原子),由于物体组织中存在有缺损而具有方向性运动的外部表现。不过,因为液体分子间的结合比固体中原子之间的结合弱得多,液体分子尘埃性也大得多,相应地在很小的荷载作用下液体流动速率比固体大得多。

假定介质的分子在力 F 的作用下从势能波谷往波峰移动而作功 $U^m = \delta F/2$,对于运动所需的活比能等于 $U = U_0 - U^m = U_0 - \delta F/2$,见图 1.2-1。

如果在任何一个方向分子一秒钟‘跳越’能量等值线 $\overleftarrow{j_s}$ 和 $\overrightarrow{j_s}$,则模式的运动速率等于 $\dot{\gamma} = \overleftarrow{j_s} - \overrightarrow{j_s}$,因而‘跳越’数 j_s 可以看成是与颗粒在平衡位置残留时间成反比的颗粒运动的单位速度

$$j_s = j_0 e^{-u/k} \quad (1.2-15)$$

最终可以看到

$$\dot{\gamma} = 2j_0 e^{-u_0/k\Theta} \sinh(\tau V/2K\Theta) \quad (1.2-16)$$

上述描述了非线性来源,反映了随应力增加,抗剪硬度增加的有结构的非线性牛顿流体的特征。

J. K. Mitchell 等对几种不同土的活比能 U 值进行了计算,如未破坏组织的海相淤泥 ($w = 69.5\% \sim 74\%$) 的活比能 U 为 $25 \sim 40$ 千卡/克分子 ($105 \times 10^3 \sim 168 \times 10^3$ 焦耳/克分子)。

1.2.7 工程比拟法

由于岩土介质的离散性、非均匀性和各向异性,计算模型、模型参数以及地面计算指标的不精确性,在有些情况下,计算分析的结果不能使人们确信其准确性,基于实践经验总结的工程比拟法则有其独到的价值。

§ 1.3 微分型流变本构方程及其力学模型

该模型理论的基本出发点是根据理想的元件组合成各种不同的模型,由各组合元件的基本性质以及组合关系,推导出模型的本构方程,然后,通过试验资料来确定模型中的各个参数。随着对流变学问题研究的深入,对于各种不同的土,现在已发展了许许多多的模型,不胜枚举,可以将这些模型分为两大类来分别加以说明:

第一类是最基本的一维太沙基(K. Terzaghi, 1925)模型为代表的一类模型。它们共同的特点是,在本构方程的建立过程中,同时考虑了孔隙水的运动规律和土颗粒骨架的变形规律。最基本的假定是认为孔隙大小不变,水的渗流符合达西定律,土骨架的变形符合虎克定律,按照这一基本假定建立的模型即为太沙基一维固结模型。为了更准确地描述土的特性,后来的学者分别考虑了土的孔隙大小在受压力后的可变性、土的非饱和性,土颗粒变形的粘弹性、粘塑性和非线性,属于这一类的模型有:太沙基(K. Terzaghi, 1925)模型,陈宗基(1957)模型,Merchant(1940)模型,Keedwell(1972)模型,Folque(1961)非饱和土模型,Vyalov 模型,各种模型的元件组合见图 1.3-1。

第二类是从固体力学角度出发,直接按固体变形的粘弹塑性理论来分析土体受力变形后的特性。这类有代表性的模型有:Maxwell 模型, Kelvin 模型和广义的 Kelvin 模型,

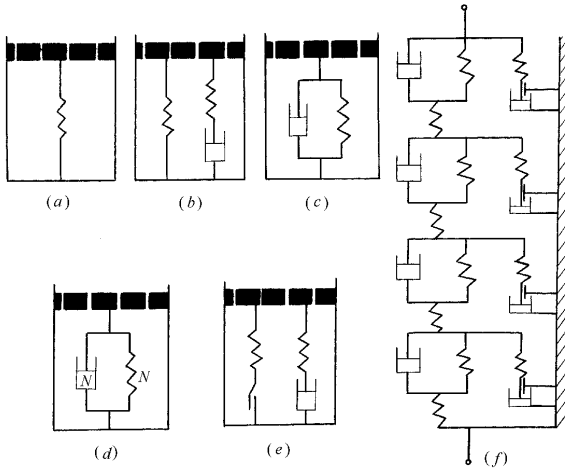


图 1.3-1

(a) K. Terzaghi 模型 (b) Tan, T.K. 模型 (c) Merchant 模型;
(d) Keedwell 模型 (e) Folque 模型 (f) C.C. Vyalov 模型

Burgers 模型, Bingham 模型和广义 Bingham 模型, 西原模型等。有关模型的组成和本构方程, 参见 § 2.2。

近年, 模型理论向两个方向发展, 一是非线性化; 一是多维化, 考虑各向异性。任一物体或材料的流变模型都是指在一定的应力状态和一定的时间范围的, 离开了物质的流变模型是毫无意义的。

§ 1.4 积分型流变本构方程及其力学模型

1.4.1 一维流变的积分型本构方程

根据蠕变方程 $\epsilon = J(t)\sigma_0$ 和 Boltzmann 叠加原理可以导出

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0 + \sum_{i=0}^t J(t - \tau_i) \Delta\sigma_i \quad (1.4-1)$$

如果荷载变化是连续的, 则有:

$$\epsilon(t) = J(t)\sigma_0 + \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma} d\tau \quad (1.4-2)$$

通过分部积分并整理即可得到文献中常见的形式 [40]

$$\epsilon(t) = [\sigma(t) + \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau] / E \quad (1.4-3)$$

其中: $K(t - \tau) = E \dot{J}(t - \tau)$

式中 $K(t - \tau)$ ——蠕变核, 反映材料的蠕变特性。

该蠕变方程亦可根据松弛方程 $\sigma = E(t)\epsilon_0$ 和叠加原理导出 [40]

$$\sigma(t) = E \left[\epsilon(t) - \int_0^t R(t - \tau) \epsilon(\tau) d\tau \right] \quad (1.4-4)$$

式中 $R(t-\tau)$ ——松弛核,反映材料的松弛特性。

上面给出的流变方程都是针对各向同性土而言,如果考虑各向异性,可参考有关文献。

积分方程的核 $K(t-\tau)$ 和 $R(t-\tau)$ 函数互为逆解,因此,确定两函数之一就行了。采用哪种函数,根据已知的试验资料决定。根据式(1.4-3)(1.4-4)可分别得到蠕变方程和松弛方程的通式:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right] E \quad (1.4-5)$$

$$\alpha(t) = E \epsilon_0 \left[1 - \int_0^t R(t-\tau) d\tau \right] \quad (1.4-6)$$

1.4.2 几种积分形式的流变模型

原则上讲,蠕变核可以是任意函数,实际上则应注意到两点:第一,蠕变核形式是以实验资料为基础的;第二,数学上是可积的。因此,蠕变核通常只取少数几种形式:

1. 蠕变核为指数函数

$$K(t-\tau) = \omega e^{-m(t-\tau)} \quad (1.4-7)$$

式中 ω, m ——材料系数;

将 $K(t-\tau)$ 代入流变方程(1.4-3),得

$$\epsilon(t) = J(0_+) \alpha(t) + \int_0^t \omega e^{-m(t-\tau)} \alpha(\tau) d\tau \quad (1.4-8)$$

整理得:

$$\frac{1}{m+\omega} \dot{\epsilon} + \epsilon = \frac{m}{m+\omega} \frac{1}{J(0_+)} \epsilon + \frac{1}{m+\omega} \frac{1}{J(0_+)} \dot{\epsilon} \quad (1.4-9)$$

上式与标准线性体模型的流变方程完全一致,仅系数不同。

2. 蠕变核为幂函数

$$K(t-\tau) = \delta (t-\tau)^{-\alpha} \quad (1.4-10)$$

式中 δ, α 为材料系数 $0 < \alpha < 1, \delta > 0$

将 $K(t-\tau)$ 代入流变方程(1.4-3),得:

$$\epsilon(t) = J(0_+) \alpha(t) + \int_0^t \delta (t-\tau)^{-\alpha} \alpha(\tau) d\tau \quad (1.4-11)$$

蠕变方程通式为:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 [1 + \delta t^{1-\alpha} K(1-\alpha)] / E \quad (1.4-12)$$

该模型有瞬时弹性、蠕变变形,属亚稳定蠕变。

3. 蠕变核为双曲线函数

$$K(t-\tau) = \delta [T + (t-\tau)]^{-1} \quad (1.4-13)$$

相应的蠕变方程为

$$\epsilon(t) = \sigma_0 [1 + \ln(T+t)] / T E \quad (1.4-14)$$

4. 蠕变核为分式——线性函数

$$K(t-\tau) = T(\delta-1) [T + (t-\tau)]^2 \quad (1.4-15)$$

相应的蠕变方程为:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 [1 + (\delta-1)t / (T+t)] / E \quad (1.4-16)$$

该模型反映的是衰减稳定型蠕变。

5. 蠕变核为混合的指数——幂函数

$$K(t-\tau)=N(\tau-t)^{-1}e^{-\beta(\tau-t)} \tag{1.4-17}$$

在 $\beta>0$ 时,该核描述衰减稳定型蠕变。

$\beta<0$ 时,描述非衰减性蠕变。

$\beta=0$ 时,则为稳定流动($\dot{\epsilon}=A$),即亚稳定型蠕变。

1.4.3 蠕变核与松弛核之间的关系

将式(1.4-4)代入式(1.4-3)得以下积分方程

$$K(t)-R(t)=\int_0^t R(t)K(t-\tau)d\tau \tag{1.4-18}$$

(1.4-18)式右边即为核 $R(t)$ 与 $K(t)$ 的卷积,即

$$K(t)-R(t)=K(t)*R(t) \tag{1.4-19}$$

对(1.4-19)式进行 Laplace 变换

$$\hat{K}(t)-\hat{R}(t)=\hat{K}(t)\cdot\hat{R}(t) \tag{1.4-20}$$

从而得:

$$\hat{R}(t)=\hat{K}(t)[1+\hat{K}(t)] \tag{1.4-21}$$

通过 Laplace 逆变换,即可求出 $R(t)=F[K(t)]$, F 为泛函数。

§ 1.5 关于工程流变问题的解析方法

任何一种理论都必须应用到实际中去,否则理论就失去价值。同样,土的流变研究也必须应用到实际工程中去解决实际工程问题,而流变本构模型的应用是流变学中的重要部分,因此,要把流变研究应用到实际工程中去,必须先解决本构方程的解析问题。由于在流变研究中,时间被考虑了进去,致使流变问题与一般的弹塑性问题只是应力和应变之间的关系相比显得更加复杂。

流变问题的解析主要有两个方面,即解析解和数值解。由于流变问题比较复杂,所以能得到解析解的问题不多,只有对那些简单的流变模型以及简单的问题,才能得到真正的解析解,如深埋的圆形隧道这一轴对称问题。解析的方法主要是采用对应性原理,运用积分变换(拉普拉斯变换)技术得到解析解,而且只对线性粘弹性问题有效,而不适用于粘塑性及非线性粘弹性问题,对应性原理可叙述如下:

(1) 粘弹性结构如承受 $t=0$ 时刻施加的荷载并保持常量,则结构所受应力与相同荷载的弹性应力相同,其应变与位移与时间有关,可通过将蠕变柔量代替弹性解中的弹性模量的倒数进行求算;

(2) 粘弹性结构如承受 $t=0$ 时刻施加的位移并保持常量,则结构的位移和应变与相应的弹性结构解相同,应力可通过将松弛模量取代弹性解中的弹性模量进行求算。具体的做法是先求得弹性解,然后进行拉普拉斯变换,对那些弹性常数必须用从粘弹性本构关系经过拉普拉斯变换而得到的粘弹性常数来代替,从而得到拉普拉斯变换后粘弹性解,最后通过拉普拉斯逆变换得到最终的粘弹性解。由于只有一些简单的和特殊的函数才能找到拉普拉斯

逆变换的解析解,所以许多问题虽然能得到拉普拉斯变换后的粘弹性解,却无法得到逆变换的解析解。因此,真正能得到粘弹性解析解的问题很少。日本学者 Sakurai 在这方面做了许多的工作,有的文献还推导了采用广义 Voigt 模型模拟饱和土体固结变形的解析解,推导时按轴对称问题考虑,采用了 Laplace 变换技术,最后的解析解以无穷级数的形式出现。

随着电子计算机高速发展,流变问题的数值解也随之发展。由于解析解只能解决为数不多的一些简单问题,因此许多流变问题只能通过数值解来得到解决,数值解的采用给流变研究的实际应用带来生机,发展越来越快。数值解主要是采用它对整体平衡方程的影响达到对弹性问题的修正。数值解可以说是能够解决几乎所有的流变问题,除了有限元法外,还有边界元法、无限元法以及两者的耦合,以及有限差分法等。

§ 1.6 岩土材料的非线性流变问题

1.6.1 非线性流变的定义

在研究土的流变时,常常是把土作为一种线性流变体,用线性流变理论来进行研究。所谓线性流变,是指虽然物体的本构关系,即应力、应变之间的关系,在不同的时刻是不同的,但在同一时刻,本构关系仍然是线性的,反映在应力-应变关系图上就是不同时刻下的每条应力-应变等时曲线都是线性粘弹性直线或线性粘塑性折线(当粘塑性变形发生时,应力-应变等时曲线就成为折线)。线性流变体的蠕变方程可以写为

$$\epsilon = J(t) \sigma \quad (1.6-1)$$

其中, $J(t)$ 为蠕变柔量,它仅仅是时间的函数,而与应力水平无关。式(1.6-1)所反映的蠕变曲线就是同一时刻不同应力水平下的蠕应变值与所受的应力成正比。从式(1.6-1)可以得到线性流变体在某定值应力水平条件下 $\sigma = ct$ (某一条蠕变曲线)的应变速率为

$$\dot{\epsilon} = \dot{J}(t) \sigma \quad (1.6-2)$$

从式(1.6-2)可以看出,线性流变体的应变速率与应力在每一时刻也是成线性关系的,反映在应变速率与应力的关系图上也是一簇直线或折线(同样,当粘塑性变形发生时为折线)。在粘塑性情况下, σ_s 为屈服应力,这时称 $\sigma - \sigma_s$ 为过应力,则式(1.6-1)及式(1.6-2)的应力都要换成过应力。相应的应变就是粘塑性应变,蠕变柔量为粘塑性蠕变柔量。如称粘弹性应变速率与应力之比的倒数为流变体的粘弹性粘滞系数 η_{ve} , 粘塑性应变速率与过应力之比的倒数为流变体的粘塑性粘滞系数 η_{vp} , 即有:

$$1/\eta_{ve} = \dot{\epsilon}_{ve}/\sigma, \quad 1/\eta_{vp} = \dot{\epsilon}_{vp}/(\sigma - \sigma_s) \quad (1.6-3)$$

从式(1.6-3)和式(1.6-2)可以看出,线性流变体的粘弹性或粘塑性粘滞系数也仅仅都只是时间的函数,而与应力水平无关,即

$$\eta_{ve} = \eta_{ve}(t), \quad \eta_{vp} = \eta_{vp}(t) \quad (1.6-4)$$

以上谈到的是线性流变。

然而,对软土而言,由原位测试及实验研究都表明,软土体并不是一种线性流变体,而是一种非线性流变体,这正象土并不是一种理想的线性体,它的本构关系一般都是非线性的。因此,若只用线性流变特性来研究软土的流变问题必定会与实际情况有偏差,而应该改用非线性流变来研究软土的流变问题。

非线性流变体的应力和应变呈非线性关系,反应在应力—应变图上其应力—应变等时

曲线就不再是直线或折线,而是一簇曲线。若继续用式(1.6-1)的形式来表示非线性流变的蠕变方程,则非线性流变的蠕变柔量就不再仅仅是时间的函数,它还与当时的应力水平有关,即有

$$\varepsilon = J(t, \sigma) \sigma \quad (1.6-5a)$$

同样,非线性流变的应变速率与应力之间的关系也不再是线性的,而是非线性的,可写为:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{J}(t, \sigma) \sigma \quad (1.6-5b)$$

非线性流变的粘弹性或粘塑性粘滞系数也不再仅仅是时间的函数,还与应力水平有关,即

$$\eta_{ve} = \eta_{ve}(t, \sigma), \quad \eta_{vp} = \eta_{vp}(t, \sigma) \quad (1.6-6)$$

1.6.2 岩土材料非线性流变本构模型

正如线性流变一样,在非线性流变的研究中,建立合适的非线性流变本构模型来正确反映软土的非线性流变特性是至关重要的。

在本章第二节里所提到的建立流变本构模型的方法和理论,可直接或经过修改后运用到非线性流变本构模型中来。从微观或细观出发来建立流变本构模型的方法是直接考虑土体材料内部组构变化的情况,反映材料流变的真实特性,而没有先作假设流变是否线性,因此用此方法所建立的流变本构模型一般就是非线性的。正如本章第二节提到的,用速率过程理论(参见式(1.2-16))和内变量或内时理论建立的流变本构方程一般都是非线性的。由于在现行通用的模型理论中所用的基本元件都是线性的,如“弹簧”元件是代表物体的线性弹性;“粘壶”是代表物体的线性粘滞性(即物体为一线性牛顿体),这说明了现行模型理论的出发点就是假设物体的基本特性是线性的,无论所建立的模型如何复杂,即无论模型构成的元件怎么多、组合的方式怎么复杂,最终从模型所得到的本构关系却总是线性的。所以,现行模型理论大多可归属于只限于讨论线性流变问题,不能直接用它来研究非线性流变。若要利用现行线性模型理论的优点,借用它来建立非线性流变本构模型的话,就必须对线性模型理论进行修改。通常的方法是用非线性元件来代替模型中的线性元件,即如假设土体的基本特性是非线性粘弹性的,则需要改用具有非线性应力-应变关系的非线性“弹簧”来代替原有的线性虎克“弹簧”,用具有非线性粘滞流动应变速度-应力关系的非线性“粘壶”(非线性牛顿体)来代替原来的线性“粘壶”(线性牛顿体),等等。这种方法实际上就是一种变参数的流变模型,即考虑“弹簧”的模量是与应力水平有关的变模量,考虑“粘壶”的粘滞系数也是与应力水平有关的可变粘滞系数,即 $E = E(\sigma)$ 和 $\eta = \eta(\sigma)$ 。有的文献还提出过一种非线性三单元模型(Kelvin-Voigt 模型),其中模型的“粘壶”仍是线性的,而两“弹簧”分别反映瞬时弹模和延滞模量,则改作是非线性的,其应力-应变关系改写为

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i (1 - \mu_i \varepsilon_i)$$

其中, $0 \leq \varepsilon_i \leq 1/\mu_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.6-7)$

这样,最终得到的非线性流变本构模型不仅能描述衰减蠕变和等速蠕变,而且还能描述加速蠕变,而线性模型理论是不能描述加速蠕变的。Vyalov(1986)提出了考虑流动速率与应力之间的非线性关系的修正 Bingham 定律,即 Bingham 模型中的“粘壶”的粘滞系数不是常数,而是变化的。根据 Vyalov 提出的上述 Bingham 模型中“粘壶”元件粘滞系数的经验表达式,可以建立反映岩土材料非线性流变属性的非线性流变模型,其中所采用的粘滞系数是时间和应力水平的函数,即

$$\eta(t, \tau) = G_0 [T + \alpha(1 - \alpha(\tau - \tau_s)/\tau_s)]^p / a / T \quad (1.6-8)$$

其中, G_0 为瞬弹剪切模量; τ_s 为剪切屈服强度; t, τ 分别为时间和剪应力参量; T 为达到剪切屈服的时间; a 为试验常数。

此外, Murayma 和 Shibata(1964) 在土的流变研究中提出了类似的变粘滞系数的非线性 Bingham 模型; Christensen 和 Wu(1964) 则采用了变粘滞系数的非线性三单元 Kelvin-Voigt 模型; Barden(1965) 和 Keedwel(1972) 在土的次固结研究中建立了变弹性模量和变粘滞系数的非线性 Kelvin 模型等等。

前述的线性遗传蠕变理论考虑的是物体的应力与应变成线性关系, 蠕变方程可表示成积分的形式:

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\xi) d\sigma/d\xi d\xi \quad (1.6-9)$$

$J(t-\xi)$ 即为核函数, 也就是蠕变柔量。若考虑的是非线性流变, 则可对线性遗传蠕变理论进行某些修正。假设非线性的应力、应变关系可用本章第二节所提到的应力函数 $f(\sigma)$ 来表示的话, 则只要在式(1.6-9)的积分核上乘以应力函数 $f(\sigma)$ 进行修正, 即可得到用非线性遗传蠕变理论描述的非线性蠕变方程为

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\xi) f(\sigma) d\sigma/d\xi d\xi \quad (1.6-10)$$

在式(1.6-10)中, 若 $f(\sigma) = \sigma$ 则退化成式(1.6-9)描述的线性遗传蠕变理论。若考虑应力增量高次项以及应力增量互相作用而产生对变形的影响时, 就可考虑对非线性流变作分小段(时步)线性加载时的蠕变响应分析方法。

1.6.3 岩土材料非线性流变的经验关系表达

对软土材料言, 根据试验或实测方法得到的经验本构关系一般都是非线性的。只要所采用的应力、应变之间的关系是非线性的, 如取应力函数 $f(\sigma)$ 为应力的非线性函数, 即可得到土体非线性流变的经验本构方程。一些学者提出了各自不同的非线性流变的经验本构关系式来研究土的非线性流变。同样, 非线性流变的经验本构关系可区分为以应力、应变的形式出现的经验函数型和以应变速率、应力的形式出现的速率型的经验函数。其实, 后者又常常是可变的、非线性粘滞系数的经验函数。描述土体非线性粘滞流动的情况, 常见的经验函数有幂函数型、双曲线型、对数型、指数型、多项式型等。Keedwel(1984) 和 Vyalov(1986) 总结了土体非线性流变常用的一些速率型的本构关系, 有如

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^* (\tau/\tau^*)^{1/m} \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^* \operatorname{sh}(\tau/\tau^*) \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^* \exp(\tau/\tau^*) \end{aligned} \quad (1.6-11)$$

进一步的研究, 应该考虑剪应变速率随时间的变化, 即 $\dot{\gamma}$ 或 $\dot{\gamma}^*$ 是时间的函数。Vulliet 和 Hutten(1988) 给出了 $\dot{\gamma}^*$ 与时间 t 的一些常见关系:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^*(t) &= \exp(-Gt/\eta) \\ \dot{\gamma}^*(t) &= (t_1/t)^n \end{aligned} \quad (1.6-12)$$

Vyalov 还给出了下面的剪应变速率的表达式:

$$\dot{\gamma} = \tau/\eta_0 (1/(t+1))^{(\tau)}, \quad n(\tau) = \lambda_2 - \lambda_1 \tau/(\tau_0 - \tau) \quad (1.6-13)$$

当 $n > 0$ 时, (1.6-13) 中变形速率随时间减小, 可描述衰减蠕变; 当 $n = 0$ 时, 产生恒定速度的流动, 式(1.6-13)可描述等速蠕变; 当 $n < 0$ 时, 变形速率随时间增长, 式(1.6-13)可描述

加速蠕变。Vyalov 称式(1.6-13)可以用来描述各种类型的土的流变,是个足够普遍的公式。但笔者认为,式(1.6-13)中的幂指数 n 与应力水平的关系可能比较难以确定,使式(1.6-13)的应用受到一定的限制。

国外学者在研究软粘土的次固结时,提出了一种经验性的固结模型,即把有效应力分为二部分: σ'_{v1} 和 σ'_{v2} , 其中 σ'_{v1} 直接产生变形,其大小仅是应变的函数,即 $\sigma'_{v1} = f(\epsilon_v)$, 而 σ'_{v2} 不直接产生变形,是一种粘滞阻力,其大小为应变速率的函数,即 $\sigma'_{v2} = g(\dot{\epsilon}_v)$, 因此有

$$\sigma'_v = \sigma'_{v1} + \sigma'_{v2} = f(\epsilon_v) + g(\dot{\epsilon}_v) \quad (1.6-14)$$

实际上,式(1.6-14)也表示了一种非线性流变模型,它类似于 Voigt 模型,但不同的是:式(1.6-14)中的 $g(\dot{\epsilon}_v)$ 所表示的是非线性粘壶。应该指出,即使是用模型理论来建立软土的流变本构模型,但从其模型参数的确定来看,不同的应力水平下的模型参数是不一样的,即模型参数与应力水平有关,这实际上即反映了非线性流变的特性,它亦可归结为一种变参数的非线性流变模型,只是没有确定出模型参数随应力水平变化的规律。有些文献在研究软土的剪切流变特性时还建议了用双曲线函数描述粘塑性应变的非线性流变模型。

1.6.4 非线性流变问题的数值解析

对线性流变问题中适用的对应性原理在非线性流变中是不再适用的。非线性流变问题一般都无法得到解析解,因此对非线性流变问题大多只采用数值解。现有非线性流变的数值解,一般是采用时步增量非线性迭代法,即对每一个荷载增量,把非线性流变问题简化为一系列的线性流变增量来求解,通过不断的迭代,即用一系列的线性流变来逼近非线性流变,最终可得非线性流变问题的解答。

众所周知,对线性流变问题多采用由 Zienkiewicz 建议的“粘性初应变法”来求解,它是一种常刚度迭代法,在整个迭代过程中,系统的整体刚度矩阵始终不变,这就为计算带来很多方便。但是,在非线性流变问题中,尽管在每一时步增量内作为线性流变问题来处理,但在作下一时步的增量迭代时却要求变换总刚,使计算工作十分冗繁和费事。在本书的后述内容中,将建议一种新的所谓“二次初应变法”来改进上述情况。此外,笔者还作过对岩体介质非线性流变问题进行的有限元法解析,讨论了岩质材料的非线性流变属性及其对隧洞围岩-支护系统力学效应方面的若干问题。

第2章 流变模型理论与岩土材料流变特性

§2.1 岩土材料流变本构方程

正如土的本构关系在土力学中的重要性一样,土的流变本构模型的建立在土的流变学研究中也是至关重要的。任何一种材料的本构模型都必须是能充分表达材料的内部结构及其物理力学特性,这样才能保证由模型所推导出来的本构方程能正确反映材料的特性,因此,如何建立土流变本构模型成为土的流变研究中的关键所在,只有建立正确的土流变本构模型,即应力、应变和时间三者之间的关系,才能充分、准确地描述土的流变特性,国内外的学者在这方面做了许多的工作,建立了各种反映各类土体流变的模型。

土的流变本构模型可以分别从土流变的微观或宏观表现出发来建立,或把两者结合起来。

2.1.1 从岩土流变的细微观研究出发建立流变本构方程

对于从土流变的微观表现出发来建立土的流变模型,一般说来是从土的内部微观角度来研究的,认为土的流变特性是因土粒子骨架的微观变化引起的,从土的微观构造的变化机理出发,运用连续统计力学理论,或者借用金属、晶体的微观理论(如位错理论等)结合土流变的宏观表现来建立土的流变模型。如速率过程理论(Rate process theory)就是借助物理化学的理论,从物理化学的角度来描述土体流变时其内部的分子热运动。Christensen 和 Wu (1964), Mitchel (1968), Keedwel (1984) 等人把速率过程理论用于土力学来预测土的特性。Vyalov (1986) 运用速率过程理论推导了土的流动方程,写为

$$\dot{\gamma} = 2j_0 \exp(-U_0/k/\Theta) \exp(\tau V/2/k/\Theta) \quad (2.1-1)$$

其中, j_0 为描述土体流变时内部分子运动的某一函数值; U_0 为使一个分子具有的活化能; Θ 为绝对温度; V 为分子体积; k 为热力学常数; τ 为剪切应力。式(2.1-1)描述了土体非线性流动,反映了随应力增加抗剪强度增加的、考虑土体内部结构的非牛顿体特征。还有内变量或内蕴时间理论(Endochronic time theory)在土的流变中的应用。它是用一系列代表物质不可逆变形的内部机制的变量,即所谓的内变量,来反映物质变形的某些物性,通过这些内变量的演化规律,运用连续介质力学理论来建立流变本构方程。Ansa (1979) 以及 Bazant (1979) 等人分别运用了内时理论建立了正常固粘土和横向同性粘土的粘塑性本构方程。

从土的微观结构出发来建立土体流变的本构模型具有深远的意义,因为它不仅能反映土流变的宏观特性,还能揭示土流变的内部机理,使对土的流变有更深入的认识。这方面的工作,如运用内时理论来建立土流变的本构模型,还做得不多,但相信它会发展得越来越快,而且会成为土流变学研究的一个很重要的方向。

2.1.2 从岩土流变的宏观表现——唯象学出发建立流变本构方程

从土流变的宏观表现出发来建立土流变本构方程,这方面的工作做得很多。主要可分

为两方面,一是从土的流变特性(包括实际工程及室内流变试验等)出发,运用现有的流变理论——即粘弹塑性理论来建立土的流变本构模型;另一方面是从土的流变特性出发,直接总结出土流变的经验本构关系式。

1. 岩土流变的理论模型

在土流变的研究中所有采用的粘弹塑性理论有模型理论、遗传蠕变理论或称记忆理论,以及研究材料(如金属、复合材料等)在动载(应力波)下的粘弹塑性的理论。模型理论是采用一些基本元件来代表物体的某些性质,如用“弹簧”来模拟物体的弹性、“粘壶”来模拟物体的粘滞性以及用“滑块”来模拟物体的塑性,通过这些基本元件的组合(用“串联”或“并联”的方式)来达到反映物体的粘弹塑性特性。它所得到的流变本构方程是一种微分形式的本构关系,通过本构方程的求解就可得到蠕变方程、应力松弛方程等,模型理论的概念直观、简单、物理意义明确,被广大的工程研究人员所乐意采用,因此工程上对土的流变研究一般都是采用模型理论。遗传蠕变理论是采用一种遗传积分型的本构模型,在遗传积分内包含着一个函数称为核函数,以反映材料的流动性能;当描述蠕变时,此核函数就是上述的蠕变柔量的概念,反映材料的蠕变性能;当描述应力松弛时,此核函数就是松弛模量的概念,反映材料的松弛特性。采用遗传蠕变理论所得到的流变本构关系是积分型的本构方程。还借用研究金属或复合材料在动载(应力波)作用下的粘弹塑性理论来建立土的粘弹塑性本构方程。这种方法是把土的流变这一与时间有关的特性看成对应变速率敏感的动载问题,然后再运用粘弹塑性理论,如过应力理论、粘弹塑性屈服理论等来建立土的流变本构方程,这种方程的形式一般是应变速率的形式。

2. 岩土流变的经验本构关系

对于岩土流变的经验本构关系式,一般是直接给出土流变方程的函数形式。对每种不同的材料,甚至不同的条件,有各种各样的经验模式,不胜枚举。经验模式一般可分为应力、应变关系的经验函数型和应力、应变速率关系的经验函数型,即速率型本构关系式。速率型本构关系反映了土流变过程中的粘滞流动特性,它又可分成两种形式:一是时间显式地出现在本构关系中,另一种是时间并不显式出现在本构关系中,只是包含在应变速率之中。Vulliet 和 Hutter(1988)总结了时间显式出现在本构关系中和时间隐含在本构关系中的土的速率型本构关系。Vyalov(1986)在研究流变时,采用两个函数来分别代表应力、应变、时间三者中应力、时间对应变的贡献或应变、时间对应力的贡献。可以看出,这两个函数有着影响函数的作用,然后通过两者的组合,得到流变方程。以蠕变方程为例,用函数 $f(\sigma)$ 表示应力的变化对应变的影响, $f(\sigma)$ 称为应力函数,Vyalov 根据一般土的应力、应变关系提出应力函数 $f(\sigma)$ 的二种对土最适用的形式,即幂函数形式和双曲线函数形式;而对于时间对应变的影响则采用函数 $K(t)$ 来表示, $K(t)$ 称为时间函数,或蠕变函数。Vyalov 总结了大量的函数形式,认为最普遍的是幂次的、对数的和双曲线的形式,并提出了一个通用的时间函数 $K(t)$ 为

$$K(t) = (T_2 / (T_1 + t))^n \quad (2.1-2)$$

通过 n 的变化,从上式可导出上述的各种关系式。其中,幂次型对应于 $n = 1 - \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$, $n < 1$) 和 $T_1 = 0$, $T_2 = (\alpha \delta / T^\alpha)^{(1-\alpha)}$ 。此处,对数型对应于 $n = 1$ 和 $T_1 = 0$, $T_2 = (\alpha \delta / T^\alpha)^{(1-\alpha)}$;双曲线型对应于 $n = 2$ 和 $T_1, T_2 = [T(\delta - 1)]^{1/6}$ 。通过应力函数 $f(\sigma)$ 和蠕变函数 $K(t)$ 的组合,就可得到各种形式的蠕变方程,其中包括幂次关系的、对数关系的和双

曲线关系的蠕变方程。由于应力、应变的关系是按非线性考虑的,因此应力函数 $f(\sigma)$ 也是非线性的,最后得到的蠕变方程也是非线性蠕变方程。由于上述两个函数 $f(\sigma)$ 和 $K(t)$ 的类型是通过现象学的途径来挑选的,因此所得到的蠕变方程具有代表性。这也可以从许多有关的土流变的文献中认为蠕变方程的形式多为幂次的、对数的和双曲线的得到证明。本书将通过对上海地区饱和软粘土进行大量的室内流变试验后,总结了上海饱和软粘土流变的经验关系式。流变的经验本构关系与由流变理论所得到的本构模型相比,较缺乏理论指导,反映的只是流变外部表现,无法对流变的内部特性及机理进行反映,而且通用性比较差,即对特定的土,需要逐一总结出特定的、相适应的流变经验本构关系;但由于它比较直观明显,可直接使用,亦为工程设计人员所乐意采用,所以它将一直是工程上流变学研究中的一个方向。

§ 2.2 线性粘弹塑性模型理论

由于在后面的非线性流变研究中要用到线性粘弹塑性模型理论,所以有必要先介绍一下线性粘弹塑性模型理论。

线性粘弹塑性模型理论(以下简称模型理论)是众多线性粘弹塑性理论中的一种。它由一些基本的元件,如“弹簧”、“粘壶”、“摩擦元件”等来反映线性粘弹塑性材料的性质,通过这些基本元件的相互“并联”或“串联”形成线性流变模型,然后借助流变模型来建立材料的本构关系,即应力、应变、时间三者之间的关系,所建立的流变模型是微分型的。

模型理论不仅所建立的模型很形象化,而且概念直观、简单、又能较全面地反映流变介质的各种流变学特性,如蠕变、应力松弛、弹性后效及滞后效应等,容易被大家尤其是工程师们所接受。

模型理论由前面所说的三个基本流变元件组成,再由这三个基本流变元件形成一些基本流变模型以及其它更复杂的模型。

2.2.1 基本流变元件

基本流变元件包括虎克体、牛顿体和圣维南体三种。

1. 弹性固体(又称 Hooke 固体)

Hooke 元件简称 H 体,用符号【H】表示,它模拟物体的弹性,在模型中可用一弹簧表示,如图 2.2-1 所示,其应力与应变间的关系完全符合虎克定律,即

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.2-1)$$

应力和应变成线性关系,这种元件的特点是施加荷载后,变形立即发生;应力不变,变形保持常数,不随时间变化。当应力除去后,变形完全恢复,即应变是完全可恢复的。由式(2.2-1)得

$$d\sigma/dt = E d\varepsilon/dt \quad (2.2-2)$$

从上式可以看出,应力随时间的变化(应力速率)与应变随时间的变化(应变速率)成正比。

2. 粘滞液体(又称 Newton 流体)

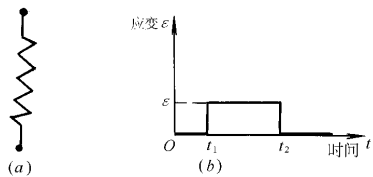


图 2.2-1 Hooke 固体模型
(a) 弹簧 (b) 应变-时间图

粘滞元件简称 N 体 ,用符号【N】表示 ,它模拟物体的粘滞性。在模型中可用图 2.2-2 表示 ,它是由圆筒内装满一种粘滞性液体及一个可移动的穿孔活塞组成 ,称为粘壶。圆筒中的液体完全符合牛顿定律 ,故称牛顿流体。

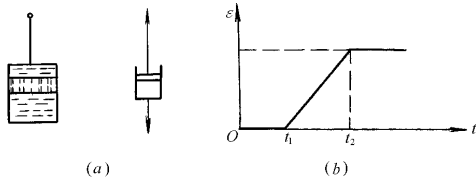


图 2.2-2 Newton 流体模型
(a)粘壶 (b)应变-时间图

Newton 流体中的应力与应变速率之间成正比关系 ,即

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \tag{2.2-3}$$

式中 η ——粘滞系数。

如果应力 σ 一定($\sigma = \sigma_0$) ,由上式可得

$$\epsilon = \sigma_0 t / \eta + C \tag{2.2-4}$$

式中 C ——积分常数 ,由初始条件决定。

从上式可知粘壶的特点 :加上应力 σ_0 不立即产生应变 ;使应力从时间 t_1 到 t_2 保持定值 σ_0 ,应变会随时间的增长而增大 ;以后即使除去荷重 ,消除应力 ,应变也不会回复 ,而留下永久应变。

3. 塑性固体(又称 St. Venant 塑性体)

塑性元件简称 St. V 体 ,用符号【V】表示 ,它模拟物体的塑性。在模型中可用图 2.2-3a 表示 ,是由两接触面粗糙的滑块组成 ,称为摩擦元件。它具有一个起始的摩擦阻力 σ_m ,若外力小于此起始摩擦阻力 ,则不产生变形 ;当 σ 一旦达到 σ_m 时 ,它在等应力下出现塑性流动(图 2.2-3b) σ_m 称屈服应力。一旦应力除去 ,应变也不会回复 ,留下永久应变。

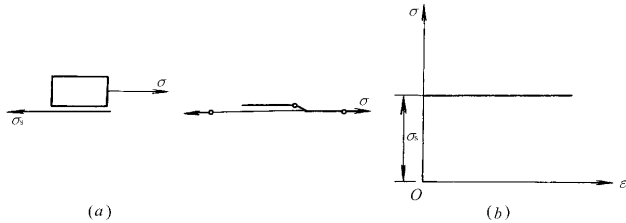


图 2.2-3 St. Venant 塑性体模型
(a)符合 V (b)应力-应变图

2.2.2 基本流变模型及其本构方程

将上述这些流变元件作适当的组合形成各种复合模型 ,就可说明材料的各种应力、应变、强度和时间的关系。这些元件可以“ 并联 ” ,也可以“ 串联 ”。并联时用“ || ”表示 ,串联时用“ — ”表示。并联时 ,每个单元体模型所担负的荷载之和等于总荷载 ,而它们的应变是相等的。串联时 ,每个单元体担负着同一的总荷载 ,而它们的总应变及总应变速率则为各单元体