

第 三 篇

土体流变问题的有限元法解析

第 7 章 两维问题与非线性流变解析

在前面的一些章节中对上海地区软粘土的流变特性进行了理论分析和试验研究,了解了流变规律,但更重要的是将流变规律应用于实践中,一方面检验模型的可信度,另一方面对工程情况进行预估,以辅助工程设计、施工。

针对工程实际中存在的平面问题和空间问题,将分别用二维和三维有限元解析方法进行分析。本章和下一章将分别予以讨论。

§ 7.1 工程流变问题有限元法解析的思路与步骤

对土体的粘弹塑性流变问题进行数据解析时,可以仿照非线性弹性(或弹塑性)问题,将粘弹塑性荷载按时间步长分割成一系列的增量值,在每一个时步增量范围内,各有关的计算参数视为常数,即用一系列线性问题的解来逼近非线性问题的解。只要计算时步和荷载增量取得合适,计算结果可以满足工程上的精度要求。

在粘弹塑性问题的数值解析中,采用初应变法较为方便。现以地基及基础工程的长期沉降问题为例,说明其解题思路与步骤:

1. 加载瞬间的弹性分析

在施加荷载的瞬间,粘流应变尚未发展,只有弹性应变。即在初始时刻 $t=0$ 时, $\{\epsilon_v\}=0$ 。于是,整个系统在施加荷载瞬间的位移平衡方程为:

$$[K] \{\delta_0\} = \{F\} \quad (7.1-1)$$

式(7.1-1)中, $\{F\}$ 上面的“—”表示 F 值不随时间而变化。根据式(6.1-1)解得加荷瞬时的位移场 $\{\delta_0\}$, 将 $\{\delta_0\}$ 代入几何方程:

$$\{\epsilon_0\} = [B] \{\delta_0\} \quad (7.1-2)$$

可求得应变场 $\{\epsilon_0\}$, 将 $\{\epsilon_0\}$ 代入物理方程:

$$\{\sigma_0\} = [D] \{\epsilon_0\} \quad (7.1-3)$$

可求得初始时刻的应力场 $\{\sigma_0\}$ 。

2. 粘弹性和粘塑性阶段的检定

(1) 将上述计算得到的应力场 $\{\sigma_0\}$ 与初始地应力场 $\{\sigma^0\} = [\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0]^T$ 叠加,再化成主应力场 $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ 。

(2) 按下式计算主应力平均值 σ_m 和等效应力 $\bar{\sigma}$

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2 \quad (7.1-4)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} \quad (7.1-5)$$

$$\sigma_3 = \mu (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (7.1-6)$$

式(7.1-5)中:

$$J_2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 6$$

为偏应力第二不变量。

(3) 按 Drucker-Prager 屈服准则, 由下式 (7.1-7) 计算屈服函数:

$$F = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \sigma_m + \sqrt{3} \bar{\sigma} - \frac{6c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (7.1-7)$$

判断一下 F 是否小于 0, 若 $F < 0$, 则该单元属粘弹性阶段, 否则为粘弹塑性阶段。各个单元应逐一判断。

3. 粘弹性阶段

对于某一时刻 t_i , 考虑粘弹性流变效应的整体系统的平衡方程为:

$$[K] \{\delta\}_i = \{\bar{F}\} + \{F_{ve}\}_i \quad (7.1-8)$$

式 (7.1-8) 中: $\{F_{ve}\}_i$ —— t_i 时刻因粘弹性应变引起的附加结点等效力。

$$\{F_{ve}\}_i = \sum_e \int_0 [B]^T D \{\epsilon_{ve}\}_i d\Omega \quad (7.1-9)$$

在 t_i 时刻的粘弹性应变 $\{\epsilon_{ve}\}_i$, 可以根据所采用的流变模型计算得到。比如, 对于 Kelvin 粘弹性模型有:

$$\{\epsilon_{ve}\}_i = e^{-E\Delta t/\eta} \{\epsilon_{ve}\}_{i-1} + \frac{[A] K \sigma}{E} (1 - e^{-E\Delta t/\eta}) \quad (7.1-10)$$

并假定已知前一时间 t_{i-1} 的应力水平 $\{\sigma\}_{i-1}$, 并参考数值解答的稳定条件, 选取合适的时步增量 Δt 。在 $t_{i-1} \rightarrow t_i$ 的 Δt 时步内 $\{\sigma\}$ 的值不变, 即等于前一时刻已求得值 $\{\sigma\}_{i-1}$, 这样从已求得的相应值 $\{\epsilon_{ve}\}_{i-1}$, 可以求得 $\{\epsilon_{ve}\}_i$ 。上式 (7.1-10) 中 $[A]$ 为泊松比矩阵。

按式 (7.1-8) 求得了 t_i 时刻的 $\{\delta\}_i$ 值后, 该时刻的应力和应变值可以根据几何方程和物理方程求得。

$$\{\epsilon\}_i = [B] K \{\delta\}_i \quad (7.1-11)$$

$$\{\sigma\}_i = [D] \{\epsilon\}_i - \{\epsilon_{ve}\}_i \quad (7.1-12)$$

仿此, 按时步增量, 将 $\{F_{ve}\}$ 视为随时间不断增长变化的初应变 $\{\epsilon_{ve}\}$ 所引起的可变的附加结点力, 就能通过逐次计算得各个时刻考虑粘弹性变形的地基基础各单元结点的位移和单元的应变及应力值。

4. 粘塑性阶段

如上逐次计算, 经过若干时步后, 设在 t_j 时刻, 某一单元使式 (7.1-7) 表达的屈服函数 $F > 0$, 则表示该单元此时刻开始进入粘塑性阶段。同样可写出考虑粘塑性流变效应的整体系统的平衡方程, 对任一时刻 t_j :

$$[K] \{\delta\}_j = \{\bar{F}\} + \{F_{vp}\}_j \quad (7.1-13)$$

式 (7.1-13) 中: $\{F_{vp}\}_j$ —— t_j 时刻因粘塑性应变引起的结点附加力。

$$\{F_{vp}\}_j = \sum_e \int_0 [B]^T D \{\epsilon_{vp}\}_j d\Omega \quad (7.1-14)$$

假定在 $t_{j-1} \rightarrow t_j$ 时步 Δt_j 内, 粘塑性应变速率 $(\dot{\epsilon}_{vp})_j$ 为常数, 则 t_j 时刻的粘塑性应变可以从上一时刻的相应值累加计算得:

$$\{\epsilon_{vp}\}_j = \{\epsilon_{vp}\}_{j-1} + \{\dot{\epsilon}_{vp}\}_{j-1} \Delta t \quad (7.1-15)$$

式 (7.1-15) 中: $\{\epsilon_{vp}\}_{j-1}$ ——已知 t_{j-1} 时刻的粘塑性应变;

$\{\dot{\epsilon}_{vp}\}_{j-1}$ ——可以从 t_{j-1} 时刻的应力水平按所采用的流变模型计算得出。比如,对于 Bingham 粘塑性模型,并沿用 Drucker-Prager 屈服准则和相关联的流动法则有:

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \frac{1}{\eta F_0} \left(\frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \sigma_m + \sqrt{3} \bar{\sigma} - \frac{6c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \right) \cdot \left(\frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} - \frac{[P]}{9 \sigma_m} + \frac{\sqrt{3} [Q]}{2 \bar{\sigma}} \right) \{\sigma\} \quad (7.1-16)$$

式(7.1-16)中 $[P]$ 和 $[Q]$ 均为系数矩阵。

F_0 为使系数无量纲,通常可取 1。

这样,同由式(7.1-13)可解出 t_j 时刻的 $\{\delta\}_j$,从而计算得到 $\{\epsilon\}_j$ 和 $\{\sigma\}_j$ 。

§ 7.2 SUN 系列机和 PAFEC-FE 有限元法 解析的通用软件包简介

1. SUN 系列机简介

SUN 一词是 Stanford University Network 的缩写,SUN 公司成立于 1982 年,由美国斯坦福大学、加州大学贝克莱分校以及施乐研究中心密切合作而组成。SUN 系列工作站广泛应用于教学、科研、生产等领域的科学运算、有限元分析、数据管理、网络通讯,其图形功能很强,适用于建筑、桥梁、电气、机械、测量等学科的计算机辅助设计(CAD)。

SUN 机采用 UNIX 开放式操作系统,用户利用系统中所提供的多种服务程序可以方便地进行多种操作和编程,可以多人编辑、加工一个程序,在此基础上,用户可以能动地根据自己的需要,增加特殊专用的功能,此外,第三厂家也可以为其开发有关的软件和硬件产品,比如,PAFEC-FE 有限元分析通用软件包就是另外由英国 PAFEC 公司研制而成。

SUN 机可以开设多个窗口,进行多个进程,不同的进程可以同时开设的若干个窗口上展现在自己面前。在不同的窗口可以同时进行编程、绘图、运算、报错等各种操作,亦可随时终止或启动某一进程。

此外,SUN 机的 UNIX 操作系统的标准化,以及软件、硬件和通讯网络的标准化,加强了与其它厂家系统和网络的兼容性。SUN4 机采用 RISC,发明了先进的 SPARC 结构,由现在的 SUN3/200 的 4MIPS(每秒 4 百万次指令)提高到 SUN4/200 系列机的 10MIPS。

2. PAFEC-FE 有限元法分析通用软件包简介

PAFEC-FE 有限元法分析通用软件包是英国 PAFEC 公司自 1976 年以来的研究成果,可以在 SUN 和 APOLLO32 位超级微机图形工作站上运行。该软件包由 PIGS、DOGS、PAFEC 三个子系统,形成了一个内部严谨的数据传递和相互通讯的完整系统。PAFEC 是计算部分,PIGS 具有前处理和后处理的功能,而 PIGS 又是在基本图形功能 DOGS 系统之中。三者是不可分割的、相互密切联系的一个整体。

PAFEC-FE 通用软件包采用三维有限元模型,运用静力学、动力学、热力学等知识,将图形——力学分析——图形融为一体,用 FORTRAN 和 C 语言编制而成,其前处理和后处理的图形功能很强,可以用于静力学、动力学、热力学以及非线性静力学(如塑性、蠕变、大位移等)等各类问题的分析。

PIGS 的前处理功能主要指,可以由 PIGS 形成由 PAFEC 运行的数据文件。通过运行 PIGS 采用人机对话,自动进行单元的划分、结点与单元的编号,从而自动生成有限元分析的网络。此外,通过加入必须的边界条件、荷载条件,从而自动生成相应的数据文件。凡由 PIGS 生成的图形均形成相应的数据文件,稍加修改即被 PAFEC 接受,进行分析和运算。

PIGS 的后处理功能主要指可以通过运行 PIGS 对 PAFEC 运行的结果进行分析,并由图形表示出来,主要包括:静力荷载作用下的位移场,动力模拟各瞬态响应时刻的位移场,应力场及应力等值线,温度场及温度等值线等等。分析结果可以通过色彩来表示,也可以通过线条来表示。

PAFEC 包括 10 个独立的计算机程序,当它们连续运行后就可以给出一个完整的工程分析。每一个这样的程序叫做一个阶段(PHASE)。一个完整的工程分析最起码要求有 PHASE=1、4、6、7 四个阶段,即读入数据模块(PHASE=1),考虑问题的一些限制,并导出自由度的一些编号系统(PHASE=4),求出所有单元的刚度(PHASE=6),解系统方程组,得到所处理问题中初始未知量位移、温度等(PHASE=7),其它阶段根据问题的需要而给出。

§ 7.3 土体二维非线性流变问题有限元法 解析的增量-迭代方法

7.3.1 土体线性流变的有限元法解析

土体的流变问题,理论上可以采用 Laplace 变换来求解。但从实践中可见,除了一些比较简单的问题外,由于拉氏反演的困难,对地下结构的许多实际问题,还难以用这类解析解来求出计算结果。至于非线性流变问题,除了一些极简单的问题外,就更难以用解析方法求解。而采用有限元数值分析方法,对求解岩土力学和地下结构中的复杂情况是非常有效的。

在流变问题的有限元解析中,一般采用“时步-粘性初应变法”描述,也就是把粘性应变看成初应变,对每一时步叠加上相应的初应变,对于线性流变问题,只要连续不断地求解线性弹性方程,就可能得到应力、应变等随时间的变化情况。下面以地基基础工程中的基坑开挖问题为例,来说明线性流变有限元解析的“时步-粘性初应变法”的思路与步骤;

总的应变 $\{\epsilon\}$ 分为弹性应变 $\{\epsilon_e\}$ 和粘性应变 $\{\epsilon_v\}$,即

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_e\} + \{\epsilon_v\} \quad (7.3-1)$$

其中粘性应变 ϵ_v 就是粘弹性应变 ϵ_{ve} 和粘塑性应变 ϵ_{vp} 。

弹性应变 $\{\epsilon_e\}$ 与应力 $\{\sigma\}$ 成线性关系,即物理方程为:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon_e\} = [D] \{\epsilon\} - \{\epsilon_v\} \quad (7.3-2)$$

$[D]$ ——弹性矩阵。

而几何方程为:

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\} \quad (7.3-3)$$

由式(7.3-2)可得单元结点力为:

$$\begin{aligned} \{F\} &= \int_v [B]^T \{\sigma\} dv = \int_v [B]^T [D] \{\epsilon\} - \{\epsilon_v\} dv \\ &= \int_v [B]^T [D] [B] \{\delta\} - \{\epsilon_v\} dv \\ &= \int_v [B]^T [D] [B] dv \cdot \{\delta\} - \int_v [B]^T [D] \{\epsilon_v\} dv \end{aligned}$$

$$=[K]\{\delta\}-\{F_v\} \quad (7.3-4)$$

而,单元平衡方程为

$$[K]\{\delta\}=\{F\}+\{F_v\} \quad (7.3-4a)$$

因此,如果把粘性应变 $\{\varepsilon_v\}$ 当作初应变,式(7.3-4a)中的 $\{F_v\}$ 即表示由于粘性应变这一初应变而产生的单元结点荷载,即

$$\{F_v\}=\int_v [B]^T [D] \{\varepsilon_v\} dv \quad (7.3-5)$$

而 $[K]$ 为单元刚度矩阵:

$$[K]=\int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (7.3-6)$$

所以由(7.3-4a)式可写出总体平衡方程为:

$$[K]\{\delta\}=\{F\}+\{F_v\} \quad (7.3-7)$$

式中 $\{F\}=\sum \{F\}$, $\{F\}$ 即为总的结点荷载。

而 $[K]$ 为总体刚度矩阵

$$[K]=\sum [K] \quad (7.3-8)$$

$\{F_v\}$ 为粘性应变所产生的总的附加结点荷载

$$\{F_v\}=\sum \{F_v\} \quad (7.3-9)$$

下面来说明基坑开挖问题中平衡方程(7.3-7)式的求解过程:

对于基坑开挖问题, $\{F\}$ 即为作用于基坑开挖边界结点处的释放荷载,一般认为它不随时间而变化,而此时由物理方程(7.3-2)式所得到的就是由于基坑开挖所引起的释放应力场 $\{\sigma^r\}$ 。总的应力场 $\{\sigma\}$ 应为释放应力场 $\{\sigma^r\}$ 与初始地应力场 $\{\sigma^d\}=[\sigma_x^d, \sigma_y^d, 0]^T$ 的叠加,即 $\{\sigma\}=\{\sigma^r\}+\{\sigma^d\}$ 。

1. 初始开挖阶段

在基坑形成之初,粘性应变尚未发展,即此时 $t=0$, $\{\varepsilon_v^0\}=0$, $\{F_v^0\}=0$ 。所以,由平衡方程(7.3-7)式可求得开挖瞬时的位移场 $\{\delta\}_0$,再由几何方程(7.3-3)和物理方程(7.3-2)可求得开挖瞬时的应变场 $\{\varepsilon\}_0$ 和释放应力场 $\{\sigma^r\}_0$;叠加上初始地应力场 $\{\sigma^d\}$,就可得到开挖瞬时总的应力场 $\{\sigma\}$ 。

2. 粘弹性或粘塑性阶段

(1) 粘弹性和粘塑性阶段的判别

在任一时步 t_i ,都需对每个单元把总的应力 $\{\sigma\}_i$ (第 i 时步的释放应力场 $\{\sigma^r\}_i$ 与初始地应力场 $\{\sigma^d\}$ 的叠加)化成主应力 $[\sigma_1, \sigma_2, 0]^T$,并按下式计算主应力平均值 σ_m 和等效应力 $\bar{\sigma}$:

$$\sigma_m=(\sigma_1+\sigma_2)/2 \quad (7.3-10)$$

$$\bar{\sigma}=\sqrt{J_2} \quad (7.3-11)$$

式中,

$$J_2=[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]/6 \quad (7.3-12)$$

$$\sigma_3=\mu(\sigma_1+\sigma_2) \quad (7.3-13)$$

按 Drucker-Prager 屈服准则,由下式计算屈服函数:

$$F = \frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \sigma_m + \sqrt{3}\bar{\sigma} - \frac{6c \cdot \cos\varphi}{3 - \sin\varphi} \quad (7.3-14)$$

判断 F 值是否小于 0 ,若 $F < 0$,则该单元属粘弹性阶段 ,否则为粘塑性阶段。需各个单元逐一判断。

(2) 粘弹性或粘塑性阶段的粘性附加结点荷载 $\{F_v\}$

粘弹性阶段时 ,粘性应变 $\{\epsilon_v\}$ 就是粘弹性应变 $\{\epsilon_{ve}\}$,而 t_i 时刻的粘弹性应变 $\{\epsilon_{ve}\}_i$ 可以根据所采用的流变模型计算得到。比如对于单一 Kelvin 粘弹性模型有 :

$$\{\epsilon_{ve}\}_i = \exp(-E/\eta \cdot \Delta t) \{\epsilon_{ve}\}_{i-1} + [A] \{\sigma\} / E \cdot [1 - \exp(-E/\eta \cdot \Delta t)] \quad (7.3-15)$$

计算时假定 Δt 时步内的 $\{\sigma\}$ 的值保持不变 ,并等于上一时步已求得的 $\{\sigma\}$ 的值。这样 ,就可从已求得的 $\{\epsilon_{ve}\}_{i-1}$ 的值及式 (7.3-15) 求得 $\{\epsilon_{ve}\}_i$ 。式 (7.3-15) 中 $[A]$ 为泊松比矩阵 ,对于平面应变问题为 :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -\mu/(1-\mu) & 0 \\ -\mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/(1-\mu) \end{bmatrix}$$

得到了粘弹性应变 $\{\epsilon_{ve}\}$,就可由式 (7.3-5) 求得因粘弹性应变引起的附加结点粘性荷载 $\{F_v\}$ 。

当经过若干时步的计算后 ,设在 t_i 时刻 ,某一单元出现屈服函数 $F > 0$,则该单元开始进入粘塑性阶段。 t_j 时刻的粘塑性应变 $\{\epsilon_{vp}\}_j$ 可以根据相应的流变模型计算得到 ,比如对于 Bingham 粘塑性模型 ,沿用 Drucker-Prager 屈服准则和相关联的流动法则 ,可得粘塑性应变率为 :

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}_{op}\} &= \frac{1}{\eta} \left(\left[\frac{F}{F_0} \right] \right) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \\ &= \frac{1}{\eta F_0} \left(\frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \sigma_m + \sqrt{3}\bar{\sigma} - \frac{6c \cdot \cos\varphi}{3 - \sin\varphi} \right) \left(\frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \frac{[P]}{9\sigma_m} + \frac{\sqrt{3}[Q]}{2\bar{\sigma}} \right) \{\sigma\} \end{aligned} \quad (7.3-16)$$

式中 F_0 为使系数无量纲 ,对屈服函数 F 取用的任意参考值 ,可取为 1 ;

η 为粘塑性系数。

$[P]$ $[Q]$ 为系数矩阵 ,对平面问题有

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 t_j 时刻的粘塑性应变 $\{\epsilon_{vp}\}_j$ 时 ,可以假定 Δt 时步内粘塑性应变率的值保持不变 ,并等于上一时刻的粘塑性应变率 $\{\dot{\epsilon}_{vp}\}_{j-1}$,而 $\{\dot{\epsilon}_{vp}\}_{j-1}$ 可由式 (7.3-16) 及上一时刻的应力水平 $\{\sigma\}_{j-1}$ 求得。于是 , t_j 时刻的粘塑性应变 $\{\epsilon_{vp}\}_j$ 就可以从上一时刻已求得的粘塑性应变 $\{\epsilon_{vp}\}_{j-1}$ 累加计算而得 ,即

$$\{\epsilon_{vp}\}_j = \{\epsilon_{vp}\}_{j-1} + \{\dot{\epsilon}_{vp}\}_{j-1} \Delta t \quad (7.3-17)$$

粘性附加结点荷载 $\{F_v\}_j$ 可由式 (7.3-5) 通过粘塑性应变 $\{\epsilon_{vp}\}_j$ 计算而得。

有了各个单元的粘性附加结点荷载 $\{F_v\}_j$,就可由式 (7.3-9) 求出总的粘性附加结点荷载 $\{F_v\}$ 。

(3) 应变 $\{\epsilon\}$ 和应力 $\{\sigma\}$ 的求解

有了粘性附加结点荷载 $\{F_v\}$ 就可通过求解整体平衡方程(7.3-7)式得到该时刻的位移 $\{\delta\}$,再由几何方程(7.3-3)和物理方程(7.3-2)就可求得该时刻的应变场 $\{\epsilon\}$ 和释放应力场 $\{\sigma^r\}$,叠加初始地应力场 $\{\sigma^d\}$ 就可得到该时刻的总的应力场 $\{\sigma\}$,按时步增量,将 $\{F_v\}$ 视为随时间不断增长变化的粘性初应变 $\{\epsilon_v\}$ 所引起的可变的附加结点荷载,通过上面的逐次计算,就能得到各个时刻的位移场、应变场和应力场。

7.3.2 土体非线性流变有限元解析的二次初应变法

非线性流变问题可以分为三类:材料非线性问题,几何非线性问题,以及材料非线性和几何非线性两者都涉及到的最一般非线性问题。

从本书前面的研究知道,这里所研究的非线性流变问题是指材料非线性问题,即材料的物理定律——应力-应变关系是非线性的,但只考虑小位移和小应变的情况,也就是指整个结构几何形状的变化以及结构材料内部的应变与结构尺寸相比是无限小的,因此应变与位移关系还是采用线性的应变与位移的关系式。

非线性流变问题的有限元法与线性流变有限元法相似之处在于都可采用“时步-粘性初应变法”来描述,即把粘性应变看成初应变,并按式(7.3-5)求得由于粘性初应变所引起的附加结点荷载 $\{F_v\}$ 。虽然非线性粘性初应变与应力水平有关,但由于假定在同一时步 Δt 内的应力值不变,因此非线性粘性应变在同一时步 Δt 内还是与线性粘性应变一样为常量;同样,由非线性粘性应变所引起的附加结点荷载在同一时步 Δt 内也是常量。

非线性流变与线性流变不同之处在于线性流变的应力-应变关系是线性的,式(7.3-7)的总体平衡方程是线性的,总体刚度矩阵 $[K]$ 是常刚度矩阵;而非线性流变的应力-应变关系是非线性的,因此式(7.3-7)的总体平衡方程是非线性的,总体刚度矩阵 $[K]$ 不再是常刚度矩阵,而是与应力或应变有关。因此,在每一时步,必须采用求解非线性方程的方法来求解非线性总体平衡方程。非线性方程的求解主要是用迭代法,其中包括常刚度迭代法、割线刚度迭代法、切线刚度迭代法等。

非线性问题的求解除了迭代法外,同样也可采用初应变法,即把总的非线性弹性应变 $\{\epsilon_e\}$ 分为线性弹性应变 $\{\epsilon_{le}\}$ 和偏离线性弹性应变的非线性弹性应变部分 $\{\epsilon_{ne}\}$ 。其中,线性弹性应变 $\{\epsilon_{le}\}$ 与应力 $\{\sigma\}$ 成线性关系,而非线性弹性应变 $\{\epsilon_{ne}\}$ 作为初应变,同样,这一初应变 $\{\epsilon_{ne}\}$ 会引起附加结点荷载,如上通过反复的求解,就能得到非线性问题的解。

因此,非线性流变问题的求解可以先把粘性应变 $\{\epsilon_v\}$ 看作初应变,采用时步-粘性初应变法,然后,在每一时步 Δt 中,把粘性初应变 $\{\epsilon_v\}$ 及由于粘性初应变 $\{\epsilon_v\}$ 所引起的附加粘性结点荷载 $\{F_v\}$ 得出的作为非线性弹性应变并视为二次初应变处理,通过如上述的反复求解,直到前后两次解得的结果误差小于规定限值为止,从而得到该时步的位移、应变、应力等。然后再算下一时步,如此继续下去,就可得到非线性流变问题的解。可以看出,非线性流变问题的求解过程中运用了两次初应变法,即时步粘性初应变法和非线性弹性初应变法,因此此处对非线性流变的有限元解析可以称为“二次初应变法”。

下面给出求解非线性流变问题采用二次初应变法的思路及步骤:

对于时步-粘性初应变法的每一时步均可列出

$$\text{几何方程} \quad \{\epsilon\} = [B][K]\{\delta\} \quad (7.3-18)$$

$$\text{物理方程} \quad \{\sigma^r\} = [D][K]\{\epsilon_{le}\} = [D][\{\epsilon\} - \{\epsilon_v\} - \{\epsilon_{ne}\}] \quad (7.3-19)$$

$$\text{平衡方程} \quad [K]\{\delta\} = \{F\} + \{F_v\} + \{F_{ne}\} \quad (7.3-20)$$

以上三式中, $\{\epsilon_{le}\}$ 、 $\{\epsilon_{ne}\}$ 分别为线性弹性应变和非线性弹性应变, $\{F_{ne}\}$ 为由于非线性弹性应变 $\{\epsilon_{ne}\}$ 所引起的附加结点荷载, 为:

$$\{F_{ne}\} = \sum_v \int_v [B]^T D \{\epsilon_{ne}\} dv \quad (7.3-21)$$

其余各个量的物理意义及其表达式均与上一节的完全相同。

下面来说明各个时步中的非线性弹性初应变法:

在每一时步中, 释放荷载 $\{F\}$ 是不变的常量, 且假定粘应变 $\{\epsilon_v\}$ 及由其引起的附加粘性结点荷载 $\{F_v\}$ 也是不变的, 而非线性弹性应变 $\{\epsilon_{ne}\}$ 及其引起的附加结点荷载 $\{F_{ne}\}$ 则是可变的量, 且取其初应变 $\{\epsilon_{ne}\}$ 的初始值为 0, 即

$$\{\epsilon_{ne}\}^0 = 0 \quad (7.3-22)$$

因而

$$\{F_{ne}\}^0 = 0 \quad (7.3-23)$$

非线性弹性初应变法的平衡方程、物理方程和几何方程为:

$$[K]\{\delta\}_i^j = \{F\} + \{F_v\}_i^j + \{F_{ne}\}_i^{j-1} \quad (7.3-24)$$

$$\{\sigma^r\}_i^j = [D] \{\epsilon\}_i^j - \{\epsilon_v\}_i^j - \{\epsilon_{ne}\}_i^j \quad (7.3-25)$$

$$\{\epsilon\}_i^j = [B]\{\delta\}_i^j \quad (7.3-26)$$

上面三式中, 下标 i 代表第 i 时步, 而上标 j 代表第 i 时步中的第 j 步。

第 $j-1$ 步的非线性弹性初应变 $\{\epsilon_{ne}\}_i^{j-1}$ 的值可由第 $j-1$ 步的应力 $\{\sigma^r\}_i^{j-1}$ 通过非线性的应力、应变关系求得, 即

$$\{\epsilon_{ne}\}_i^{j-1} = \{\{\epsilon_{ne}\} \{\sigma^r\}\}_i^{j-1} \quad (7.3-27)$$

再由式 (7.3-27) 就可求得 $\{F_{ne}\}_i^{j-1}$ 。

重复以上的步骤, 直至两次解得的结果误差小于规定限值为止。得到了这一时步的位移、应变和应力, 就可进入到下一时步, 至于时步一初应变法的步骤与上一节所述的完全相同。

图 7.3-1 为考虑具有所选用流变模型的基坑开挖土层非线性流变问题有限元解析的二次初应变法的程序框图。

非线性粘性应变可以根据相应的非线性流变模型计算得到。如本书第 4 章第 4 节所建立的上海淤泥质粘土的非线性流变模型, 其非线性粘塑性应变 ϵ_{vp} 为:

$$\epsilon_{vp} = \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{A_0} \right)^{m_0} + \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{A_t} \right)^{m\beta} \quad (7.3-28)$$

为了把式 (7.3-28) 从一维情况推广到多维情况, 可以仿照 Bingham 粘塑性模型的做法。我们知道, 一维 Bingham 粘塑性模型的粘塑性应变率 $\dot{\epsilon}_{vp}$ 写为:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = (\sigma - \sigma_s)^\gamma \eta \quad (7.3-29)$$

把一维 Bingham 粘塑性模型推广到多维情况, 式 (7.3-29) 成为:

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = 1/\eta \left[(F/F_0) \right]^{1/Q} \partial \{\sigma\} \quad (7.3-30)$$

式 (7.3-30) 中 (F/F_0) —— 开关函数, 如 $F < 0$ 则 $(F/F_0) = 0$;

如 $F > 0$ 则 $(F/F_0) = F/F_0$ 。

F ——屈服函数 根据材料性质选定。

F_0 ——为使系数为无量纲而采用的一任意值 通常取 1。

Q ——塑性势 如 $Q = F$ 称为相关联流动法则；
如 $Q \neq F$ 称为不相关联流动法则。

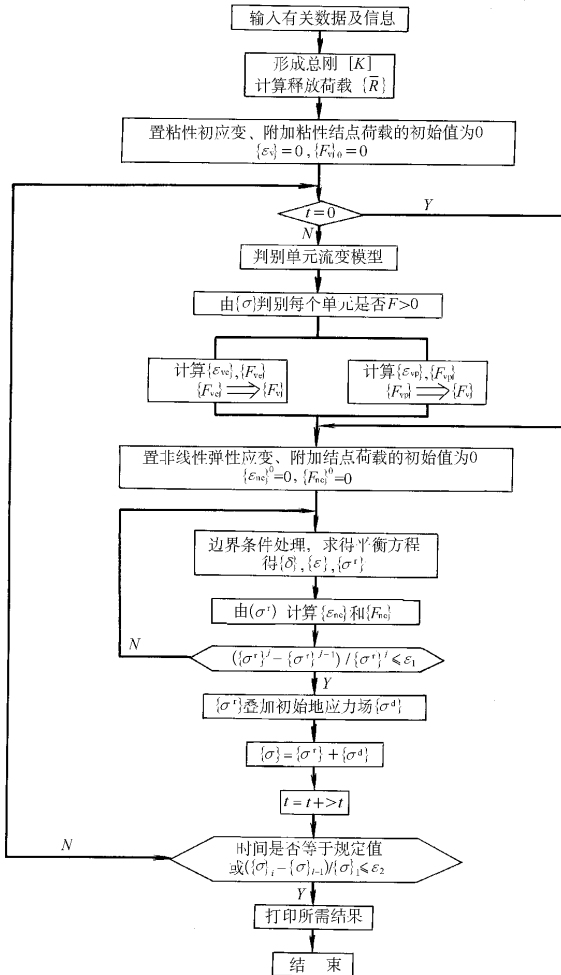


图 7.3-1 考虑具有给定非线性流变模型土层的
基坑开挖非线性流变有限元解析的二次初应变法程序框图

对照式 (7.3-29) 和 (7.3-30) 可知, 一维情况下的过应力 $\sigma - \sigma_s$ 与多维情况下屈服函数及塑性势的函数 $(F/F_0) \cdot \partial Q / \partial \{\sigma\}$ 相当。当把一维情况推广到多维情况时, 只要把 $\sigma - \sigma_s$ 替换成 $(F/F_0) \cdot \partial Q / \partial \{\sigma\}$ 即可。因此, 可用同样的方法把式 (7.3-28) 的一维情况推广到多

维情况,即:

$$\{\epsilon_{\text{vnp}}\} = \left[\frac{1}{A_0} \left(\frac{F}{F_0} \right) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right]^{m_0} + \left[\frac{1}{A_t} \left(\frac{F}{F_0} \right) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right]^m \cdot t^\beta \quad (7.3-31)$$

若沿用 Drucker-Prager 屈服准则和相关联流动法则,令 $Q = F$ 则有:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{F_0} \right) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} &= \left(\frac{F}{F_0} \right) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \\ &= \frac{1}{F_0} \left[\frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \sigma_m + \sqrt{3} \bar{\sigma} \frac{6c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \cdot \frac{[P]}{9\sigma_m} + \frac{\sqrt{3} [Q]}{2\bar{\sigma}} \right] \{\sigma\} \end{aligned} \quad (7.3-32)$$

式(7.3-32)中各个量的具体含义可参见上一部分。

最后,在下面再来推导一下用两个 Kelvin 模型串联而成的普遍 Kelvin 模型的线性粘弹性应变的计算公式:

从上面知道,对于单一的 Kelvin 模型,其粘弹性应变的计算公式为:

$$\{\epsilon_{\text{ve}}\}_i = \exp(-E/\eta \Delta t) \{\epsilon_{\text{ve}}\}_{i-1} + [A/K_\sigma] \{1 - \exp(-E/\eta \Delta t)\} \quad (7.3-33)$$

两个 Kelvin 模型串联而成的粘弹性应变可由每一个 Kelvin 模型的粘弹性应变相加而成,如对第 i 时步即:

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{\text{ve}}\}_i &= \{\epsilon_{\text{ve}1}\}_i + \{\epsilon_{\text{ve}2}\}_i \\ &= \sum_{r=1}^2 \exp(-E_r/\eta_r \Delta t) \{\epsilon_{\text{ve}r}\}_{i-1} \\ &\quad + [A/K_\sigma] \sum_{r=1}^2 1/E_r (1 - \exp(-E_r/\eta_r \Delta t)) \end{aligned} \quad (7.3-34)$$

从式(7.3-34)可以看见,只要知道了前一时刻每个 Kelvin 模型的粘弹性应变 $\{\epsilon_{\text{ve}r}\}_{i-1}$ ($r=1, 2$),就能得到该时刻每个 Kelvin 模型的粘弹性应变 $\{\epsilon_{\text{ve}r}\}_i$ ($r=1, 2$)和总的粘弹性应变 $\{\epsilon_{\text{ve}}\}_i$ 。因此,根据式(7.3-34)的递推公式,只要知道初始时刻的每个 Kelvin 模型的粘弹性应变 $\{\epsilon_{\text{ve}r}\}_0$ ($r=1, 2$)就能求得每时刻的总的粘弹性应变。对于实际问题,可以认为初始时刻 $t=0$ 时,即开挖瞬时,粘弹性应变尚未发生,即 $\{\epsilon_{\text{ve}}\}_0 = 0$,并且可假定 $t=0$ 时每个 Kelvin 模型的粘弹性应变也尚未发生,即 $\{\epsilon_{\text{ve}r}\}_0 = 0$ ($r=1, 2$)。以上的讨论也完全适用于 N ($N=1, 2, \dots$)个 Kelvin 模型串联而成的普遍 Kelvin 模型的情况。

已如上述,上海地区淤泥质粘土的非线性粘弹塑性总应变可采用线性粘弹性应变与非线性粘塑性应变两者之和。也就是(7.3-31)与(7.3-34)两式之和。

第 8 章 三维非线性流变问题解析

在所有非弹性变形中,总存在着时间变化率的影响,特别对于软粘土为主的我国沿海广大地域的软弱土层而言,因其反映出明显的流变性态,并且呈强烈的非线性性质。所以,土体变形的时间效应问题对土体介质材料的力学属性具有重大影响。对于瞬时弹性变形,以及随时间增长变化的粘弹性变形和粘塑性变形等力学现象,单纯用试验观察的方法是无法确切区别的,本章描述的数值理论和方法可以同时考虑这三种影响的各自量值及其综合效应。

由于不同类型的材料呈现不同弹塑性特征这一事实,使得此处所讨论的问题变得复杂化了。本章将给出便于数值计算的四种常用屈服准则。

§ 8.1 三维非线性流变问题的基本表达式

在处理非线性连续体问题时,通常总是把总应变 ϵ 分成瞬时弹性应变分量 ϵ_e 、粘弹性分量 ϵ_{ve} (包括线性部分 $\epsilon_{l,ve}$ 和非线性部分 $\epsilon_{n,ve}$)、粘塑性分量 ϵ_{vp} ($= \epsilon_{l,vp} + \epsilon_{n,vp}$, 亦即线性部分和非线性部分), 因此总应变可表示为:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_e + \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp} \\ &= \epsilon_e + \epsilon_{l,ve} + \epsilon_{n,ve} + \epsilon_{l,vp} + \epsilon_{n,vp}\end{aligned}\quad (8.1-1)$$

在前文试验分析的基础上,下面将分别给出(8.1-1)式各项的三维表达式。

依赖于瞬时弹性应变的总应力为:

$$\sigma = [D] \cdot \epsilon_e \quad (8.1-2)$$

则 $\epsilon_e = [D]^{-1} \sigma$

其中 $[D]$ 为弹性矩阵。

一般来说,即使处于弹性阶段,材料的应变仍然包含线性流变和非线性流变两部分,但对于泥岩(mudstone)及淤泥质粘土等,三轴试验结果表明,材料在弹性阶段非线性流变不明显,所以可以忽略弹性阶段的非线性流变。参照前文试验分析,弹性流变可由两个串联的 Kelvin 模型的各自应变叠加成总的粘弹性应变:

$$\epsilon_{ve} = \sum_{i=1}^2 \epsilon_{ve,i} \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t} + \sum_{i=1}^2 \frac{[A] \cdot \sigma}{E_i} (1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t}) \quad (8.1-3)$$

其中 $\epsilon_{ve,i}$ 为第 i 个 Kelvin 模型的粘弹性应变;

$$[A] = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)^2}{E(1-3\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu(4\mu-1)}{(1-2\mu)^2} \frac{-\mu}{(1-2\mu)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu(4\mu-1)}{(1-2\mu)^2} & 1 & \frac{-\mu}{(1-2\mu)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu}{(1-2\mu)^2} & \frac{-\mu}{(1-2\mu)^2} & \frac{1}{(1-2\mu)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\chi(1-3\mu)}{(1-2\mu)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi(1-3\mu)}{(1-2\mu)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\chi(1-3\mu)}{(1-2\mu)^2} \end{bmatrix}$$

(8.1-4)

对于线性粘塑流变的应变增量 ,可采用如下计算方法：

$$\Delta \epsilon_{l\ np} = \dot{\epsilon}_{l\ np} \cdot \Delta t$$

(8.1-5)

$$\dot{\epsilon}_{l\ np} = \frac{1}{\eta_M} \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

(8.1-6)

式中 η_M ——粘性系数；
 F ——材料的屈服函数 , $Q = Q(\sigma, \epsilon_{l\ np}, k)$ 是塑性势；
 $\Phi(F)$ ——用来判别材料是否进入屈服和表征塑性发展程度的一个开关函数，
项 $\Phi(F)$ 对 $F > 0$ 是正的单调递增函数，符号 Φ 表示：

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } F > 0, \Phi(F) = \Phi(F) \\ &\text{当 } F \leq 0, \Phi(F) = 0 \end{aligned} \right\}$$

(8.1-7)

如果我们仍然只限于相关联塑性流动法则的情形 ,这时有 $F \equiv Q$,则表达式 (8.1-6) 可变为：

$$\dot{\epsilon}_{l\ np} = \frac{1}{\eta_M} \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{1}{\eta_M} \Phi(F) a$$

(8.1-8)

其中流变矢量 a 有如下形式：

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right]$$

(8.1-9)

$\Phi(F)$ 可有以下三种形式：

$$(1) \Phi(F) = F - F_0$$

(8.1-10)

$$(2) \Phi(F) = \exp [M \cdot (F - F_0) / F_0] - 1$$

(8.1-11)

$$(3) \Phi(F) = ((F - F_0) / F_0)^N$$

(8.1-12)

式中 M, N 为常数 ,对岩土材料可取为 1.0。

对于线性粘塑性应变关于时域离散表达式 ,有：

$$\Delta \epsilon_{l\ np}^{t+\Delta t} = \Delta t [(1 - \Theta) \dot{\epsilon}_{l\ np}^t + \Theta \dot{\epsilon}_{l\ np}^{t+\Delta t}]$$

(8.1-13)

其中

$$\textcircled{\text{H}} = \begin{cases} 0 & \text{—全显式法或向前差分法} \\ \frac{1}{2} & \text{—隐式梯形式或 Crank-Nicolson 法则} \\ 1 & \text{—全隐式法或向后差分法} \end{cases}$$

要求出公式(8.1-13)中的 $\dot{\epsilon}_{l\text{ }np}^{t+\Delta t}$ 可采用有限的 Taylor 级数展开式并写成:

$$\dot{\epsilon}_{l\text{ }np}^{t+\Delta t} = \dot{\epsilon}_{l\text{ }np}^t + [H^t] \cdot \Delta\sigma^{t+\Delta t} [H^t] = \frac{\partial \dot{\epsilon}_{l\text{ }np}^t}{\partial \sigma^t} = [H(\sigma^t)] \quad (8.1-14)$$

其中 $\Delta\sigma^t$ 是在时间间隔 Δt 内产生的应力改变量 将式(8.1-14)代入(8.1-13)得:

$$\Delta\epsilon_{l\text{ }np}^{t+\Delta t} = \dot{\epsilon}_{l\text{ }np}^t \cdot \Delta t + [C^t] \cdot \Delta\sigma^{t+\Delta t} \quad (8.1-15)$$

$$\text{式中 } [C^t] = \textcircled{\text{H}} \cdot \Delta t \cdot [H^t] \quad (8.1-16)$$

矩阵 H^t 与应力有关 将在 § 8.2 中介绍它的具体形式。

求算非线性粘塑性应变可按式:

$$\epsilon_{n\text{ }np} = \left(1/A_0 \cdot \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)^{m_0} + \left(1/A_t \cdot \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)^m \cdot t^\beta \quad (8.1-17)$$

式中 A_0, A_t, m_0, m, β 值见 § 4.10

取 $Q=F$, $\Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$ 意义同(8.1-6)式。

非线性粘塑性应变的增量可由两个时步的应变值之差求得:

$$\Delta\epsilon_{n\text{ }np}^{t+\Delta t} = \epsilon_{n\text{ }np}^{t+\Delta t} - \epsilon_{n\text{ }np}^t \quad (8.1-18)$$

结合式(8.1-3)(8.1-15)及(8.1-18)可得:

$$\Delta\sigma^{t+\Delta t} = [I + D \cdot C^t]^{-1} \cdot [D] \cdot [\epsilon^{t+\Delta t} - \epsilon_{ve}^t - \epsilon_{l\text{ }np}^t - \epsilon_{n\text{ }np}^t] \quad (8.1-19)$$

$$\text{令 } \hat{D} = [I + D \cdot C^t]^{-1} \cdot [D] \quad (8.1-20)$$

综合以上各式 则在 t 时刻总的应变量为:

$$\epsilon^t = \epsilon_e^t + \epsilon_{ve}^t + \epsilon_{l\text{ }np}^t + \epsilon_{n\text{ }np}^t = \epsilon_e^t + \epsilon_v^t \quad (8.1-21)$$

总的应变增量用位移增量来表示:

$$\Delta\epsilon^t = [B^t] \cdot \Delta\delta^t \quad (8.1-22)$$

则任一瞬时 t 都要满足平衡方程

$$\int_{\Omega} [B^t]^T \sigma^t d\Omega - F_0^t = 0 \quad (8.1-23a)$$

在时间增量过程中 须满足增量形式的平衡方程 即:

$$\int_{\Omega} [B^t]^T \Delta\sigma^t d\Omega - \Delta F_0^t = 0 \quad (8.1-23b)$$

式中 ΔF_0^t 表示在时间间隔 Δt 内由作用的面力、体力、加荷、卸荷等所产生的等效结点载荷矢量的变化。工程中大量问题的载荷增量是按不连续的时间间隔施加的 除了第一次时间间隔有增量变化外 对于其它时步都有 $\Delta F_0^t = 0$ 。

由式(8.1-19)(8.1-21)及(8.1-23b)可以算出在时间步长 Δt 的位移增量:

$$\Delta\delta^t = [K_T^t]^{-1} \cdot \Delta V^t \quad (8.1-24)$$

$$\text{其中 } \Delta V^t = \int_{\Omega} [B^t]^T \hat{D}^t \epsilon_v^t d\Omega + \Delta F_0^t \quad (8.1-25)$$

$$[K_T^t] = \int_{\Omega} [B^t]^T \cdot [\hat{D}^t] [B^t] d\Omega \quad (8.1-26)$$

则总应力和总位移为：

$$\delta^{t+\Delta t} = \delta^t + \Delta\delta^t \quad (8.1-27)$$

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta\sigma^t \quad (8.1-28)$$

由于应力增量是根据增量平衡方程(8.1-23b)的线性化形式计算的,因此,累加上述所有增量应力而得到的总应力 $\sigma^{t+\Delta t}$ 不是准确值,不能精确地满足平衡方程(8.1-23a),可用以下方法进行修正：

首先由式(8.1-19)(8.1-28)计算 $\sigma^{t+\Delta t}$,利用位移 $\delta^{t+\Delta t}$ 计算 $B^{t+\Delta t}$,然后计算残余力即不平衡力 $\psi^{t+\Delta t}$ 。

$$\psi^{t+\Delta t} = \int_{\Omega} [B^{t+\Delta t}]^T \sigma^{t+\Delta t} d\Omega - F_0^{t+\Delta t} \neq 0 \quad (8.1-29)$$

将上面各式加到伪载荷增量矢量上,以便为下一时间步长计算之用。

$$\Delta V^{t+\Delta t} = \int_{\Omega} [B^{t+\Delta t}]^T [\hat{D}^{t+\Delta t}] \epsilon_v^{t+\Delta t} d\Omega + \Delta F_0^{t+\Delta t} + \psi^{t+\Delta t} \quad (8.1-30)$$

采用以上方法就免去了一次迭代过程,同时还能减小误差。

§ 8.2 适用于数值计算的屈服准则——四种屈服准则的 H^t 矩阵计算

8.2.1 屈服准则的一般描述

屈服准则是用来确定开始塑性变形时应力的大小,它可写成一般形式：

$$f(\sigma_{ij}) = k(\kappa) \quad (8.2-1)$$

式中 f 表示某个函数; k 是要由实验来确定的材料参数,它是强化参数 κ 的一个函数。

8.2.2 便于数值计算的四种常用屈服准则

为便于进行数值计算,把屈服函数改写成另一种应力不变量的形式,其主要优点是可以利用计算机对普通形式的屈服函数和流动法则编出程序,而对于任一种特殊的准则只要三个常数就能确定。

对于主应力分量由下式计算求得：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = 2 \cdot \sqrt{\frac{J_2'}{3}} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(\theta + 2\pi/3) \\ \sin\theta \\ \sin(\theta + 4\pi/3) \end{Bmatrix} + \frac{J_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (8.2-2)$$

式中 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 且 $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$, θ 值可由下式确定：

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3'}{(J_2')^{3/2}} \right) \quad (8.2-3)$$

其中 J_1 为应力第一不变量；

J_2' 为应力偏量的第二不变量；

J_3' 为应力偏量的第三不变量。

四种屈服准则都可用 J_1 , J_2' 和 θ 表示如下：

1. Tresca 屈服准则：

$$2\sqrt{\frac{J_2'}{3}}\left[\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = Y(\kappa) \quad (8.2-4)$$

展开可得：

$$2\sqrt{J_2'}\cos\theta = Y(\kappa) = \sqrt{3}k(\kappa) = \sigma_Y(\kappa) \quad (8.2-5)$$

2. Von Mises 屈服准则：

$$\sqrt{J_2'} = k(\kappa) \quad (8.2-6)$$

$$\text{或 } \sqrt{3J_2'} = \sigma_Y(\kappa) \quad (8.2-7)$$

3. Mohr-Coulomb 屈服准则：

$$\frac{1}{3}J_1\sin\phi + \sqrt{J_2'}\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi\right) = c \cdot \cos\phi \quad (8.2-8)$$

其中 c 为粘聚力, ϕ 为内摩擦角。

4. Drucker-Prager 屈服准则：

$$\alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = k' \quad (8.2-9)$$

在每个截面上为使 Drucker-Prager 圆与 Mohr-Coulomb 六边形的外顶点相吻合, 则 α , k' 必须满足：

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)}, \quad k' = \frac{6 \cdot c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad (8.2-10)$$

若要使 Drucker-Prager 圆能同 Mohr-Coulomb 六边形的内部顶点相吻合, 则必须有：

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin\phi)}, \quad k' = \frac{6 \cdot c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin\phi)} \quad (8.2-11)$$

8.2.3 弹塑性分析矩阵表述

由上面屈服准则可获得弹塑性本构关系的表达式

$$d\sigma = [D_{ep}]de \quad (8.2-12)$$

$$[D_{ep}] = [D] - [A][A]^T / (H' + [A]^T a) [A] = [D]a \quad (8.2-13)$$

流动矢量 a 可写为：

$$a^T = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T = \frac{\partial F}{\partial J_1} \cdot \left(\frac{\partial J_1}{\partial \sigma} \right)^T + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2'}} \cdot \left(\frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma} \right)^T + \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right)^T \quad (8.2-14)$$

式中 $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$

微分式(8.2-3)得：

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{-\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial J_3'}{\partial \sigma} - \frac{3J_3'}{(J_2')^2} \cdot \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma} \right] \quad (8.2-15)$$

将(8.2-15)代入(8.2-14)则得：

$$a^T = (\partial F / \partial \sigma)^T = C_1 a_1^T + C_2 a_2^T + C_3 a_3^T \quad (8.2-16)$$

式中
$$\left. \begin{aligned} a_1^T &= \left(\frac{\partial J_1}{\partial \sigma} \right)^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\} \\ a_2^T &= \left(\frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma} \right)^T = \left\{ \sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ 2\tau_{yz} \ 2\tau_{zx} \ 2\tau_{xy} \right\} \sqrt{2J_2'}^{\frac{1}{2}} \\ a_3^T &= \left(\frac{\partial J_3'}{\partial \sigma} \right)^T = \left\{ (\sigma'_y \sigma'_z - \tau_{yz}^2 + J_2'/3)(\sigma'_x \sigma'_z - \tau_{zx}^2 + J_2'/3), \right. \\ &\quad \left(\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2'}{3} \right) 2\tau_{xz} \tau_{xy} - \sigma'_x \tau_{yz}, \\ &\quad \left. 2\tau_{xy} \tau_{yz} - \sigma'_y \tau_{xz} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.2-17)$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1}, C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2'}} \theta - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2'}} \frac{\partial F}{\partial \theta}, C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2\cos 3\theta \cdot (J_2')^{3/2}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (8.2-18)$$

只有常数 C_1, C_2, C_3 需要用屈服面来确定, 即当由一个屈服面改变为另一个屈服面时, 只有这三个常数必须改变, 表 8.2-1 给出了四种屈服准则下的常数 C_i , 以使编程简单化。

适用于数值分析的由屈服面所确定的常数 表 8.2-1

屈服准则	C_1	C_2	C_3
Tresca	0	$2\cos\theta(1 + \tan\theta\tan3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{J_2'} \frac{\sin\theta}{\cos3\theta}$
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{3}\sin\phi$	$\cos\theta(1 + \tan\theta \cdot \tan3\theta) + \sin\theta[\tan3\theta - \tan\theta]\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\sin\phi}{2J_2'\cos3\theta}$
Drucker-Prager	α	1.0	0

8.2.4 三维情况下, 四种屈服准则的 $[H^t]$ 矩阵表述形式

为了用全隐式或半隐式(梯形)时间步进法求解, 必须算出矩阵 $[C^t]$, 如式(8.1-16)所示, 它可用 $[H^t]$ 来表示。矩阵 $[H^t]$ 须由材料所使用的屈服准则以显式的形式确定。

由式(8.1-14)有:

$$[H^t] = \frac{1}{\eta_M} \cdot \left[\left\langle \frac{d\Phi}{dF} \right\rangle a \cdot a^T + \langle \Phi \rangle \frac{\partial a^T}{\partial \sigma} \right] \quad (8.2-19)$$

以下将分别讨论三维情形下四种屈服准则的 $[H^t]$ 的表述形式。

① Tresca 屈服准则的 $[H^t]$ 计算

由式(8.2-16)并将 C_1, C_2, C_3 值代入可得:

$$a^T = (2\cos\theta + 2\sin\theta \cdot \tan3\theta) a_2^T + \frac{\sqrt{3}}{J_2'} \frac{\sin\theta}{\cos3\theta} a_3^T \quad (8.2-20)$$

其中 a_2^T, a_3^T 见式(8.2-17)

$$\frac{\partial a^T}{\partial \sigma} = c_2 \frac{\partial a_2^T}{\partial \sigma} + c_3 \frac{\partial a_3^T}{\partial \sigma} + \frac{\partial c_2}{\partial \sigma} \cdot a_2^T + \frac{\partial c_3}{\partial \sigma} \cdot a_3^T \quad (8.2-21)$$

其中
$$\frac{\partial a_2^T}{\partial \sigma} = \frac{1}{2J_2'^{3/2}} \cdot [M_1] - \frac{1}{4J_2'^{3/2}} \cdot [M_2] \quad (8.2-22)$$

$$\frac{\partial a_3^T}{\partial \sigma} = [M_3] \quad (8.2-23)$$