

第 七 篇

岩体流变本构模型 辨识与参数估计

19 世纪 60 年代,由 L. V. Rabcewicz 等人提出的隧道新奥法施工,其中的做法之一是把围岩的变形实测作为对原设计及施工方案进行修正的依据,这一作法由于紧密结合实际,及时将围岩的动态反映出来,并指导修改原设计,收到了良好效果。今天,这一作法已被广泛应用到岩体工程所有领域,称之为现场监控法或信息反馈法。

就目前人们对岩体的认知水平及可应用的分析手段,对每个具体的岩体工程进行科学的分析,并将分析结果真正用于指导实践的唯一作法是各种方法综合应用,既不能因为经验的定性而忽视不用,也不能因为理论分析可靠性低而完全不考虑。“半经验半理论”做法早在 1984 年,笔者在一次学术讨论会上就曾提出,对于不能完全认识清楚的复杂事物来说,将经验与理论相结合的做法也是符合科学的方法论的。

基于固体力学理论和数学的岩体理论分析方法,在 20 世纪 40 年代和 50 年代计算机和有限单元法产生之前,人们只能对简单的边值问题求其解析解,如 1898 年, Kirsch 用弹性理论分析圆孔周围应力分布,1938 年,智利地质学家 R. Fenner 提出了在静水压力下圆形隧洞围岩松动压力的方程,20 世纪 50 年代开始有人用弹塑性理论研究围岩的稳定问题,导出芬纳-塔罗勃(J. Talobre)公式和 H. Kastner 公式, S. Serata 用流变模型进行了隧洞围岩的粘弹性分析。随着计算机的快速发展,仍以固体力学理论为基础,以数值方法为手段的有限单元法成为可能,从而可求解复杂的边值问题,大大扩展了理论的应用范围。七十年代,有限单元法的研究和应用在我国受到普遍关注,不久即成为岩石力学分析的主要手段,甚至至今仍如此,不过在结合岩体力学的研究成果,进行了相应研究和改造,使得这一方法的内涵更加丰富。

但不久人们便发现,有限单元法实质上并未解决理论分析可靠性低的问题。有人称有限单元法为参数模拟,认为计算结果与实际情况出入较大,归于参数给不准,这只是问题的一个方面,如果认为边界条件、几何方程、平衡方程是基本符合客观实际的,那么对计算结果影响较大的岩体本构模型的给定上却带有盲目性,这不仅反映在至今关于真实岩体的本构模型的研究尚不完善,而且反映在对目前各种假定下所得到的本构模型的选择上,因此要提高计算的可靠性,就必须解决在输入参数和选用本构模型方面的科学性和准确性问题,这也是岩石力学研究中的两大前沿课题。

从思维的方式来看,传统的岩石力学分析方法,不论是理论分析还是数值分析,都是正向思维,有人称之为牛顿时代表思维模式,即从事物的必然性出发,“根据试验建立模型、处理本构关系,在特定(有限的)条件下求解”,反映在参数的研究上就是取样、设计试验、测定、结果分析,反映在模型的研究上就是根据已有的公理、定理或理论,再加上特定条件下的假定,通过推演得到。不敢断言,在将来,这种传统的方法是否对这一类问题的研究有新的突破,至少今天还不能将这一类问题的研究提高到一个全新的高度。

如同自然界的一切不确定系统一样,将岩体视为一个不确定系统,用系统思维、反馈思维、全方位思维(包括逆向思维、非逻辑思维、发散思维甚至直觉思维)对岩体的行为进行研究已开始引起人们的注意。于学馥教授在《信息时代岩土力学与采矿计算初步》一书的序言中详细阐明了这样一种思维,李世辉高工在《隧道围岩稳定系统分析》一书中也应用了系统

科学的分析方法分析隧道围岩的稳定性 ;本世纪七十年代中后期由 Kirstan 提出 ,后经 Gioda、Sakurai、Maier 和 Cividini 等学者的发展 ,基于实测位移反求岩体力学参数和初始地应力的位移反分析是逆向思维在岩石力学研究中的一次成功应用 ,开辟了岩体参数和初始地应力研究的新途径 ,受到了普遍的关注 ,并且由于反分析得到的参数作为在同一模型下正分析的输入参数大大提高了分析结果的可靠性而受到工程界的欢迎。但是参数反演没有解决如何确定合理的模型问题 ,有学者认为弹性问题是位移反分析的研究重点 ,有的学者则持不同观点 ,但不论哪种观点 ,如果给定的模型能够更好地反映岩体的真实力学行为 ,无论对参数反演的结果还是参数反演基础上的正演都会具有更好的效果是无疑的。

“ 从唯象的观点来看 ,岩体属各向异性流变介质 ”。许多大的岩体工程项目 ,其服务年限都在几十年甚至上百年的时间 ,因此 ,现代岩体工程项目不仅要考虑施工期间的安全 ,而且要考虑在运营期间的安全 ,即在投入运营后 ,是否会随着时间的增长而产生破裂、失稳 ,这便是岩石流变学的任务 ,但如同其它岩石力学分支一样 ,为提高分析的可靠性 ,同样存在选择合适的模型和正确的输入参数问题。

以上概括了岩体工程中分析和设计方法的发展趋势 ,为提高理论分析和数值分析的可靠性必须解决模型和参数问题 ,传统思维方式在解决模型选择与参数输入上的局限及信息时代研究岩石力学在思维方式上的转变。基于对这些方面的认识 ,本篇提出将岩体视为灰色系统 ,根据实测位移 ,用系统辨识的理论方法来确定岩体粘弹粘塑本构模型及模型参数的研究。目前 ,无论国内国外 ,这一类研究开展的还相当少 ,并具有相当的难度。

第 19 章 系统辨识的基本原理

§ 19.1 概 述

在人类认识世界的过程中,为了对某一事物或过程的发生与发展进行更深入的认识,不仅需要对其产生的现象进行合理的解释,而且需要对产生这一表面现象的内在机制进行定量的分析,为达此目的常常需要建立表征该事物或过程本质的模型。所谓一个过程的模型就是对该过程本质方面的一种表述,它能以某种形式提供关于该实际过程更全面、更深刻的知识。

模型通常包括物理模型和数学模型两大类。

物理模型是在一定的相似定律和简化原则下对原型按比例缩小了的复制品,模型的主要性能指标与原型有良好的相似性,从而可通过对模型的试验与测试推断原型的内在规律,这一手法常被用于岩体工程中,如我国目前正在建的著名三峡工程中流砂淤积的研究,就采用物理模型的手段在实验室实行观测研究,再如我们常见的块体模型试验和相似材料模型试验都属物理模型模拟。数学模型是指能反映被描述过程本质的各物理量之间的数学方程式,如我们十分熟知的反映均质、连续、各向同性介质内部应力应变规律的本构模型。

建立物理模型常常是为了进行试验,而建立数学模型则往往是为了从理论上进行数学力学的推演分析。本章中岩体流变本构模型显然是指数学模型,因此,下文中涉及模型的字均指数学模型。

建立模型显然是对被建系统进行深入量化分析的首要一步,也是十分关键的一步。如何建立模型根据对系统的不同认识及建模信息的不同来源将导致不同的建模途径。归纳起来可以分成三种类型:一是正面分析建模,即在确定了表征该系统本质特征的物理量后,根据已有的专业知识、公理、定理及必要的假设,通过演绎的方法提出各物理量之间或部分物理量之间的对应关系,并指导设计相应的试验,以证实所提关系的正确性,若不正确,则需要修正所提出的关系,并重新设计试验,如此反复直到最终建立起该系统的模型;二是逆向分析建模,即通过对系统的观测掌握了大量的输入、输出数据,再通过各种纯数学的分析手段直接建立输入量与输出量之间的对应关系,这种模型通常是一种经验或半经验的模型,如常见的通过回归分析或时间序列分析建立的模型;三是正面分析与逆向分析相结合的混合建模,即首先根据已有的知识或定律建立起该系统结构化数学通式,然后根据试验或实测得到的大量输入输出数据对模型参数和模型结构参数进行辨识,最终得到该系统的模型,该方法实质就是模型辨识的全过程。

正面分析建立的模型往往是该系统唯一正确的模型,而逆向分析和混合分析建立的模型往往是不唯一的,需要进行优化筛选。然而自然界的事物和过程复杂多样,只有那些可重复试验的简单系统可用单纯的正面分析建立相应的模型,对大多数复杂的系统,由于包含许

多错综复杂的影响因素,且无法重复试验,甚至根本无法试验,因此,不可能从单纯的正面分析中得到系统的模型。本世纪60年代提出的系统辨识理论正是针对复杂系统模型无法从单纯的正面分析得到而产生的,事实表明,模型辨识是确立复杂系统模型的最有效手段,因此而得到迅速的发展,迄今成为一门完整的技术被广泛用于涉及控制、预报及分析、决策的各个领域。作为以后各章的基础,本章各节从最一般的角度阐明系统辨识的概念、基本过程及辨识的方法,详细分析岩体系统模型辨识特殊性、思路和方法。

§ 19.2 系统辨识中的若干概念

19.2.1 系统辨识

若把研究的对象一律看成是一个系统,且系统与环境有能量的交换,即属于开放的系统,则我们面对的问题有两类:一类称之为直接问题;一类称之为逆问题。如图19.2-1所示为一典型开放系统示意图。

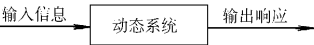


图 19.2-1 动态开放系统示意图

当动态系统的数学模型和初始状态为已知,需要求取规定输入信息下的输出响应时,称之为系统分析,即直接问题;当已知输入信息和对应的输出响应,需要求取动态系统的数学模型,或者当已知动态系统模型

和观测到的输出信息,需要求对应的输入信息时,统称为逆问题。前一种逆问题即系统的辨识,后一种逆问题在岩体工程中即称之为参数反演。

1962年,Zadeh对系统辨识(system identification)作了如下的定义:“系统辨识是在对输入和输出观测的基础上,在指定的一类系统中,确定一个与被辨识系统等价的系统”。

上述定义在系统辨识中一直被沿用至今,根据这一定义,在辨识过程中必须确定三个方面的问题:一、必须指定一类系统,即根据事先掌握的关于被辨识系统的知识,预先确定被辨识系统的类属,如被辨识系统是动态的还是静态的,是线性的还是非线性的,是确定性的还是随机性的,系统参数是定常的还是时变的,是集中参数系统还是分布参数系统等;二、必须规定一类输入信号;三、必须规定“系统等价”的含义和度量的准则。

19.2.2 等价系统

如在第一节概述中所讲,对于简单的系统,直接进行正面分析即可得到该系统的数学模型,并且该模型是系统唯一正确的模型,但对复杂的系统,往往需用系统辨识方法来确定系统模型,且并不唯一,需辅加一定的准则来确定出与被辨识系统最大程度相近的模型作为系统的模型,尽管模型中包含了原系统的大部分本质特性,但它并不是系统完全真实的映象。对任何两个系统,若在任何一个可能的输入下,其输出完全相同,则称两个系统完全等价。然而,由于实际上存在各种不可预测的干扰,对两个系统,在所有可能的相同输入下,只能获得它的近似相等的输出,此时两个系统称为近似等价系统。辨识得到的模型实质上就是原系统的近似等价模型。

19.2.3 准则函数

由于辨识得到的是原系统的近似等价模型,为了描述模型与原型的相近程度,常定义一个准则函数,该函数常用原型与模型在相同输入下,输出差的平方和来表示。对于离散的数据,准则函数可写为

$$J(y, y_m) = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{mi})^2 \quad (19.2-1)$$

其中 y_i 和 y_{mi} 分别代表第 i 次观测时,原型与模型的输出值, N 为总的观测次数。对连续的观测数据,若观测从时刻 t 开始,观测时间区间为 T ,则准则函数可表达为:

$$J(y, y_m) = \int_t^{t+T} [y(t) - y_m(t)]^2 dt \quad (19.2-2)$$

对于众多的模型 $M_i (i=1, 2, \dots)$,用准则函数可以判定哪个模型最优,而对某一给定结构参数的模型,准则函数又是确定模型参数的目标函数。前者常用以确定模型的结构参数。如微分方程的阶次,后者常用以确定特定模型的模型参数,称之为模型参数估计。

以上是以相同输入下模型与原型输出差的平方和作为判别模型好坏的准则。当然准则函数还可以取其它不同的形式,对应的模型结构参数和模型参数的确定方法亦不同,但一个总的原则是:对被辨识的系统 O ,最佳模型 M 应使准则函数的值取最小,

$$J(O, M) = \min [J(O, M_i)] \quad (i=1, 2, \dots) \quad (19.2-3)$$

19.2.4 系统的外部描述与内部描述

一个复杂的系统常包含多个物理量,而对系统的一种描述并非包含了全部的物理量,取不同组合的部分物理量将导致对系统的不同描述。若选取可控且可观测的物理量对系统进行描述,则称为外部描述;若选取不可控或不可观测的物理量对系统进行描述,则称为内部描述。我们研究的系统一般是可实现的开放系统,即给系统一个输入,相应的就有一个输出,且对一个稳定的系统这种输入输出的对应关系是客观存在,并且唯一的,而输入输出显然是系统与环境的一种能量交换方式。因此,又可以说,用输入量与输出量的对应关系对系统进行描述称为外部描述,用系统内的状态变量对系统进行描述称为内部描述。比如岩体系统,在存在初始地应力的岩体中开掘一定断面形状的洞室(常以洞室周边作用释放荷载来代替)就是一种输入,从而在洞室周边产生一定的位移就是一种输出,显然它们是可控且可观测的,若能找出释放荷载与位移的关系,就是对岩体系统的外部描述;同时该系统,开掘洞室必然会导致岩体内部应力状态、应变状态和内部各点位移的变化,称这些量为系统状态变量,显然它们是不可测或不可控的,用它们的对应关系对系统进行描述即为内部描述,如岩体系统本构关系。

以单输入单输出的线性连续系统为例,假定给系统一个输入 $u(t)$,响应的输出为 $y(t)$,则外部描述的一般形式可写为

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u \quad (19.2-4)$$

若输入一个单位脉冲信息,对应的输出记为 $h(t)$,称为脉冲响应函数,则外部描述又可表达为

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (19.2-5)$$

若对式(19.2-4)两边进行 Laplace 变换,并假定初始条件为零,有

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) u(s)$$

定义 $H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$ 为系统传递函数,则系统的外部描述又可以用 $H(s)$ 来描述。

若系统的状态变量为 $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \dots x_n)^T$, 则上述单输入单输出线性连续系统内部描述的一般形式表达为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (19.2-6)$$

其中 $u = u(t)$, $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \dots f_n)^T$ 为 n 维向量函数。

由于 f 是线性的, 故式(19.2-6)又可表达为:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (19.2-7)$$

对于时不变系统来说 $A(t)$ 、 $B(t)$ 与时间无关, 式(19.2-7)又可表达为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中 A 为 $n \times n$ 矩阵, B 为 $n \times 1$ 矩阵。

输出量 $y(t)$ 也可用状态变量和输出量 $u(t)$ 来表示为

$$y = \Psi(x, u, t) \quad (19.2-8)$$

若 Ψ 为线性函数, 则(19.2-8)亦可写为

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (19.2-9)$$

若 $C(t)$ 、 $D(t)$ 与时间无关, 式(19.2-9)又可简写为

$$y = Cx + Du \quad (19.2-10)$$

其中 C 、 D 均为 $n \times 1$ 矩阵, 式(19.2-8)~(19.2-10)称为输出方程或观测方程。

综上对单输入单输出线性时不变连续系统, 其内部描述可表达为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (19.2-11)$$

由于系统的一个实现是客观唯一的, 因此, 不同的描述并不是完全独立的, 它们之间存在着必然的联系。对(19.2-11)两式分别进行 Laplace 变换, 不难导出:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = [C(sI_n - A)^{-1}B + D] \quad (19.2-12)$$

式中 I_n 为 n 阶单位方阵。

式(19.2-12)与前面用外部描述导得的传递函数是完全相等的。

19.2.5 系统的可控性、可观测性与可辨识性

前面在举岩体系统的例子时, 曾定性地讲, 输入输出量是可控且可观测的, 而内部状态变量是不可控或不可观测的。这里从量的角度对系统的可控性、可观测性与可辨识性进行定义。

所谓系统的可控性指在有限的时间间隔内, 采用无约束的输入量 $u(t)$, 总可以使系统由任意初始状态 $x(t_0)$ 转移到任一终止状态, 其条件是可控性矩阵为满秩阵:

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

所谓系统的可观测性指对任一初始状态 $x(t_0)$, 总可以利用有限时间间隔内得到的输出 $y(t)$ 观测值予以确定, 其条件是可观性矩阵为满秩阵

$$\text{rank}[C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T = n$$

所谓系统可辨识性是指给定一类模型的参数是否可根据已知输入和输出测值唯一确定出来。该问题是一个较复杂的问题, 在不同文献中讨论不一样, 在此针对采用最小二乘法进行岩体本构模型参数辨识给出可辨识条件。设系统观测方程为 $u = \varphi(\theta, \sigma, t)$, 其中 $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_m]^T$ 为模型参数, 共 m 个, σ 为已知输入, t 为时间, 实际观测值为 $U_i (i = 1,$

2.....N),共 N 个,其中 $N > m$ 。若 φ 是 θ 的线性函数,则 θ 的估值为

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T U$$

若 φ 是 θ 的非线性函数,则 θ 的第 $k+1$ 次迭代值为

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^{(k+1)} &= \hat{\theta}^{(k)} + \Delta^{(k)} \\ \Delta^{(k)} &= (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T (U - \varphi_k)\end{aligned}$$

以上各式中 $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_j} \end{bmatrix}_{N \times m}$, $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_N]^T$, $\varphi_k = [\varphi_k^{(1)} \ \varphi_k^{(2)} \ \dots \ \varphi_k^{(N)}]^T$

由此看到,不管 φ 是 θ 的线性函数还是非线性函数,参数 θ 可辨识的充要条件是 $A^T A$ 为非奇异矩阵,只不过线性情况 A 与 θ 无关,而非线性情况 A_k 是第 k 次迭代值 $\theta^{(k)}$ 的函数。 $A^T A$ 非奇异意味 A 矩阵的 m 个列向量线性无关,即下式成立只有 $C_j (j = 1 \ 2 \ \dots \ m)$ 都为零。

$$C_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_1} + C_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_2} + \dots + C_m \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta_m} = 0 \quad (i = 1 \ 2 \ \dots \ N)$$

19.2.6 系统行为水平

系统的行为水平指人们对一个可实现系统的认知程度,按此划分,自然界的一切系统可分成三类:白色系统,灰色系统和黑色系统。白色系统即人们对该系统的本质特征完全清楚,灰色系统指人们只知道该系统的部分特征,而黑色系统指人们对该系统一无所知。对白色系统显然通过单纯的正面分析就可建立起该系统的数学模型。面对灰色和黑色系统,单纯的正面分析无法建立起系统的数学模型,需要用辨识技术。对灰色系统而言,先利用人们对该系统的部分了解(即所谓验前知识),加上必要的假定和简化,提出系统结构化模型通式,然后利用已知输入下的输出响应辨识得到具体模型,如此得到的模型兼顾物理性和拟合性两方面,对黑色系统,没有验前知识,只知道在已知的输入下输出观测值,凭此对系统进行辨识实际退化成了完全的数学拟合分析,如回归模型和时间序列模型就属此类。

事实上,自然界的多数系统都是灰色的,只有少数是白色和黑色的。岩体系统就是典型的灰色系统。

19.2.7 离线辨识与在线辨识

系统辨识意味着要处理大量的数据,目前这一工作多借助计算机来完成。若首先是把试验或实测得到的资料集中记录下来,然后再输入计算机来辨识系统的模型,称为离线辨识;若计算机与被辨识系统直接连接,试验或实测数据直接输入计算机,对系统进行辨识,称为在线辨识。若由计算机控制采样,并在采样后立即对数据进行处理,辨识得到系统的数学模型,用以后的采样数据不断改进模型,这种作法称为实时处理。

对岩体系统,就目前的条件,只能是离线辨识。但若条件许可,仪器、仪表等条件具备,实现在线辨识并进行实时处理并非不可能,只要实现位移传感器与计算机的连接,并由计算机控制采样,甚至可以远距离控制采样,那么就可以实现在线辨识。这对岩体的性质为时变的情况是有意义的,对岩体性质基本稳定不变的情况意义不大,采用离线辨识即可。

§ 19.3 系统辨识的基本过程

在明确了辨识的目的,并对系统具备了一定验前知识条件下,即可着手对系统的模型进

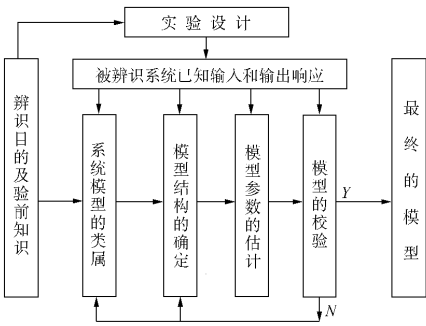


图 19.3-1 系统辨识过程框图

19.3.1 模型类属的确定

模型类属的确定是建模工作最重要的阶段,同时又是最复杂最困难的一项工作,因为确定一个系统的模型类属不存在可遵循的固定的推理方法,只能凭建模的目的,对系统验前知识的掌握程度等进行定性的判定,因此,存在很大的主观性,而可能导致所做出的判定不合适甚至不正确,尽管在这种情况下也可以辨识得到模型的参数,但由于从开始就犯了根本性的方向错误,因此得到的模型不可能很好地反映系统的行为特征,辨识也就失去了意义,此时需重新确定模型的类属。

若定义可用来代表被辨识系统的所有可能模型为模型的集合,那么基于目前人们对各种系统的认识水平,集合内模型的属性可能是以下若干方面的不同组合:静态模型或动态模型;参数模型或非参数模型;连续时间模型或离散时间模型;集中参数模型或分布参数模型;线性模型或非线性模型;定常参数模型或时变参数模型;确定性模型或随机性模型等。同一系统可能由于辨识的目的及系统所处环境条件不同,而有不同的类属,但在辨识目的和环境条件一定的条件下,系统类属也是一定的。比如具有明显流变特征的岩体系统可看作动态、连续时间、分布参数且参数时变、非线性、随机模型。

前文述及,系统辨识并非意欲获得系统完全真实的映像,而是想得到一个近似等价系统,衡量该近似等价系统好坏除考虑与原系统物理相似外,还要考虑近似等价系统模型应具有实用性、有效性和简单性,这一点也是非常重要的,因为即使能获得系统完全真实的映像,但没有实用性,同样是没有意义的,这就是说,在确定系统类属上不一定把所有的因素都包含进来,否则会带来辨识模型异常复杂,违背实用性、有效性和简单性的原则。因此,在确定系统类属上采取忽略次要因素,抓主要矛盾也是一个基本原则。比如上述的岩体系统,若变形在弹性范围内,且岩体内无大的结构影响,那么,参数时变可忽略,而非线性可简化为线性。

再需说明一点,由于最终模型是用实测的输入输出拟合得到,因此被忽略的次要因素会在模型参数中得到一定的补偿。

19.3.2 模型参数估计

当模型的类属确定之后,即可根据已有的知识写出该系统数学模型的一般通式,如果模型的结构参数(在下面一节讨论)也已给定,那么下一步的工作就是模型参数估计。模型参

行辨识。做为一个完整的过程主要包含以下几个阶段:

① 实验设计;② 确定模型类属;③ 模型参数估计;④ 模型结构确定;⑤ 模型校验。

上述五个阶段的相互关系可用图 19.3-1 来表示。

对于复杂的岩体系统,显然不可能进行人为操作的试验,用于辨识的输入和输出完全是在工程进行中实际观测得到,即对岩体系统的辨识不存在实验设计问题。以下对②~⑤分别予以阐述。

数估计是一个人为可操纵过程,它表现在可预先对输入输出数据进行处理。可选择不同的参数估计方法,在求解过程中可用不同的算法和优化技术。常用的参数估计方法如最小二乘法、极大似然法、辅助变量法等,选择不同的参数估计方法,对同一模型在同等条件下,得到的估计参数很可能不同,但一个总体的原则是估计参数应依概率收敛于真值。

模型参数估计是一项十分具体的定量研究工作,虽不象确定系统类属那样无法可依而感到困难,但要面对大量数值计算,显得十分繁杂,尤其对多个参数且目标函数为参数的非线性函数时,要求解的是复杂非线性方程组,需要用迭代和优化方法,因此工作量十分巨大。不仅如此,在整个系统辨识过程中,为确定模型结构参数,为校验模型等,可能要反复进行模型的参数估计,因此,模型参数估计是整个系统辨识过程中的重头戏。计算机在数值计算方面的绝对优势为这一阶段的工作提供了有力的工具。

19.3.3 模型结构参数的确定

模型结构参数的确定是系统辨识中又一重要的工作,因为在系统的类属明确以后,虽然系统的数学模型通式可以写出,但只有模型中结构参数确定后,才可以进一步进行模型参数估计,从而得到可用的具体模型。如何确定模型结构参数是系统辨识中又一比较困难的问题,结构参数给的不正确,即使辨识得到了具体的模型,但并不能很好地反映原系统特性,存在较大误差。

模型的结构参数对单输入单输出系统来说是指差分方程、常微分方程或偏微分方程的阶次,而对多输入多输出系统就不那么简单,除了阶次外,还包含其它各种结构参数(如状态模型的结构不变量)。到目前为止,对多变量系统,如何正确确定其结构参数尚处于进一步研究中。对单输入单输出系统,正确确定模型的阶次已有多种方法,如基于脉冲相应的采样值,用汉格尔(Hankel)矩阵判定模型阶次,基于实际的输入输出观测值,用积矩矩阵判定模型阶次,基于模型参数最小二乘估计的拟合度(又称优良度)检验,基于模型参数极大似然估计的最小信息准则(即 AIC 准则)以及对残差的相关性检验确定模型的阶次等,有关这些方法的详细原理在此不一一赘述。

在本篇的后面几章中,主要应用了基于模型参数最小二乘估计的拟合度检验,在此对其原理和方法作一简要介绍:

该方法的原理十分简单,用一句话来表述,就是在所有阶次的模型中,正确阶次对应模型与观测数据之间的拟合程度最好,拟合程度好坏可用相同输入下模型输出与观测的输出之间残差平方和函数来度量,用 Q 来表示该函数,那么它是参数估计值 $\hat{\theta}$ 的函数,即

$$Q(\hat{\theta}) = (U - A\hat{\theta})(U - A\hat{\theta})^T \quad (19.3-1)$$

式中, U 为观测的输出列阵, A 为包含已知输入、点坐标等因素的 n 阶方阵。 n 为模型阶次。

根据这一原理,确定正确阶次的作法是:依次取 $n = 1, 2, \dots$, 并用最小二乘法估计相应的参数 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots$, 对应残差平方和分别为 $Q_1, Q_2, \dots$ 。当 Q 随阶次 n 的增加其减小不再显著时对应的阶次即为正确的模型阶次。

为了科学判定 Q 的减小是否显著,1965 年瑞典学者 Astrom 曾引入一个统计量 t 作为检验标准, t 定义为

$$t(n_1, n_2) = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} \quad (19.3-2)$$

当观测次数 N 足够大时, t 渐近地服从自由度为 $f_1 = 2(n_2 - n_1)$, $f_2 = N - 2n_2$ 的 F (f_1, f_2) 分布, 由此得出: 在置信度 $\alpha = 0.05$, $N > 100$, $n_2 - n_1 = 1$ 情况下, t 大于 3, Q 的减小才为显著。因此, 当阶次为 n 时, 若

$$t(n-1, n) > 3.0, \quad t(n, n+1) < 3.0$$

则 n 就是正确的模型阶次。

19.3.4 模型校验

系统辨识的最后一个环节就是对辨识得到的模型是否真正有效而进行检验, 尽管辨识的全部过程是一步步科学推导而来, 但其间掺和了若干人为的因素, 甚至是不很确定的因素, 比如模型的类属确定主要根据验前知识必要的假设和一些简化, 尤其在验前知识较少的情况下, 假设和简化的份量就会更大些, 而这些假设和简化是否真的合适会直接影响到最终辨识的模型质量, 假如检验的结果表明辨识得到的模型不能很好地反映系统特性, 那么首先应该检查的就是这些人为因素, 因此, 模型校验是辨识过程中不可少的一环。

模型的校验可从两个方面进行, 一是检验最终得到的模型是否良好; 二是检验模型在实际应用中是否有效。前者主要考察模型对辨识用的观测数据的拟合程度。若是在同一模型集合内, 一般来说, 根据观测数据辨识出的数学模型就是能产生出这些输出数据的概率模型, 因此, 考察模型对观测数据拟合的好坏就是检验在所选模型结构和参数下, 输出残差序列是一个均值为零、独立的随机序列的实现概率是多少, 围绕这一提法, 已有不少的残差白色性检验方法。若是在不同的模型集合内, 则首先根据准则函数最小原则决定哪个模型集合内模型更好, 然后再进行残差白色性检验。后者主要根据建模的目的, 考察模型对新的实验数据或实际观测数据的拟合程度。比如岩体本构模型的辨识主要为超前预测, 若模型的预测结果与实际的观测结果相差不大, 则说明模型是有效的, 当然这种对比检验应该具有任意性。

§ 19.4 系统辨识的一般方法

上一节就辨识过程各阶段的内容、原理及相互之间的关系进行了定性的论述, 本节就辨识的一般性方法进行讨论。

19.4.1 概述

设经过实际观测得到一批输入输出数据, 输入用 σ 表示, 输出用 u 表示。记第 i 次观测的输入输出数据对应平面一点 P_i , 即 $(\sigma_i, u_i) \leftrightarrow P_i$, 则 N 次观测的数据对应平面上一个点集 P^N

$$P^N = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$$

若选定了一类模型集合 M

$$M = \{M(\theta) | \theta \in D\}$$

其中 θ 为模型参数向量 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$, D 为参数集合。

则辨识的问题就是根据集合 P^N 中蕴含的信息, 在集合 M 中选择一个能很好描述观测数据的模型 $M(\hat{\theta}_N)$, 或者称寻找从集合 P^N 到集合 M 的一种映射。

19.4.2 辨识方法一般讨论

设从模型集合 M 中任意取出某一个模型 M_j , 并根据集合 P^N 估计得到了该模型的参

数向量为 $\hat{\theta}_N^i$, 则基于该模型在相同输入下有一个输出。

$$u_{M_j} = \varphi(\hat{\theta}_N^i, \sigma) \quad \text{记 } \sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \dots \sigma_N]^T$$

该输出与观测输出 $u = [u_1 \quad u_2 \dots u_N]^T$ 之间必然存在一个误差 ϵ , 显然该误差是模型的函数, 或者说是模型参数向量估值 θ_N^i 的函数

$$\epsilon(\hat{\theta}_N^i) = u - u_{M_j} = u - \varphi(\hat{\theta}_N^i, \sigma)$$

则根据观测数据, 最佳的模型应使误差最小

$$M_{\text{opt}} \leftrightarrow \min_{M_j \in M} [\epsilon(\hat{\theta}_N^i, \sigma)]$$

为了量化衡量“误差最小”, 通常引入误差函数的函数, 记为 $J(\hat{\theta}_N^i)$, 称此函数为辨识的准则函数

$$J(\hat{\theta}_N^i) = I[\epsilon(\hat{\theta}_N^i, \sigma)]$$

选择不同的准则函数 I , 将导致不同的辨识具体方法, 但不管选择什么样的 I , 对不同模型 $M_j \in M$, 根据 J 可以确定最佳模型 M_{opt} ; 对于同一模型 M_j , 根据 J 可以估计该模型参数向量 $\hat{\theta}_N^i$ 。

19.4.3 参数估计的一般方法

从模型集合中取出的任一模型 M_j , 通过集合 P^N 估计其参数向量 $\hat{\theta}_N^i$ 的原则是: $\hat{\theta}_N^i$ 应满足下式

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}_N^i} = 0$$

对具有 n 个参数的模型, 上式是关于 n 个变量的方程组, 解此方程组即可求得 $\hat{\theta}_N^i$ 。

视准则函数 J 的不同, 上述的方程组可能是一个线性方程组也可能是一个非线性方程组, 若是线性的, 则求解方程组较为容易; 若是非线性的, 则一般不可能直接求解, 需采用迭代加优化的方法, 逐步逼近方程组的解。但不管是线性还是非线性, 通常都需要借助计算机来完成。

在获取参数估值的具体算法上可采用整批算法, 也可采用递推算法, 整批算法即将观测数据集 P^N 拿来一次性估计得到参数值; 而递推算法则随时可用第 $N+1$ 次测值对用前 N 个测值估计得到的 $\hat{\theta}_N^i$ 进行修正以得到 $\hat{\theta}_{N+1}^i$ 。

§ 19.5 岩体本构模型辨识的方法与特点

19.5.1 概述

岩体本构模型及模型中参数的正确给定由于受岩体介质异常复杂的制约而成为岩体力学理论研究中两大难题。在各种假设和简化条件下的岩体本构模型基本都是基于经典力学的分析方法所得到, 甚至目前可用来对具体工程进行分析的模型仍是基于均质、连续、各向同性介质而得到的模型, 尽管目前不连续岩体力学、各向异性体力学得到了发展, 它们也更接近真实岩体, 但得到的模型不仅特别复杂, 而且包含太多无法确定的参数而达不到实用, 因此, 至今几乎所有岩体工程中的问题都是靠经验和实测进行分析。

就岩体本构模型而言, 用经典的方法去研究是否该画上句号不敢妄下结论, 但寻求更好

更有效的解决途径实在必要。70 年代末兴起的岩体参数反分析为参数的正确给定开辟一条完全新的途径受到普遍的关注,这不仅仅因为它是一种新方法,最主要的是反分析确定的参数可大大提高正分析的可靠性。同样属于反分析范畴,将岩体看成一个系统,通过实测输入输出用系统辨识的方法来寻求岩体本构模型是一种不同于经典分析方法的新方法,虽然辨识的最主要一步,在确定模型的类属中仍然使用典经方法来得到模型的数学通式,似乎辨识得到的模型并没有脱出经典分析的范畴,但辨识的另外一个主要方面是辨识得到的模型与实测数据的良好拟合性,这使得实测数据中包含的关于系统更复杂因素的信息反映在了辨识得到的模型中,从而用辨识得到的模型进行正分析能更好地反映原系统的行为,这也就是辨识的意义所在。本节以下介绍岩体本构模型辨识的一般方法和特点。

19.5.2 岩体本构模型辨识的一般方法

设在岩体中开掘了一条一定断面形状的洞室,断面形状与大小用 L 描述,如为圆形断面 L 就代表圆的半径,对直墙半圆拱, L 代表直墙高和半圆半径等等,又设在开掘洞室的位置测得了初始地应力,记为 $\sigma_0 = [\sigma_{x0} \quad \sigma_{y0} \quad \tau_{xy0}]^T$,则把 L 和 σ_0 统记为对岩体系统的一种输入。

在洞室掘进过程中设置了某一观测断面,在该断面洞周布置了 N 个测点,记为 $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$,从 t_0 时刻起,对每测点进行 M 个相同时步(步长为 Δt)的观测,得到每点 M 个不同时间间隔的位移增量,记第 i 个点在第 k 个时步的位移测值为 $\Delta u(P_i, \tau_k) (i = 1, 2, \dots, N, \tau_k = k\Delta t, k = 1, 2, \dots, M)$,此即为在输入 L 和 σ_0 作用下系统的输出观测值。

根据已有的知识对岩体系统进行分析,认为可用某一类的模型来描述,记该类模型组成的模型集合为:

$$M = \{M(\theta, S)\}$$

其中 $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \dots \theta_n]^T$ 为模型的参数; S 为模型结构参数。

那么岩体本构模型的辨识就是根据上述已知的输入和输出从模型集合 M 中选出一个最合适的模型 M_{opt} 。

显然岩体本构模型是关于岩体系统的状态描述,即前文所述的内部描述,而实测的输入和输出是岩体系统外部描述,为了用外部描述的测值求出内部描述,需要将用本构模型表述的内部描述转化为用输入输出来表述的外部描述,即观测方程。现按某种规则从集合 M 中取出一模型 M_j ,对应模型参数和结构参数分别为 θ_j, S_j ,则观测方程可写为

$$\Delta u' = f(\theta_j, S_j, \sigma_0, L, P_i, \tau_k)$$

选择输出残差的平方和作为系统辨识的准则函数,并以拟合度检验来确定结构参数 S 。准则函数可写为

$$J(\theta_j, S_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M (\Delta u - \Delta u')^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M [\Delta u(P_i, \tau_k) - f(\theta_j, S_j, \sigma_0, L, P_i, \tau_k)]^2$$

从模型集合中按某种规则选取一模型 M_j ,实际就是按某种规则给出 S_j ,此时准则函数 J 只以 θ_j 为变量,根据准则函数最小,可得

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_j} = 0$$

从而求得 $\hat{\theta}_j$ 和对应拟合误差 $J(\hat{\theta}_j, S_j)$,而最合适的模型,也就是最合适的结构参数应使拟合误差最小,即

$$M_{\text{opt}} \leftrightarrow \min_{M_j \in M} [J(\hat{\theta}_j, S_j)]$$

19.5.3 岩体本构模型辨识的特点

从上述的分析中可以看出,岩体本构模型的辨识存在以下几个特点:

(1) 对岩体系统不可能进行人为的试验,即不可能为辨识系统模型给岩体系统施加一种人为规定的特殊输入信息,以观测系统的响应,而只能凭施工过程中实测的输入输出进行辨识。

(2) 一旦施工方案确定(如洞室埋深、洞室几何形状),岩体系统的输入信息是不变的,而且不可能人为去改变,因此,不可能用不同输入下的系统响应进行辨识,而只能用同一输入下在不同位置不同时间的输出进行辨识,但这里并非单输入多输出的情况,因为输出的量只有一个,即位移,只是空间位置不同而已。

(3) 岩体本构模型是系统的状态描述,而实测输入输出是系统的外部描述,为了用外部描述的测值辨识内部状态描述,需要根据状态描述导出系统的观测方程,这一过程就是根据本构模型求解析解的过程,视模型和边值条件的复杂程度,有的情况可以求得解析解,有的情况求不出解析解,对不能求得解析解的情况,就只能用数值解代替。

第 20 章 复杂应力状态下岩体弹-粘弹性本构模型辨识

岩石具有流变特性已为大家所熟知,尤其是地下或山体间的岩石洞室或隧道,开挖后围岩处于长期的受力状态,除个别所处的应力水平不高而岩石本身强度又较大外,绝大部分情况,围岩具有随时间增长而缓慢变形的特征,即蠕变变形。根据变形过程中应力是否满足屈服条件,可以分为粘弹性变形或粘塑性变形,一般情况下,围岩的变形将经历瞬间的弹性或弹塑性变形-粘弹性变形-粘塑性变形。围岩处于粘弹性变形阶段时,其相应的力学分析要用粘弹性的本构模型,作为一种比较成熟的理论,目前已提出了不下十几种的粘弹性本构模型,这些模型中包括经验模型和以弹簧、粘壶为基本元件进行不同的联结形成的组合模型。它们都有各自的特点。而作为实际工程岩体来说,由于所处的应力环境和岩体本身的固有属性的不同,其蠕变变形亦各不相同。对一具体的岩体工程,用什么样的模型进行分析更能逼真地反映其蠕变变形规律,就涉及到一个模型的选择问题,或称作为模型的辨识。在这一方面已有一些论述,但只限于对实验或实测数据分析的基础上,建立与现有一些简单模型的匹配原则来达到辨识的目的。本章各节在总结已有做法的基础上,基于已知的输入(初始地应力和假定为均质各向同性介质中一定形状洞室的开挖)和输出(滞后于开挖面一定距离,洞周各测点在一定时间内位移计或收敛计的测值),运用系统辨识原理和优化技术从更一般的角度来确定相应岩体系统的粘弹性本构模型。

§ 20.1 弹-粘弹性模型理论概述

20.1.1 简要回顾

作为较完整的学科体系,流变学形成于 19 世纪 30 年代。1835 年,Weber 研究抽丝发现弹性后效;1865 年,Kelvin 发现锌具有粘性性质;1867 年,Maxwell 发现材料可以是弹性的,又可以是粘性的,并指出物体的粘性现象可以用一个一阶线性微分方程来描述;1874 年,Boltzmann 发展了线性粘弹性理论,认为给定时间的应力不仅取决于该时间的变形,而且也取决于以前的变形,从而建立起适用于线性范围内的叠加原理。而做为研究物质流变特性的形象化模型理论主要发展于本世纪,尤其在 50~60 年代陆续提出了许许多多模型。

岩体具有流变特性是人们早就认识到的,大的如山体的缓慢升降,层状岩层褶皱的产生,大陆板块飘移,小的如边坡滑动、隧道及大坝等的缓慢变形甚至导致最终的破坏等现象均可用岩石的流变来解释。对岩石流变规律的理论研究,岩石流变的实验研究,从微观角度研究岩石的流变及岩体稳定性的时间效应研究等是本世纪 60 年代以后才开始。1966 年在 Lisbon 召开的首届国际岩石力学会议,有学者提出更适合岩石的流变模型,到 1979 年第四次国际岩石力学会议,岩石的流变问题作为会议主题进行了讨论,大会总报告人 Langer 教

授从岩石流变问题的基本概念、岩石力学研究中的流变方法 ,岩体的流变规律到岩石工程中的流变问题进行了全面的阐述 ,其中在流变模型中指出改进的 Schofield-Scott-Blair 模型是岩石流变模型中最具普遍性的一个。

目前 ,流变学的发展已超出均匀连续介质的范畴 ,开始探索非均质、非连续介质的流变特性。显然对于岩石流变学的发展将起到积极的作用 ,因为自然界的岩体真正的来说是非均质非连续的。这一点 Langer 教授报告的最后结论中也明确强调 ,岩石流变学必须是也只能是不连续介质流变学(结构流变)。

20.1.2 粘弹性本构模型概览

迄今为止提出的粘弹性本构模型主要包括 :经验模型 ,即在对试验数据或实测数据进行拟合分析基础上提出的反映初期蠕变和等速蠕变的经验公式 ;组合模型 ,即用弹簧与滑块的不同组合形成 ,这一类模型最多 ;积分模型 ,即基于 Boltzmann 叠加原理 ,反映非正常应力或应变作用下蠕变或应力松弛规律的积分形式表达式。表 20.1-1 和表 20.1-2 分别给出了主要的经验模型公式和组合模型特征。

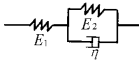
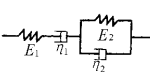
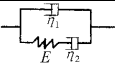
经 验 模 型

表 20.1-1

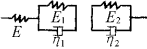
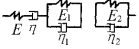
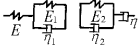
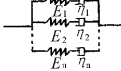
类 型	基 本 公 式	提 出 者
幂 函 数 型	$\epsilon(t)=At^n$	
对 数 型	$\epsilon(t)=\frac{\sigma}{E_c}+g\cdot\sigma^f\cdot t+k\cdot\sigma\cdot\log(t+1)$	Hobbs
	$\epsilon(t)=\epsilon_0+A\ln t$	Robertson
指 数 型	$\epsilon(t)=A[1-\exp(1-Ct^n)]$	Evans
	$\epsilon(t)=B[1-\exp(-Ct)]$	Hardy

组 合 模 型

表 20.1-2

序 号	模 型 体	结 构 式	状 态 方 程	模 型 参 数
1		$H-N=M$ (Maxwell)	$\sigma+p_1\dot{\sigma}=q_1\dot{\epsilon}$	$p_1=\frac{\eta}{E} \quad q_1=\eta$
2		$H/N=K$ (Kelvin)	$\sigma=q_0\epsilon+q_1\dot{\epsilon}$	$q_0=E \quad q_1=\eta$
3		$H-K$ (Kelvin-Voigt)	$\sigma+p_1\dot{\sigma}=q_0\epsilon+q_1\dot{\epsilon}$	$p_1=\frac{\eta}{E_1+E_2} \quad q_0=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2} \quad q_1=\frac{E_1}{E_1+E_2}\eta$
4		$H/M=PTh$ (Poynting-Thomson)	$\sigma+p_1\dot{\sigma}=q_0\epsilon+q_1\dot{\epsilon}$	$p_1=\frac{\eta}{E_2} \quad q_0=E_1 \quad q_1=\frac{E_1+E_2}{E_2}\eta$
5		$M-K=Bu$ (Burgers)	$\sigma+p_1\dot{\sigma}+p_2\ddot{\sigma}=q_1\dot{\epsilon}+q_2\ddot{\epsilon}$	$p_1=\frac{\eta_1}{E_1}+\frac{\eta_2}{E_2}+\frac{\eta_1}{E_2}, p_2=\frac{E_1+E_2}{E_1E_2}$ $q_1=\eta_1 \quad q_2=\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}$
6		$N/M=J$ (Jeffreys)	$\sigma+p_1\dot{\sigma}=q_1\dot{\epsilon}+q_2\ddot{\epsilon}$	$p_1=\frac{\eta_2}{E}, q_1=\eta_1+\eta_2 \quad q_2=\frac{\eta_1\eta_2}{E}$

续表

序号	模型体	结构式	状态方程	模型参数
7		$H - \sum_{i=1}^n K_i$	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + \dots + p_n \sigma^{(n)}$ $= q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + \dots + q_m \epsilon^{(m)}$	略
8		$M - \sum_{i=1}^n K_i$	同上	略
9		$H - \sum_{i=1}^n K_i - N$	同上	略
10		$M_1/M_2/\dots/M_n$ (广义 Maxwell)	同上	略

积分型的本构方程可表达为：

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int_0^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \epsilon^0(t) - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial J(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau\end{aligned}\tag{20.1-1}$$

或

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \sigma^0(t) - \int_0^t \epsilon(\tau) \frac{\partial E(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau\end{aligned}\tag{20.1-2}$$

以上总结了不同表达形式的粘弹性本构模型，它们是针对一维状态下的均质各向同性介质而言，对于三维情形可从一维情况类推得到，仿照弹塑性力学中的做法，将一点的应力状态分解为偏张量和球张量，相应的应变分解为偏应变和体积应变，则三维状态下的粘弹性本构模型可表达为：

① 微分型式

$$\begin{cases} P_1(D) S_{ij} = 2 Q_1(D) e_{ij} \\ P_2(D) \sigma_{ii} = 3 Q_2(D) \epsilon_{ii} \end{cases}\tag{20.1-3}$$

式中 $P_1、Q_1、P_2、Q_2$ 均为微分算子 $D = \frac{\partial}{\partial t}$ 的多项式

② 积分型式

$$\begin{cases} S_{ij}(t) = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ \sigma_{ii}(t) = 3 \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ii}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{cases}\tag{20.1-4}$$

§ 20.2 弹-粘弹性模型辨识的研究现状

如上节所述，粘弹性模型的辨识已有一些论述，纵观这些论述，不难发现它们都采用“试凑法”或称作“逐一排除法”来达到辨识的目的，其基本原理是：首先组集某种模型库，将库中