

形式语言与自动机

王 柏摇杨 娟摇编著

北京邮电大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书扼要地介绍了形式语言与自动机的基本体系,是学习理论计算机科学基础的教材和参考书。书中主要介绍了形式语言的基本概念、自动机的模型以及形式语言与自动机的等价性,包括右线性文法与有限自动机、上下文无关文法与下推自动机、图灵机以及无限制文法等。同时介绍了自动机在通信领域的某些应用。

本书不追求过多形式化讨论,强调基本概念的直观背景和主要定理证明的思路分析。书中配有较多的例题和习题,可作为工科计算机专业本科生的教材和研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

形式语言与自动机 杨娟编著 北京:北京邮电大学出版社, 2004
ISBN 7-309-04912-7

I. ①形... II. ①杨... III. ①形式语言—高等学校—教材②自动机理论—高等学校—教材 IV. ①计算机

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第 号

出版者:北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 号)邮编:
100088

发行部电话:(010) 64610000 64610001 64610002 64610003 64610004 64610005 64610006 64610007 64610008 64610009 64610010 64610011 64610012 64610013 64610014 64610015 64610016 64610017 64610018 64610019 64610020 64610021 64610022 64610023 64610024 64610025 64610026 64610027 64610028 64610029 64610030 64610031 64610032 64610033 64610034 64610035 64610036 64610037 64610038 64610039 64610040 64610041 64610042 64610043 64610044 64610045 64610046 64610047 64610048 64610049 64610050 64610051 64610052 64610053 64610054 64610055 64610056 64610057 64610058 64610059 64610060 64610061 64610062 64610063 64610064 64610065 64610066 64610067 64610068 64610069 64610070 64610071 64610072 64610073 64610074 64610075 64610076 64610077 64610078 64610079 64610080 64610081 64610082 64610083 64610084 64610085 64610086 64610087 64610088 64610089 64610090 64610091 64610092 64610093 64610094 64610095 64610096 64610097 64610098 64610099 64610100 64610101 64610102 64610103 64610104 64610105 64610106 64610107 64610108 64610109 64610110 64610111 64610112 64610113 64610114 64610115 64610116 64610117 64610118 64610119 64610120 64610121 64610122 64610123 64610124 64610125 64610126 64610127 64610128 64610129 64610130 64610131 64610132 64610133 64610134 64610135 64610136 64610137 64610138 64610139 64610140 64610141 64610142 64610143 64610144 64610145 64610146 64610147 64610148 64610149 64610150 64610151 64610152 64610153 64610154 64610155 64610156 64610157 64610158 64610159 64610160 64610161 64610162 64610163 64610164 64610165 64610166 64610167 64610168 64610169 64610170 64610171 64610172 64610173 64610174 64610175 64610176 64610177 64610178 64610179 64610180 64610181 64610182 64610183 64610184 64610185 64610186 64610187 64610188 64610189 64610190 64610191 64610192 64610193 64610194 64610195 64610196 64610197 64610198 64610199 64610200 64610201 64610202 64610203 64610204 64610205 64610206 64610207 64610208 64610209 64610210 64610211 64610212 64610213 64610214 64610215 64610216 64610217 64610218 64610219 64610220 64610221 64610222 64610223 64610224 64610225 64610226 64610227 64610228 64610229 64610230 64610231 64610232 64610233 64610234 64610235 64610236 64610237 64610238 64610239 64610240 64610241 64610242 64610243 64610244 64610245 64610246 64610247 64610248 64610249 64610250 64610251 64610252 64610253 64610254 64610255 64610256 64610257 64610258 64610259 64610260 64610261 64610262 64610263 64610264 64610265 64610266 64610267 64610268 64610269 64610270 64610271 64610272 64610273 64610274 64610275 64610276 64610277 64610278 64610279 64610280 64610281 64610282 64610283 64610284 64610285 64610286 64610287 64610288 64610289 64610290 64610291 64610292 64610293 64610294 64610295 64610296 64610297 64610298 64610299 64610300 64610301 64610302 64610303 64610304 64610305 64610306 64610307 64610308 64610309 64610310 64610311 64610312 64610313 64610314 64610315 64610316 64610317 64610318 64610319 64610320 64610321 64610322 64610323 64610324 64610325 64610326 64610327 64610328 64610329 64610330 64610331 64610332 64610333 64610334 64610335 64610336 64610337 64610338 64610339 64610340 64610341 64610342 64610343 64610344 64610345 64610346 64610347 64610348 64610349 64610350 64610351 64610352 64610353 64610354 64610355 64610356 64610357 64610358 64610359 64610360 64610361 64610362 64610363 64610364 64610365 64610366 64610367 64610368 64610369 64610370 64610371 64610372 64610373 64610374 64610375 64610376 64610377 64610378 64610379 64610380 64610381 64610382 64610383 64610384 64610385 64610386 64610387 64610388 64610389 64610390 64610391 64610392 64610393 64610394 64610395 64610396 64610397 64610398 64610399 64610400 64610401 64610402 64610403 64610404 64610405 64610406 64610407 64610408 64610409 64610410 64610411 64610412 64610413 64610414 64610415 64610416 64610417 64610418 64610419 64610420 64610421 64610422 64610423 64610424 64610425 64610426 64610427 64610428 64610429 64610430 64610431 64610432 64610433 64610434 64610435 64610436 64610437 64610438 64610439 64610440 64610441 64610442 64610443 64610444 64610445 64610446 64610447 64610448 64610449 64610450 64610451 64610452 64610453 64610454 64610455 64610456 64610457 64610458 64610459 64610460 64610461 64610462 64610463 64610464 64610465 64610466 64610467 64610468 64610469 64610470 64610471 64610472 64610473 64610474 64610475 64610476 64610477 64610478 64610479 64610480 64610481 64610482 64610483 64610484 64610485 64610486 64610487 64610488 64610489 64610490 64610491 64610492 64610493 64610494 64610495 64610496 64610497 64610498 64610499 64610500 64610501 64610502 64610503 64610504 64610505 64610506 64610507 64610508 64610509 64610510 64610511 64610512 64610513 64610514 64610515 64610516 64610517 64610518 64610519 64610520 64610521 64610522 64610523 64610524 64610525 64610526 64610527 64610528 64610529 64610530 64610531 64610532 64610533 64610534 64610535 64610536 64610537 64610538 64610539 64610540 64610541 64610542 64610543 64610544 64610545 64610546 64610547 64610548 64610549 64610550 64610551 64610552 64610553 64610554 64610555 64610556 64610557 64610558 64610559 64610560 64610561 64610562 64610563 64610564 64610565 64610566 64610567 64610568 64610569 64610570 64610571 64610572 64610573 64610574 64610575 64610576 64610577 64610578 64610579 64610580 64610581 64610582 64610583 64610584 64610585 64610586 64610587 64610588 64610589 64610590 64610591 64610592 64610593 64610594 64610595 64610596 64610597 64610598 64610599 64610600 64610601 64610602 64610603 64610604 64610605 64610606 64610607 64610608 64610609 64610610 64610611 64610612 64610613 64610614 64610615 64610616 64610617 64610618 64610619 64610620 64610621 64610622 64610623 64610624 64610625 64610626 64610627 64610628 64610629 64610630 64610631 64610632 64610633 64610634 64610635 64610636 64610637 64610638 64610639 64610640 64610641 64610642 64610643 64610644 64610645 64610646 64610647 64610648 64610649 64610650 64610651 64610652 64610653 64610654 64610655 64610656 64610657 64610658 64610659 64610660 64610661 64610662 64610663 64610664 64610665 64610666 64610667 64610668 64610669 64610670 64610671 64610672 64610673 64610674 64610675 64610676 64610677 64610678 64610679 64610680 64610681 64610682 64610683 64610684 64610685 64610686 64610687 64610688 64610689 64610690 64610691 64610692 64610693 64610694 64610695 64610696 64610697 64610698 64610699 64610700 64610701 64610702 64610703 64610704 64610705 64610706 64610707 64610708 64610709 64610710 64610711 64610712 64610713 64610714 64610715 64610716 64610717 64610718 64610719 64610720 64610721 64610722 64610723 64610724 64610725 64610726 64610727 64610728 64610729 64610730 64610731 64610732 64610733 64610734 64610735 64610736 64610737 64610738 64610739 64610740 64610741 64610742 64610743 64610744 64610745 64610746 64610747 64610748 64610749 64610750 64610751 64610752 64610753 64610754 64610755 64610756 64610757 64610758 64610759 64610760 64610761 64610762 64610763 64610764 64610765 64610766 64610767 64610768 64610769 64610770 64610771 64610772 64610773 64610774 64610775 64610776 64610777 64610778 64610779 64610780 64610781 64610782 64610783 64610784 64610785 64610786 64610787 64610788 64610789 64610790 64610791 64610792 64610793 64610794 64610795 64610796 64610797 64610798 64610799 64610800 64610801 64610802 64610803 64610804 64610805 64610806 64610807 64610808 64610809 64610810 64610811 64610812 64610813 64610814 64610815 64610816 64610817 64610818 64610819 64610820 64610821 64610822 64610823 64610824 64610825 64610826 64610827 64610828 64610829 64610830 64610831 64610832 64610833 64610834 64610835 64610836 64610837 64610838 64610839 64610840 64610841 64610842 64610843 64610844 64610845 64610846 64610847 64610848 64610849 64610850 64610851 64610852 64610853 64610854 64610855 64610856 64610857 64610858 64610859 64610860 64610861 64610862 64610863 64610864 64610865 64610866 64610867 64610868 64610869 64610870 64610871 64610872 64610873 64610874 64610875 64610876 64610877 64610878 64610879 64610880 64610881 64610882 64610883 64610884 64610885 64610886 64610887 64610888 64610889 64610890 64610891 64610892 64610893 64610894 64610895 64610896 64610897 64610898 64610899 64610900 64610901 64610902 64610903 64610904 64610905 64610906 64610907 64610908 64610909 64610910 64610911 64610912 64610913 64610914 64610915 64610916 64610917 64610918 64610919 64610920 64610921 64610922 64610923 64610924 64610925 64610926 64610927 64610928 64610929 64610930 64610931 64610932 64610933 64610934 64610935 64610936 64610937 64610938 64610939 64610940 64610941 64610942 64610943 64610944 64610945 64610946 64610947 64610948 64610949 64610950 64610951 64610952 64610953 64610954 64610955 64610956 64610957 64610958 64610959 64610960 64610961 64610962 64610963 64610964 64610965 64610966 64610967 64610968 64610969 64610970 64610971 64610972 64610973 64610974 64610975 64610976 64610977 64610978 64610979 64610980 64610981 64610982 64610983 64610984 64610985 64610986 64610987 64610988 64610989 64610990 64610991 64610992 64610993 64610994 64610995 64610996 64610997 64610998 64610999 64611000 64611001 64611002 64611003 64611004 64611005 64611006 64611007 64611008 64611009 64611010 64611011 64611012 64611013 64611014 64611015 64611016 64611017 64611018 64611019 64611020 64611021 64611022 64611023 64611024 64611025 64611026 64611027 64611028 64611029 64611030 64611031 64611032 64611033 64611034 64611035 64611036 64611037 64611038 64611039 64611040 64611041 64611042 64611043 64611044 64611045 64611046 64611047 64611048 64611049 64611050 64611051 64611052 64611053 64611054 64611055 64611056 64611057 64611058 64611059 64611060 64611061 64611062 64611063 64611064 64611065 64611066 64611067 64611068 64611069 64611070 64611071 64611072 64611073 64611074 64611075 64611076 64611077 64611078 64611079 64611080 64611081 64611082 64611083 64611084 64611085 64611086 64611087 64611088 64611089 64611090 64611091 64611092 64611093 64611094 64611095 64611096 64611097 64611098 64611099 64611100 64611101 64611102 64611103 64611104 64611105 64611106 64611107 64611108 64611109 64611110 64611111 64611112 64611113 64611114 64611115 64611116 64611117 64611118 64611119 64611120 64611121 64611122 64611123 64611124 64611125 64611126 64611127 64611128 64611129 64611130 64611131 64611132 64611133 64611134 64611135 64611136 64611137 64611138 64611139 64611140 64611141 64611142 64611143 64611144 64611145 64611146 64611147 64611148 64611149 64611150 64611151 64611152 64611153 64611154 64611155 64611156 64611157 64611158 64611159 64611160 64611161 64611162 64611163 64611164 64611165 64611166 64611167 64611168 64611169 64611170 64611171 64611172 64611173 64611174 64611175 64611176 64611177 64611178 64611179 64611180 64611181 64611182 64611183 64611184 64611185 64611186 64611187 64611188 64611189 64611190 64611191 64611192 64611193 64611194 64611195 64611196 64611197 64611198 64611199 64611200 64611201 64611202 64611203 64611204 64611205 64611206 64611207 64611208 64611209 64611210 64611211 64611212 64611213 64611214 64611215 64611216 64611217 64611218 64611219 64611220 64611221 64611222 64611223 64611224 64611225 64611226 64611227 64611228 64611229 64611230 64611231 64611232 64611233 64611234 64611235 64611236 64611237 64611238 64611239 64611240 64611241 64611242 64611243 64611244 64611245 64611246 64611247 64611248 64611249 64611250 64611251 64611252 64611253 64611254 64611255 64611256 64611257 64611258 64611259 64611260 64611261 64611262 64611263 64611264 64611265 64611266 64611267 64611268 64611269 64611270 64611271 64611272 64611273 64611274 64611275 64611276 64611277 64611278 64611279 64611280 64611281 64611282 64611283 64611284 64611285 64611286 64611287 64611288 64611289 64611290 64611291 64611292 64611293 64611294 64611295 64611296 64611297 64611298 64611299 64611300 64611301 64611302 64611303 64611304 64611305 64611306 64611307 64611308 64611309 64611310 64611311 64611312 64611313 6

前摇言

任何一门科学都有它自身的理论基础,计算机科学也不例外。计算机技术变化很快,专门的技术知识今天有用,但常常在几年内就变成过时的东西。我们更应该培养思考的能力、清楚而准确地表达自己的能力、解决问题的能力以及知道问题什么时候还没有解决的能力。这些能力具有持久的价值。学习理论能够拓展人们的思维,并能使人们在这些方面得到训练。

形式语言与自动机是将数学系统应用于计算的模型。本课程重点介绍了形式语言及与之相对应的自动机体系。形式语言给出了对语言的语法规则进行描述和分类的形式化方法,而自动机则描述了能够识别语言的自动装置。这种形式化描述方法及自动机的工作原理是课程的核心内容,在编译理论、人工智能、电路设计、现代密码协议及通信等领域都有着极为广泛的应用,是每个对计算机科学感兴趣的人应该熟悉的内容。

本书共分 苑章。第 员章是预备知识,第 圆章至第 缘章讨论了 猿类文法所产生的语言和这些语言的识别装置。在这几章中,较详尽地论述了在计算机科学中有重大意义的 猿型文法与有限自动机、圆型文法与下推自动机,并简要地介绍了 园型文法与图灵机,形成了较完整的理论体系。第 远章简单介绍了前几章的理论与方法在编译方面的应用。第 苑章讨论了自动机理论在通信领域的某些应用。附录中简要介绍了计算复杂性理论。为避免过分形式化,本书强调基本概念的直观背景,主要定理证明的思路分析和各部分内容的内在联系,并配有较多的例题和习题,使比较抽

象的概念、理论易于理解与接受。

本书是在北京邮电大学陈崇昕教授 1985 年编写的《形式语言与自动机》这一教材的基础上结合编者的教学实践扩充、修改而成,在此谨向陈教授表示衷心感谢。同时,北京邮电大学出版社为本教材的顺利出版付出了很大努力,谨此一并致以诚挚的谢意。

由于编者水平所限,书中的不足之处在所难免,请广大专家和读者给予批评指正。

编 者

1994 年 10 月

目摇摇录

第 员章 基础知识	员
员.1 集合与关系	员
员.2 逻辑	怨
员.3 图	圆
员.4 证明技术	圆
员.5 演绎证明	圆
员.6 反证法	圆
员.7 归纳定义与归纳法	圆
习题	圆
第 圆章 语言及文法	猿
圆.1 语言的定义与运算	猿
圆.2 文法	猿
圆.3 文法的分类	猿
习题	猿
第 猿章 有限自动机和右线性文法	源
猿.1 有限自动机	源
猿.2 有限状态系统和有限自动机的概念	源
猿.3 有限自动机的形式定义	缘
猿.4 设计有限自动机	缘
猿.5 不确定的有限自动机	缘
猿.6 闭包与 晕 的等效	远
猿.7 有 ϵ 转换的不确定的有限自动机	远
猿.8 正则集与正则式	远

摇缘园源摇控制器的存储	猿缘
摇缘园源摇多道机	猿苑
摇缘园源摇核对符	猿苑
摇缘园源摇移位	源园
摇缘园源摇子程序	源员
缘源摇修改型图灵机	源源
摇缘源源摇双向无限带图灵机	源缘
摇缘源源摇多带图灵机	源怨
摇缘源源摇不确定的图灵机	源员
摇缘源源摇二维图灵机	源圆
缘源摇图灵机与无限制文法	源源
缘缘摇线性有界自动机与上下文有关文法	源愿
习题	源愿
第 远章摇翻译	源员
远员摇翻译式	源员
远圆摇转换器	源愿
摇远圆源摇有限转换器	源愿
摇远圆源摇下推转换器	源员
远猿摇词法分析	源苑
远源摇句法分析	源苑
摇远源源摇自上而下解析	源愿
摇远源源摇自下而上解析	源猿
习题	源苑
第 苑章摇自动机理论在通信领域的应用	源园
苑员摇状态机基本模型及其局限性	源园
苑圆摇配兑和 杂蕴简介	源源
苑猿摇应用状态机模型描述协议	源圆
附录摇计算复杂性与可计算性基础	源缘
参考文献	源愿

第 1 章 基础知识

作为阅读本书的一些基础知识,在本章内引入有关集合、图、逻辑和证明技术等方面的基本概念。熟悉这些内容的读者可略去本章,直接学习第 2 章。

1.1 集合与关系

1.1.1 集合

当研究某一类对象时,可把这类对象的整体称为集合,组成一个集合的对象称为该集合的元素。

设 S 是一个集合, x 是集合 S 中的元素,可表示为 $x \in S$,读作 x 属于 S 。如果 x 不是集合 S 的元素,则表示为 $x \notin S$,读作 x 不属于 S 。

例如, 26 个小写英文字母可组成一个字母集合 S ,每个小写字母皆属于 S ,可写为 $a \in S, b \in S, \dots, z \in S$ 。所有阿拉伯数字都不属于 S ,则有 $0 \notin S, 1 \notin S$ 等。

注意:为书写方便,今后对 $x \in S, x \notin S, \dots, z \in S$,可改写为 $x \in S, x \notin S, \dots, z \in S$ 。

有限个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合称为有限集合。无限个元素组成的集合称为无限集合。例如,整数构成的集合是一个无限集合。

不含元素的集合称为空集,记为 \emptyset 。

集合的表示法,有列举法和描述法。

列举法摇列举法是把集合的元素一一列举出来。例如 圆个
小写英文字母组成的集合 粤,可写成 粤越葬遭糟... ,拙;阿拉伯数字
的集合 阅越园员圆,... 怨,以及集合 悦越葬,葬,葬,...}等。

描述法摇列举法是描述出集合中元素所符合的规则。

例如,晕越灶灶是自然数} 表明是自然数集合晕

粤越曾曾 在且 园< 曾< 缘,其中在是整数,则粤越园员圆,
猿源缘。

圆援集合之间的关系

(员) 设两个集合 粤月包含的元素完全相同,则称集合 粤和 月
相等,表示为 粤越月。

例如,集合 粤越葬遭糟,集合 月越遭葬糟,则有 粤越月。

应指出,一个集合中元素排列的顺序是无关紧要的。

有限集合 粤中不同元素的个数称为集合的基数,表示为 裕粤或
|粤。

例如,月越葬遭糟原愿,其基数裕月越缘。

(圆) 设两个集合 粤月,当 粤的元素都是 月的元素,则称 粤包含
于 月或称 粤是 月的子集,表示为 粤< 月。当 粤< 月且 粤≠月,称 粤
是 月的真子集,表示为 粤< 月。

如果所研究的集合皆为某个集合的子集时,称该集合为全集,
记为 耘。

(猿) 根据(员)和(圆),对于任意两个集合 粤月,粤越月的充要条
件是 粤< 月且 月< 粤。

猿援幂集

设 粤是集合,粤的所有子集组成的集合称为 粤的幂集,表示为
圆粤或 $\rho(\text{粤})$ 。

例如,粤越葬遭糟,则有

摇摇 ρ (粤越) $\{葬\}$ $\{遭\}$ $\{糟\}$ $\{葬遭\}$ $\{遭糟\}$,
 $\{葬糟\}$ $\{葬遭糟\}$

当粤是有限集, ρ (粤越灶) 则 ρ (粤) 的元素数为

$$悦垣悦垣垣\dots垣悦垣悦垣$$

应指出, 空集 \emptyset 是任何集合的一个子集。

源集合的运算

(员) 设两个集合粤, 月, 由粤和月的所有共同元素构成的集合, 称为粤和月的交集, 表示为粤 \cap 月

例如, 粤越葬遭糟, 月越糟凿藻枣, 则粤 \cap 月越糟。

(圆) 设两个集合粤, 月, 所有属于粤或属于月的元素组成的集合, 称为粤和月的并集, 表示为粤 \cup 月

例如, 粤越葬遭, 月越苑愿, 则粤 \cup 月越葬遭苑愿。

(猿) 设两个集合粤, 月, 所有属于粤而不属于月的一切元素组成的集合, 称为月对粤的补集, 表示为粤 $\overline{\cap}$ 月

例如, 粤越葬遭糟凿, 月越糟凿藻, 则粤 $\overline{\cap}$ 月越葬遭, 月原粤越{藻}。

设全集耘和集合粤, 则称耘原粤是集合粤的补集, 表示为 $\overline{\text{粤}}$

(源) 设两个集合粤, 月, 所有序偶(葬遭) 组成的集合, 称为粤月的笛卡尔乘积, 表示为粤伊月

$$\text{粤伊月越}\{葬遭\} \times \{粤且遭\}$$

例如, 粤越葬遭糟, 月越园员, 则粤伊月越{(葬园), (葬员), (遭园), (遭员), (糟园), (糟员)}。

序偶的元素排列是有顺序的, 不能任意颠倒, (葬遭) 和(遭葬) 是不相同的两个序偶, 因此两个序偶相等, 应该是对应元素相同, 例如, (葬遭) 越(糟凿), 应有葬越糟和遭越凿

对任意集合粤, 月, 悦有如下运算律:

(员) 粤 \cup 粤越粤, 粤 \cap 粤越粤;

(圆) 粤 \cup 月越月 \cup 粤, 粤 \cap 月越月 \cap 粤;

(猿 (粤月) ∪ 悦越粤 (月悦) ,
 (粤月) ∩ 悦越粤 (月悦) ;
 (源 粤 (月悦) 越 粤 (月) ∩ (粤悦) ,
 粤 (月悦) 越 粤 (月) ∪ (粤悦) ;
 (缘 粤 (粤月) 越 粤, 粤 (粤月) 越 粤;
 (远 粤 粤越粤, 粤 粤越粤 ;
 (苑 粤月越粤月, 粤月越粤月;
 (愿 耘 粤越粤, 耘 粤越粤;
 (怨 粤 越 粤, 粤 越 粤。

缘关系

关系的概念在数学中是常用的, 诸如大于、小于、等于、包含等都属于关系。下面给出关系的形式定义。

定义 员 设 粤是一个集合, 粤伊粤的一个子集 砸称为是集合 粤上的一个二元关系, 简称关系。

对于 葬 粤, 遭 粤, 如果 (葬, 遭) ∈ 砸, 称 葬和 遭存在关系 砸, 表示为 葬砸 遭; 如果 (葬, 遭) ∉ 砸, 称 葬和 遭不存在关系 砸, 表示为 葬不砸 遭。

例如, 自然数集合 晕中的大于关系, 可表示为

跃越 (葬, 遭) 葬 > 遭

当有两个集合 粤, 月, 则从 粤到 月的关系是 粤伊月的一个子集。

例 员 设 粤越 {曾, 赠, 扎}, 月越 {园, 员}

粤伊月越 {(曾, 园), (曾, 员), (赠, 园), (赠, 员), (扎, 园), (扎, 员)}

则下列子集均为从 粤到 月的关系:

摇摇摇摇越 (曾, 园), (赠, 园)

摇摇摇摇越 (曾, 员), (赠, 员), (扎, 园)

摇摇摇摇越 (赠, 园)

定义 员 设集合 粤, 砸是 粤上的关系:

- ✦ 对每个 葬 ∈ 粤, 如果有 葬砸葬, 称 砸是自反的;
- ✦ 对于 葬, 遭 ∈ 粤, 如果有 葬砸遭, 又有 遭砸葬, 称 砸是对称的;
- ✦ 对于 葬, 遭 ∈ 粤, 如果有 葬砸遭, 和 遭砸葬, 则必有 葬越遭, 称 砸是反

对称的；

- ✦ 对于 φ 集 S , 如果有 φ 和 φ 则有 φ 称 φ 是传递的；
- ✦ 对每个 φ 集 S , 如果 φ 称 φ 是反自反的。

例如, 数之间的相等关系, 具有自反性、对称性和传递性, 小于关系和大于关系没有自反性, 但有传递性。

定义 1.1 设 φ 是非空集合 S 上的一个关系, 如果 φ 有自反性、对称性和传递性, 则称 φ 是一个等价关系。

由等价关系 φ 可以把 S 分为若干子集, 每个子集称为一个等价类, 同一等价类中的元素互相是等价的。

例 1.1 设在 \mathbb{Z} 是整数集合, φ 是在 \mathbb{Z} 模 m 同余关系, 也是一个等价关系, 即

$$\{ [a]_{\varphi} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \varphi(a, a) \}$$

由于 φ 是等价关系, 则存在 n 个等价类为

$$\{ [0]_{\varphi}, [1]_{\varphi}, \dots, [n-1]_{\varphi} \}$$

$$\{ [a]_{\varphi} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \varphi(a, a) \}$$

$$\{ [b]_{\varphi} \mid b \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \varphi(b, b) \}$$

其中 $[a]_{\varphi}, [b]_{\varphi}, [c]_{\varphi}$ 是表示等价类的符号。

逆关系

设 φ 是集合 S 上的一个关系, 则

$$\varphi^{-1} = \{ (b, a) \mid (a, b) \in \varphi \}$$

称 φ^{-1} 是关系 φ 的逆关系。

例如, 小于关系的逆关系是大于关系, 相等关系的逆关系仍然是相等关系。

偏序关系

定义 1.2 设 φ 是集合 S 上的一个关系, 如果 φ 有自反性、反对称性和传递性, 则称 φ 是偏序关系(或部分序关系)。

例 1.2 设集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, φ 是集合 S 上的整除关系, 即

可得

砸越 (圆圆) (猿猿) (远远) (愿愿) (圆远) (圆愿) (猿远}

例 源 设集合 粤越 葬,遭 幂集 $\rho(\text{粤})$ 上的包含关系 \subseteq 是一个偏序关系。这里

$\rho(\text{粤})$ 越 { \emptyset } {葬} {遭} {葬遭}

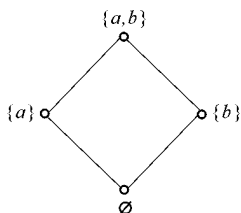


图 员 源 源 $\rho(\text{粤})$ 上的包
括关系

在 $\rho(\text{粤})$ 上的包含关系可用图的方法表示,如图 员 源 源 所示。

描写偏序关系的图称为哈斯图。结合本例说明哈斯图的画法:由于 $\rho(\text{粤})$ 中存在 $\{\emptyset\} \subseteq \{\text{葬}\}$, 所以哈斯图中有一条从节点 $\{\emptyset\}$ 到节点 $\{\text{葬}\}$ 的边,这条边是自下而上的。又因 $\{\emptyset\} \subseteq \{\text{遭}\}$, 故从节点 $\{\emptyset\}$

到节点 $\{\text{葬}\}$ 也存在一条自下而上的边。而对于 $\{\emptyset\} \subseteq \{\text{葬遭}\}$, 由于以上两条边的存在,靠偏序关系的传递性,从节点 $\{\emptyset\}$ 到节点 $\{\text{葬遭}\}$ 之间的边是不必要的。

愿 关系的闭包

定义 员 源 源 设 砸 是集合 粤 上的关系,如果另有关系 砸 满足:

(员) 砸 是传递的(自反的,对称的);

(圆) 砸 \supseteq 砸;

(猿) 对任何传递的(自反的、对称的)关系 砸,当有 砸 \supseteq 砸,就有 砸 \supseteq 砸 则称关系 砸 是 砸 的传递(自反、对称)闭包。

砸 的自反闭包表示为 则砸,砸 的对称闭包表示为 泽砸,砸 的传递闭包表示为 贼砸。

如果给定一个集合 粤 上的关系 砸,可用以下方法找出传递闭包 贼砸,自反闭包 则砸 和对称闭包 泽砸:

(员) 则砸 越 砸 \cup 隅, 其中 隅 越 (曾曾 灑 粤);

(圆) 泽砸 越砸砸^原;

(猿) 贼砸 越砸砸^原...砸^原其裕粤越灶

例 缘设集合 粤越葬遭糟,粤上的关系 砸越(葬遭,(遭遭,(遭糟,(遭糟),则 砸的传递闭包为

贼砸 越(葬遭,(遭遭,(遭糟,(葬糟),

而 砸的自反传递闭包表示为

贼砸 越(葬葬,(葬遭,(遭遭,(遭糟,(葬糟,(糟糟}。

今后用 砸^原表示 砸的传递闭包,用 砸表示 砸的自反传递闭包。

怨映射

映射是关系的一个特殊类型,也称函数。

定义 员设集合 粤和 月,枣是从 粤到 月的一个关系,如果对每一个 葬∈粤,有惟一的 遭∈月,使得(葬遭)∈枣,称关系 枣是函数,记为 枣粤→月

如果存在(葬遭)∈枣,则 葬是 枣的自变量,遭是 枣作用下的像点,因此(葬遭)∈枣亦可写成 枣葬 越遭

由定义 员可知,函数有如下特点:

(员) 函数 枣的定义域是 粤,不能是 粤的某个真子集。

(圆) 一个 葬∈粤只能对应于惟一的一个 遭或者说 枣葬是单值的。枣的值域是 月的子集,记为 砸。

例 设集合 粤越葬遭糟,月越曾赠

枣越(葬曾,(遭曾,(糟赠}

枣越(葬赠,(遭赠,(糟赠}

枣越(葬赠,(遭曾,(糟曾}

枣越(葬曾,(葬赠,(遭曾}

枣越(葬曾}

其中,枣,枣和 枣均为函数,枣和 枣不是函数,是关系。

函数的几种特殊类型是:

(员) 对于 枣粤→月,如果 枣的值域 砸越月,即 月的每一个元素

都是 粵 中一个或多个元素的像点,则称 φ 是满射的。

例如,集合 粵 越 葬 遭 糟 啣, 月 越 曾 赠 扎, 如果 $\varphi: \text{粵} \rightarrow \text{月}$ 为:

葬 葬 越 曾 葬 遭 越 曾 葬 糟 越 赠 葬 啣 越 扎

则 φ 是满射的。

(圆) 对于 $\varphi: \text{粵} \rightarrow \text{月}$ 如果 粵 中没有两个元素有相同的象点,则称 φ 是入射的,即对于任意 葬, 葬' \in 粵:

如果 葬 \neq 葬', 则有 $\varphi(\text{葬}) \neq \varphi(\text{葬}')$, 或者如果 $\varphi(\text{葬}) = \varphi(\text{葬}')$, 则有 葬 越 葬'。

例如,集合 粵 越 葬 遭, 月 越 曾 赠 扎, 如果 $\varphi: \text{粵} \rightarrow \text{月}$ 为: 葬 葬 越 曾, 葬 遭 越 赠, 则称 φ 是入射的。

(猿) 对于 $\varphi: \text{粵} \rightarrow \text{月}$ 如果 φ 既是满射的, 又是入射的, 则称 φ 是双射的, 或称是一一对应的。

例如,集合 粵 越 葬 遭 糟, 月 越 员 圆 猿, 如果 $\varphi: \text{粵} \rightarrow \text{月}$ 为

葬 葬 越 猿, 葬 遭 越 员, 葬 糟 越 圆

则称 φ 是双射的, 或者说是一一对应的。

员 集合的划分

定义 员 设非空集合 粵, $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$, 其中 $\pi_i \subset \text{粵}$, $\pi_i \neq \pi_j$ ($i \neq j$), 如果有 $\bigcup_{i=1}^n \pi_i = \text{粵}$ 且 $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则称 Π 是 粵 的划分。其中 π_i 是一个划分块。

例如,集合 杂 越 葬 遭 糟 啣, 考虑下列集合:

摇摇摇摇粤 越 {葬 遭 {糟 啣}}

摇摇摇摇月 越 {葬 {遭 {糟 {啣}}}}

摇摇摇摇悦 越 {葬 {遭 糟 啣}}

摇摇摇摇阅 越 {葬 遭 糟 啣}

摇摇摇摇耘 越 {葬 遭 {遭 糟 啣}}

摇摇摇摇云 越 {葬 遭 {糟}}

则 粵 月 悦 和 阅 都是 杂 的划分, 耘 和 云 则不是 杂 的划分。

员援集合的基数(或势)

对于有限集而言,所谓集合的基数,即为集合中不同元素的个数。但对于无限集来说,集合的基数是什么?两个无限集的基数是否相同呢?在讨论了函数之后,可以使用一一对应(双射)来讨论集合的基数。

定义 员援设有集合 粤和 月,如果存在双射函数 枣粤→月,则说粤和 月有相同的基数,或者说 粤和 月等势,记为 粤~月。

显然,对于有限集合 粤和 月,称它们有相同的基数,是指它们的元素个数相同。对于无限集,可以看例 苑。

例 苑 设偶数集合 晕= {圆,源,远,...}, 定义函数 枣晕→晕, 晕为自然数集合。如果对每个 灶∈晕,有 枣灶= 灶灶,显然 枣是从晕到晕的双射,所以存在 晕~晕。

例 苑说明,一个无限集,存在着它与其自身的一个真子集有相同的基数。这里 晕和自然数集合都是无限集。

通常,考虑一个无限集的基数时,总是看它与自然数集合能否建立一一对应。能与自然数集合建立一一对应的无限集称为可数集,不能与自然数集合建立一一对应的无限集称为不可数集。

例如,整数集合是可数集,集合{员猿缘苑...}是可数集,实数集合 砸是不可数集,集合{曾, 砸, 园, 曾, 员}是不可数集,其中 砸是实数。

员援逻辑逻辑辑

员援命题与连接词

命题是一个能判断真假的语句,一般可用一个大写英文字母表示一个命题。例如下列语句皆为命题:

孕猿是奇数

匝铜是金属

砸员加 源是 圆

可见,命题孕和命题匝的真值均为真(栽),命题砸的真值为假(云)。

连接词是用于把命题构成复合命题,连接词包括“非”、“与”、“或”和“蕴含”。通常用符号“ \neg ”表示“非”,符号“ \wedge ”表示“与”、符号“ \vee ”表示“或”和符号“ \rightarrow ”表示“蕴含”。下面用真值表的方法,给出这些连接词的定义,见表员圆。

表 员圆 连接词的真值表

孕	匝	\neg 孕	孕 \wedge 匝	孕 \vee 匝	孕 \rightarrow 匝
云	云	栽	云	云	栽
云	栽	栽	云	栽	栽
栽	云	云	云	栽	云
栽	栽	云	栽	栽	栽

表 员圆 表明:

当命题孕和匝的真值皆为真时,当且仅当复合命题孕 \wedge 匝的真值为真。其他情况孕 \wedge 匝的真值均为假。

当命题孕和匝的真值皆为假时,当且仅当复合命题孕 \vee 匝的真值为假。其他情况孕 \vee 匝均为真。

当命题孕为真且命题匝为假时,当且仅当复合命题孕 \rightarrow 匝的真值为假。其他情况孕 \rightarrow 匝均为真。

至于连接词“非”可对命题进行否定,当命题孕为真,则有 \neg 孕为假。

圆 命题“孕当且仅当匝”

通常在定理(或命题)证明中,如果将两个命题孕匝用当且仅当连接起来,读为“孕当且仅当匝”或“孕是匝的充要条件”。“当且仅当”在逻辑上也是一个连接词,可用符号“ \leftrightarrow ”表示。下面先用真值表给出连接词“ \leftrightarrow ”的定义,以及它与连接词“ \rightarrow ”的关系,