

西北工业大学专著出版基金资助项目

# 信号相位匹配原理及其应用

孙进才 朱维杰 著

西北工业大学出版社

**【内容简介】** 本书系统地介绍了信号相位匹配原理及其应用。首先讲述了信号相位匹配原理的信号处理方法,其内容包括利用三元阵和多元阵的信号相位匹配原理的数学表达式;利用三元阵的信号相位匹配原理在复平面表示的几何解释;接收信号相位和幅度不一致性对信号估计及空间方位估计影响的分析等。最后介绍了该原理在信号参数估计、波达方向估计及高分辨方位估计等方面的应用。

本书所论述的信号相位匹配原理是无须信号、噪声统计假设的求解信号的方法,是不同于常规和现代信号处理方法的另类方法,这一方法为信号处理开拓了新的途径。

## 图书在版编目(CIP)数据

信号相位匹配原理及其应用/孙进才,朱维杰著. —西安:西北工业大学出版社,2005. 2

ISBN 7-5612-1873-7

I. 信… II. ①孙… ②朱… III. 信号处理—相位匹配  
IV. TN911. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 138122 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:029-88493844 88491757

网 址:www.nwupub.com

印 刷 者:陕西百花印务有限责任公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:7.25

字 数:179 千字

版 次:2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印 数:1~2 000 册

定 价:16.00 元

# 前 言

将本书的信号处理原理称为“信号相位匹配原理”是经过了近十年的研究后,对其物理意义深入理解的结果。

笔者涉足信号处理领域完全是一个偶然的时机。那是在1993年,我的多年至交请我帮忙找个学生解决“低信噪比条件下的信号估计”问题,以满足隐身目标的辐射噪声测量要求。这是属“极微弱信号估计”问题,它是目前许多信号处理专家致力解决的难题。对于“半途出家”的我就更难。我只能老老实实从头开始,首先对目前已有的噪声抵消方法,如自适应噪声抵消法、利用神经网络法、子波变换法和混沌分形法进行研究并加以改进,以期能用于极微弱信号的估计,但结果却令人失望。正当“山穷水复疑无路”时,G. J. Orris 等人的一篇论文《相位匹配的噪声抵消》中的仿真结果说明,能从信噪比为 $-100\text{dB}$ 的条件下估计信号,这给我“柳暗花明又一村”的感觉。但深入研究结果后知道,该方法只有在信号中的环境噪声谱已知时才能从信噪比为 $-100\text{dB}$ 的条件下估计信号,当噪声谱存在起伏时,信号估计性能急剧下降。但是它给我一个启发:即当信号和噪声线性可加时,可实现在复数域求解信号。

在复数域求解信号的探索过程经历了很长一段时间。首先,分析了 Orris 相位匹配法抵消噪声原理的物理意义及其优缺点,以及可改进的方法;然后,研究了利用二元、三元阵接收信号来求解期望信号的方法;最后,发现只有利用三元阵接收信号才能获得期望信号的实部与虚部,但必须假设三个阵元接收信号中的噪声

功率必须近似相等。因此一开始定义这种方法为“噪声功率匹配法”。利用该方法在信噪比为 $-30\text{dB}$ 的条件下进行仿真,获得了令人满意的结果,真是喜出望外。因为信号相位匹配原理是无须信号、噪声统计假设的求解信号的方法,它是不同于目前已有的信号参数估计的另类方法。这种另类方法要融入常规和现代信号处理并非易事。此后笔者加强信号处理的基础知识学习,并对该方法进行深入的仿真计算,以求对该原理的物理意义、误差产生的原因及在工程中应用的可行性有更深入的理解。在发表论文方面,将该原理与应用相结合,而不是采取原理的纯数学分析。经过近四年的不懈努力,终于渡过了最困难的时期。近四年来,已在国内重要刊物发表有关论文 17 篇,获得包括国家自然科学基金项目等多项资助。更令人可喜的是完成了信号相位匹配原理的目标定向的消声水池和水库实验研究,实验结果证明利用该原理的定向算法具有超指向性和超增益的优越性能以及良好的工程应用前景。根据目前我们对该原理物理意义的理解,将这种信号处理原理由“噪声功率匹配原理”改为“信号相位匹配原理”。

尽管研究工作已经走过了“万事开头难”的过程,但是要将该原理应用于实际工程尚待解决的问题还很多。笔者对可应用该原理的方面亦有诸多设想,但是由于实际条件的限制,也难以实现。因此用出版“小册子”(还称不上专著)的方法将该原理公布,一方面是敬请信号处理专家赐教,使该方法得以逐步完善;另一方面使感兴趣的研究者能在其研究领域得到改进、应用。如果能做到这一点,那笔者这几年的辛勤劳动就没有白费,也达到了写作本书的目的,这就是对笔者的最大安慰。由于知识水平有限,错误和不当之处在所难免,欢迎读者批评指正。

本书分为六章。第 1 章介绍了信号相位匹配原理的信号估计算法中用到的一些基本知识。第 2 章是本书的核心,叙述了信号相位匹配原理的基本思想、数学表述、物理解释、误差分析和利用

多元阵的目标方位及信号估计的算法等。相干干扰抵消是信号处理中的难题之一,第3章研究了利用信号相位匹配原理的相干干扰抵消原理,干扰幅度起伏,以及截断误差对干扰抵消的影响。第4章阐述了利用三元阵和多元阵的信号相位匹配原理的定向算法,其中包括了大量的实验结果,从理论仿真和实验两个方面证明了信号相位匹配原理定向算法具有超指向性和超增益的优越性,这也是提出信号相位匹配原理的初衷。第5章叙述了信号相位匹配原理在正弦信号参数估计、时延估计和信号检测中的应用。第6章是试图利用信号相位匹配原理分辨同一常规波束中两个和三个源方位的高分辨方位估计,在此仅仅做了一些仿真工作,尚待深入研究。参考文献中有关信号相位匹配原理的论文均是作者近年来发表的,其中大量的有关阵列信号处理的文章对从事阵列信号处理的研究者极有参考价值。

在近十年中,王惠刚、孙轶源、张小蓟、刘理、梁红、肖卉、杨建华、王敏庆、姜小权等先后参加了研究工作,他们在不同的研究阶段陪伴我渡过了最艰难的时刻,这是令笔者难以忘却的。

在这里,要特别感谢杨士莪院士自始至终对该研究工作的鼓励、帮助和支持,他的支持是笔者能长期坚持不懈努力的动力。在研究工作初期,感谢马远良院士和保铮院士提出的宝贵意见。

信号相位匹配原理及其应用研究,历经十年,在研究过程中先后获得国防科学技术工业委员会的基础科研项目、国家自然科学基金项目、航空科学基金项目、航天创新基金项目和陕西省自然科学基金项目的资助。没有这些资助,研究工作难以为继,特别是在最困难的初期,那更是雪中送炭。为此,笔者表示深切的感谢。

最后,对有关学术论文提出过宝贵意见的专家和读者表示衷心感谢。

孙进才

2004年10月

# 目 录

第 1 章 基本知识.....	1
第 1 节 最小二乘法.....	1
第 2 节 奇异值分解与最小二乘法.....	3
第 3 节 波束形成.....	6
一、信号的窄带假设和解析表示 .....	8
二、常规波束形成.....	10
第 2 章 信号相位匹配原理 .....	12
第 1 节 引言 .....	12
第 2 节 信号相位匹配原理的数学表示 .....	18
一、三元阵的信号相位匹配原理.....	18
二、多元阵的信号相位匹配原理.....	24
三、时空联合处理.....	36
第 3 节 信号相位匹配原理的几何描述 .....	39
第 4 节 噪声谱幅度起伏对估计信号的影响 .....	43
第 5 节 信号相位起伏对估计信号的影响 .....	51
第 6 节 估计信号奇异值产生的条件 .....	56
第 3 章 信号相位匹配原理的相干干扰抵消 .....	60
第 1 节 相干干扰抵消原理 .....	60

一、引言.....	60
二、相干干扰抵消原理.....	62
三、信号相位匹配法抵消干扰的仿真.....	64
第 2 节 信号相位匹配法抵消相干干扰的性能分析 .....	65
一、方程组无解的两种情况.....	65
二、阵元间距的选择.....	68
第 3 节 干扰幅度起伏对干扰抵消性能的影响 .....	69
一、干扰起伏时期望信号的解.....	69
二、干扰起伏时期望信号的相对误差.....	70
三、干扰起伏时基阵的噪声抑制性能.....	74
第 4 节 截断误差对消除干扰性能的影响 .....	78
第 4 章 信号相位匹配原理的波达方向估计 .....	82
第 1 节 引言 .....	82
第 2 节 三元阵的波达方向估计 .....	83
一、波达方向估计原理.....	83
二、波达方向估计的搜索算法.....	85
三、搜索指向性.....	86
第 3 节 三子阵相位匹配原理的波达方向估计 .....	88
一、波达方向估计原理.....	88
二、波达方向估计的搜索算法.....	91
三、搜索指向性.....	93
四、空间增益.....	96
第 4 节 波达方向估计的最小二乘法 .....	98
第 5 节 多子阵的波达方向估计.....	100
一、多子阵的信号最小二乘解方位估计原理 .....	100

---

二、基于多子阵信号最小二乘解的方位和参数估计	
.....	101
三、计算机仿真	102
第 6 节 波达方向估计的奇异值分解法	106
一、基于奇异值分解法的方位估计原理	106
二、计算机仿真	108
第 7 节 实验及分析	112
一、实验一	112
二、实验二	131
三、实验三	135
第 5 章 信号相位匹配原理的信号参数估计	141
第 1 节 已知频率信号的参数估计	141
一、引言	141
二、正弦信号的参数估计	143
三、已知频率信号的参数估计	145
第 2 节 正弦信号参数估计	147
一、正弦信号参数估计的搜索算法	148
二、仿真及分析	148
第 3 节 正弦信号参数估计的最小二乘法	151
一、确知频率时正弦参数的最小二乘估计	152
二、未知频率、幅值和相位的信号参数估计	154
三、仿真及分析	155
第 4 节 信号相位匹配原理的广义相关时延估计	159
一、确知频率信号的相位及时延估计	160
二、大于信号采样周期时的时延估计	161
三、仿真及分析	162
四、实验数据处理	168

第 5 节	数字调频信号解调.....	172
一、FSK 信号解调	.....	173
二、计算机仿真	.....	176
第 6 节	基于信号相位匹配原理的信号检测.....	179
一、基于信号相位匹配原理的最小二乘信号检测	...	180
二、仿真及分析	.....	181
第 6 章	利用信号相位匹配原理的高分辨方位估计.....	185
第 1 节	引言.....	185
第 2 节	利用三元阵的高分辨方位估计算法.....	186
一、两源情况	.....	186
二、三源的高分辨方位估计	.....	195
第 3 节	三子阵的高分辨方位估计.....	197
附录 1	.....	201
附录 2	.....	205
参考文献	.....	207

# 第 1 章 基本知识

本章简要介绍书中将会用到的一些有关信号处理的方法,其中主要涉及最小二乘(LS)法、奇异值分解(SVD)法和常规波束形成(CBF)法,为以后的讨论提供必要的基础知识。

## 第 1 节 最小二乘法

考虑矩阵方程

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.1)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$ , 为一观测值向量;  $\mathbf{A}$  是  $N \times p$  ( $p \leq N$ ) 维的系数矩阵,  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{A}$  为已知;  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_p]^T$  是  $p$  维未知参数向量;  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \cdots \ \varepsilon_N]^T$  是  $N$  维“拟合误差”向量, 它也是未知的。现在提出的问题是: 如何利用已知的  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{A}$  来确定  $\boldsymbol{\theta}$ ?

为了确定  $\boldsymbol{\theta}$ , 选择这样一种准则: 使误差平方和

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.2)$$

为最小。这种估计方法叫最小二乘(LS)法;  $\boldsymbol{\theta}$  的估计值记作  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}$ , 称为  $\boldsymbol{\theta}$  的最小二乘估计值。将误差的平方和展开, 得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.3)$$

将上式对  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  求导, 得

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{d\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.4)$$

也就是说,  $\hat{\theta}$  必须满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\theta} \quad (1.5)$$

这个方程有两类不同的解:

第一类:  $\text{rank}(\mathbf{A}) = p$

由于  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  非奇异, 我们称  $\theta$  是可识别的, 换言之,  $\hat{\theta}_{\text{LS}}$  是由

$$\hat{\theta}_{\text{LS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (1.6)$$

惟一确定。

第二类:  $\text{rank}(\mathbf{A}) < p$

在这种情况下, 由不同的  $\theta$  均能得到相同的  $\mathbf{A}\theta$  值。显然观测向量  $x$  可以提供有关  $\mathbf{A}\theta$  的某些信息, 但我们无法区别对应于同一  $\mathbf{A}\theta$  值的各个不同的  $\theta$  值, 因此, 称  $\theta$  是不可识别的。更一般地讲, 如果某参数的不同值给出在抽样空间上的相同分布, 则称这一参数是不可识别的。

**定理 1 (Gauss-Markov 定理)** 令  $x$  是一可表示为  $x = \mathbf{A}\theta + \varepsilon$  的随机向量, 其中  $\mathbf{A}$  是  $N \times p (p \leq N)$  维矩阵, 其秩为  $p$ ;  $\theta$  是一个未知向量,  $\varepsilon$  为一误差向量。若  $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$ ,  $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$ , 其中  $\sigma^2$  未知, 则对线性参数函数  $\beta = \mathbf{C}^T \theta$  的任何一个别的无偏估计值  $\tilde{\beta}$ , 有  $E(\hat{\theta}_{\text{LS}}) = \theta$ , 且  $\text{var}(\mathbf{C}^T \hat{\theta}_{\text{LS}}) \leq \text{var}(\tilde{\beta})$ 。

Gauss-Markov 定理表明, 当误差向量的各分量具有相同的方差, 而且各分量不相关时, 最小二乘估计在方差最小的意义上是最佳的。

**证明** 因为  $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$  及  $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}$ , 可以求出

$$E(x) = E(\mathbf{A}\theta) + E(\varepsilon) = \mathbf{A}\theta \quad (1.7)$$

及

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \text{var}(\mathbf{A}\theta + \varepsilon) = \text{var}(\mathbf{A}\theta) + \text{var}(\varepsilon) = \\ &\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.8)$$

因此有

$$E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}) = E[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}] = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T E(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \quad (1.9)$$

利用这一结果,有

$$E[\mathbf{C}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}] = \mathbf{C}^T E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}] = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} \quad (1.10)$$

故  $\mathbf{C}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}$  是无偏的。由于  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  是一线性估值,所以它可用  $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$  的形式来表征。又由于  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  是  $\boldsymbol{\beta}$  的无偏估计值,故对任意  $\boldsymbol{\theta}$  可得

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}^T E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{b}^T \mathbf{x}) = E(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\theta} \quad (1.11)$$

结果有  $\mathbf{b}^T \mathbf{A} = \mathbf{C}^T$ 。现在有

$$\text{var}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \text{var}(\mathbf{b}^T \mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \text{var}(\mathbf{x}) \mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (1.12)$$

类似地,有

$$\text{var}(\mathbf{C}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}}) = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{b}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (1.13)$$

比较  $\text{var}(\mathbf{C}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LS}})$  和  $\text{var}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$  可知,为了证明本定理,必须证明

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (1.14)$$

或等价证明  $\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  是半正定的。大家知道,若  $\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}$ , 则矩阵  $\mathbf{F}$  是幂等矩阵,而且任一幂等矩阵都是半正定的。因此,容易验证  $\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  是幂等矩阵,从而定理得证。

## 第 2 节 奇异值分解与最小二乘法

奇异值分解(SVD)法主要用于线性方程组求解。与该方程组相关联的矩阵不仅表征所期望解的特征,而且还常常传达动态性能的信息。因此,应该研究此特征矩阵的特性。首先了解一下有关奇异值分解的定理。

**定理 2** 令  $\mathbf{A}$  是一个  $m \times n$  维复数矩阵,则分别存在一个  $m \times m$  维和一个  $n \times n$  维酉矩阵  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$ ,使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad (1.15)$$

式中,上标“ $*$ ”表示矩阵的共轭转置; $\Sigma$ 是一个 $m \times n$ 维对角阵,其中主对角线上的元素是非负的,并按下列顺序排列:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \cdots \geq \sigma_{hh} \geq 0$$

式中, $h = \min(m, n)$ 。

一个实的酉矩阵 $U$ 又叫正交矩阵,即有 $U^{-1} = U^T$ 。对角元素 $\sigma_{kk}$ ( $k \leq h$ )称为矩阵 $A$ 的奇异值,矩阵 $U$ 和 $V$ 分别叫作矩阵 $A$ 的左奇异矩阵和右奇异矩阵,而 $U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]$ 和 $V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ 的列向量 $u_i$ 和 $v_j$ 分别称为矩阵 $A$ 的左奇异向量和右奇异向量。

众所周知,非零的奇异值对应于非负 Hermitian 阵 $AA^*$ 和 $A^*A$ 的特征值的正平方根,而且, $U$ (或 $V$ )的列对应于非负 Hermitian 阵 $AA^*$ (或 $A^*A$ )的适当排列的正交特征向量。

奇异值 $\sigma_{kk}$ 包含了有关矩阵 $A$ 的秩的特征的有用信息。这很容易通过考虑下面的问题加以说明:求秩为 $k$ 的 $m \times n$ 维矩阵,使得它在 Frobenius 范数意义上可最佳逼近 $A$ ,这里假定 $k \leq \text{rank}(A)$ 。

$m \times n$  维矩阵差 $A - B$ 的 Frobenius 范数定义为

$$\|A - B\|_F = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right]^{1/2} \quad (1.16)$$

现在寻找一个 $m \times n$ 维而秩为 $k$ 的矩阵 $B$ ,并能使上述范数为最小。这一逼近问题的解可以用下面的定理来描述。

**定理3** 在 Frobenius 范数意义下,能使最佳逼近 $m \times n$ 维矩阵 $A$ 的惟一 $m \times n$ 维,且秩 $k \leq \text{rank}(A)$ 的矩阵由

$$A^{(k)} = U \Sigma_k V^* \quad (1.17)$$

给定,其中 $U$ 和 $V$ 如式(1.15)所示,而 $\Sigma_k$ 是通过在 $\Sigma$ 内令除 $k$ 个最大的奇异值以外的所有其他奇异值都等于零后得到的对角阵。这一最佳逼近的质量由

$$\|A - A^{(k)}\|_F = \left[ \sum_{i=k+1}^h \sigma_{ij}^2 \right]^{1/2} \quad (0 \leq k \leq h) \quad (1.18)$$

描述。

上述定理表明,  $A^{(k)}$  逼近  $A$  的程度取决于  $(h-k)$  个最小的奇异值的平方和。当  $k$  接近于  $h$  时, 这一求和将变得越来越小, 并在  $k = h$  时最终趋于 0。

考虑线性方程

$$Ax = b \quad (1.19)$$

的求解。其中  $A$  是  $m \times n$  维矩阵,  $x$  是  $n \times 1$  维向量,  $b$  是  $m \times 1$  维向量。在参数估计等许多信号处理问题中, 通常  $m > n$ , 这样的方程组称为超定的, 其最小二乘解  $x$  由

$$x = (A^* A)^{-1} A^* b \quad (1.20)$$

确定, 其中  $A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$  叫做  $A$  的最小二乘逆矩阵或简称广义逆矩阵。现在用奇异值分解法来求解线性方程组。

首先, 可以把

$$\tilde{x} = V^* x \quad (x = V\tilde{x}) \quad (1.21)$$

看成是利用  $V^*$  对  $x$  进行的一种正交变换(也可认为是一种旋转变换), 将  $x$  上的各点变换到了  $\tilde{x}$  上的各点。同样地, 也可以利用  $U^*$  对  $b$  做正交变换, 即

$$\tilde{b} = U^* b \quad (1.22)$$

也就是将  $b$  上的各点旋转一定角度后变为  $\tilde{b}$  上的各点。将奇异值分解式(1.15)代入式(1.19)并利用式(1.21)和式(1.22), 可得

$$\tilde{b} = \tilde{\Sigma} \tilde{x} \quad (\tilde{x} = \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{b}) \quad (1.23)$$

于是, 式(1.19)的求解过程可以解释为一系列的线性变换操作, 即

$$\mathbf{b} \xrightarrow{U} U^* \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}} \xrightarrow{\Sigma} \Sigma^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{x}} \xrightarrow{V} V \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad (1.24)$$

其中  $\Sigma$  的求逆  $\Sigma^{-1}$  可由  $\Sigma^{-1} = \text{diag}[\sigma_{11}^{-1} \quad \sigma_{22}^{-1} \quad \cdots \quad \sigma_{hh}^{-1}]$  直接计算。

利用 SVD 求线性方程组(1.19)的最小二乘解比直接计算式(1.20)的稳健性要高。

### 第 3 节 波束形成

空间信号处理的关键是波束形成技术,即在一个特定的方向上形成一个波束图案,使其能够从空间过滤出从该方向来的信号。

指向性函数是声纳系统的最基本特征之一,它是声纳设计者应当优先考虑的问题。从设计者主观愿望来说,总是希望当基阵放在各向同性的均匀噪声场中时,指向性函数在目标方向的响应为 1,而在其他方向的响应为零。也就是说  $D(\theta)$  近似于狄拉克函数,或者至少具有尖劈形的图形,如图 1.1 所示。

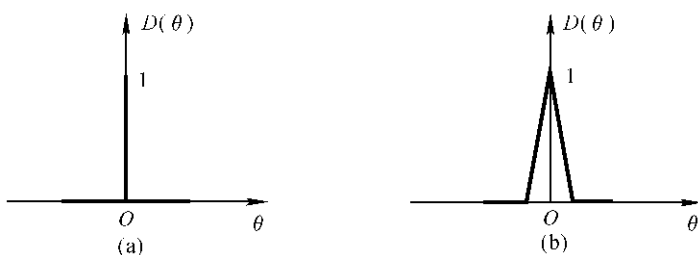


图 1.1 理想的指向性图

(a)  $\delta$  函数; (b) 尖劈形函数

但实际上做不到这一点,这是因为  $D(\theta)$  作为水听器信号

的多元函数,它的取值并不是随意的。为了在实际使用中比较各种不同指向性性能的优劣,要用到下面这些与指向性函数有关的参量,某基阵的指向性如图 1.2 所示。

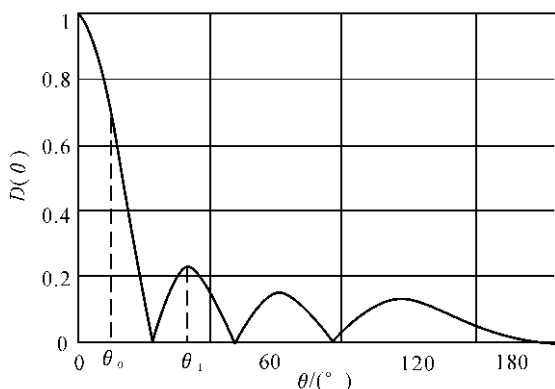


图 1.2 指向性图

(1) 主瓣方向:  $D(\theta)$  达到极大值的方向称为主瓣方向(见图 1.2 中  $\theta = 0$  的方向)。

(2) 主瓣宽度: 从主瓣方向开始,  $D(\theta)$  下降到  $1/\sqrt{2}$  的地方(假定  $\max[D(\theta)] = 1$ ), 称为主瓣半宽度, 在图 1.2 中  $D(\theta_0) = 1/\sqrt{2} = 0.707$ 。于是  $2\theta_0$  就叫主瓣宽度, 也叫半功率点宽度。

在有些特殊场合, 如果  $D(\theta)$  有零点, 也把主瓣附近的第一个零点的宽度叫主瓣宽度。今后, 如果不进行特别的说明, 凡是谈到主瓣宽度的地方, 一律指的是半功率点宽度。

(3) 最大旁瓣高度: 在如图 1.2 所示的曲线中, 除  $D(\theta)$  为极大值之外的次极大值都称为旁瓣。旁瓣与主瓣的比值就叫做旁瓣高度。图 1.2 中所示的最大旁瓣出现在  $\theta_1$  方向。

阵列信号处理的主要目的就是要使基阵形成的波束图尽

可能地满足一定的要求,当然波束图越接近理想波束图越好。但实际上由于基阵孔径有限,因而理想的波束图是无法实现的。通常要求主瓣有比较尖锐的指向性,且旁瓣低而平坦。

通常,波束形成是通过对阵元输出的信号进行延迟、加权求和等运算来实现的。下文首先介绍基阵接收信号的表示方法,然后介绍波束形成方法。

## 一、信号的窄带假设和解析表示

### 1. 信号的窄带假设

窄带信号是指相对于信号的载频(中心频率)而言,其带宽远小于信号频率的信号。假设基阵接收的所有  $D$  个信号都符合窄带假设条件,且具有相同的中心频率  $\omega_0$ ,则信号可以表示为

$$s_d(t) = A_d(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_d(t)] \quad (d = 1, 2, \dots, D) \quad (1.25)$$

式中,  $A_d(t)$  和  $\varphi_d(t)$  为随时间慢变的幅度和相位函数。也就是说,幅度和相位只是空间位置的函数,而在时刻  $t$ ,在整个基阵孔径上的变化是可以忽略不计的,那么对于第  $k$  个阵元,有

$$\begin{aligned} s_d(t - \tau_k(\theta_d)) &= \\ &A_d(t - \tau_k(\theta_d)) \cos[\omega_0(t - \tau_k(\theta_d)) + \varphi_d(t - \tau_k(\theta_d))] \approx \\ &A_d(t) \cos[\omega_0(t - \tau_k(\theta_d)) + \varphi_d(t)] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (1.26) \end{aligned}$$

### 2. 希尔伯特变换

对于窄带信号,可以用信号的复包络形式来表示,首先介绍希尔伯特变换的概念。

在某些情况下,为了分析方便,需要把一个实的连续信号  $s(t)$  表示成一个仅含正频率成分的复信号的实部。也就是说,要寻找一个复信号  $z(t)$ ,它的频谱  $Z(\omega)$  仅有正频率成分,即