第 1 章　　绪 论

1.1　信号

1.1.1　信号的概念

信号是用来传递信息的机械动作、光、电、声或其他物质运动的一种形式。例如，电话线中传递的电流、在工业熔炉中测得的温度、电视屏幕上的画面等，就都是信号。信号通常是时间的一维函数，但也可以是时间和空间的多维函数，甚至也可以是非时间变量的函数。信号作为一种函数，其表述形式与函数相同：既可以是解析的，也可以是非解析的。

与信号有关的理化或数学过程有：信号的发生、信号的传送、信号的接收、信号的分析（即了解某种信号的特征）、信号的处理（即把某一个信号变为与其相关的另一个信号，例如滤除噪声或干扰，把信号变换成容易分析与识别的形式）、信号的存储等。

1.1.2　几种类别的信号

性质为确定性函数的信号称为确定性信号。其函数值为随机变量的信号称为随机信号。

例 1　测试某电路阶跃响应曲线。为了得到较准确的结果，需要多次测量后取平均。每一次测量所得的曲线是确定性信号。如果要问：“该电路阶跃响应曲线在 0.1s 时刻的值是多少”这样一个问题，应该如何回答呢？当然，多次测量的平均值是一种可行的回答，但准确的回答应该是：此刻的值不是一个确定性的数，它是一个随机变量。这条测试曲线所描述的信号就是随机信号，相应的时间函数称为随机过程。

本书只讨论确定性信号而不讨论随机性信号。

定义域是连续变量的信号称为连续信号或模拟信号（见图 1-1）。

例 2　通常，计算机检测系统中的程序是周期性地被执行的。需要检测的变量也只能周期性地被采样。被测变量的值在计算机中的存储形式是一个时间序列，相邻值之间的时间间隔都相等，称为采样周期。

像例 2 中的被测量，其定义域是不连续的离散变量，这样的信号称为离散信号，见图 1-2 在这个图中，我们用离散时刻的线段表示信号的值。例 2 中的序列是一个时间序列，而且序列中相邻两个值间的时间间隔相等。这和数学上所说的序列是不同的。以后如果不特别申明，我们所说的离散信号和序列所指的都是这种等间距时间序列。

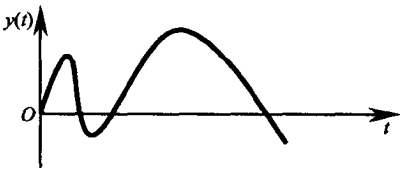


图 1-1　连续信号

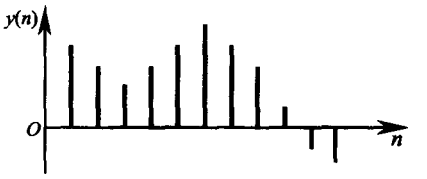


图 1-2　离散信号

需要全本请访问 www.ertongbook.com

1.2 信号与系统理论

1.2.1 信号与系统理论简介

由相互有关系的一类事物所组成的具有某种特定功能的一个整体称为系统。例如，通信系统、铁路运输系统、电力系统、经济管理系统、人体系统，等等。

为了满足实际应用的需要，即使在理论上，也可以从不同的角度去研究同一个系统。但是，各种不同的系统都有一个相同的基本问题，即：某一种信号作用于系统后，影响如何？更具体地说，在这种情况下，该系统中我们所关心的某些信号将等于什么？

例 1　图 1-3所示的低通滤波电路，设原来电容器未被充电。如果在某一时刻开始输入持续的电压信号 $r(t)$，则我们关心的是输出电压 $y(t)$等于什么，这可以表示为图 1-4。在这里，$r(t)$可看作“输入”信号（“激励”），$y(t)$可看作“输出”信号（“响应”）。

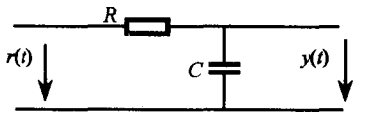


图 1-3　滤波电路

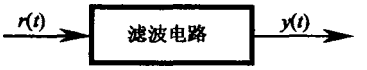


图 1-4　电路的输入和输出

例 2　图 1-5是混有 50Hz交流干扰的心电信号，把它输入一个滤波器后，输出信号见图 1-6。可见干扰已被滤除。在这里，图 1-5 的信号是输入信号，图 1-6的信号是输出信号。

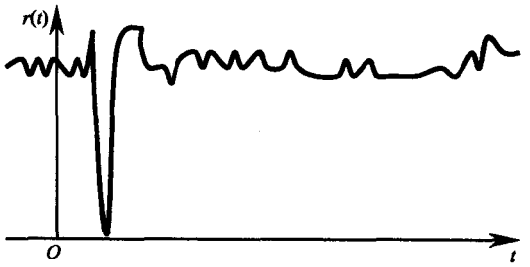


图 1-5　混有干扰的心电信号

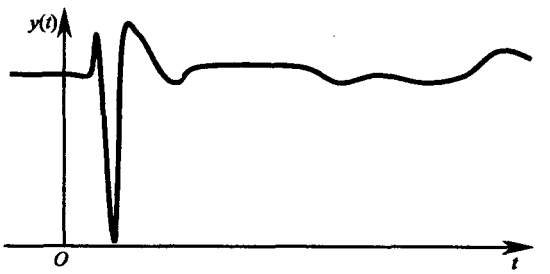


图 1-6　滤除了干扰的心电信号

例 3　温度控制系统见图 1-7。控制原理是：通过煤气阀的开度来控制燃烧的强度，从而达到温度保持不变的目的。这个系统可以表示为图 1-8。在这里，阀门开度是输入，炉温是输出。

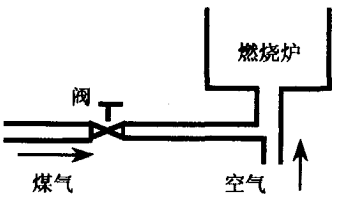


图 1-7　炉温控制系统



图 1-8　控制系统的输入和输出

“信号与系统理论”这一门学科（简称为“系统理论”）是主要从输入和输出的关系这个角度来研究系统运动一般规律的学科。由于它不涉及系统的其他具体性质，所以它适用于一切系统。系统理论的研究对象既然是这种抽象的系统，所以在系统理论中，定义映射 $y(t)=T[r(t)]$ 为系统，其中 $r(t)$ 可看作输入或激励，$y(t)$ 由映射 $T[\cdot]$ 和 $r(t)$ 所完全确定，可看作为输出或响应。

系统理论的研究领域包括两个基本方面。其一是系统分析，即在给定系统和输入信号的条件下分析输出响应的数值和特性；其二是系统综合，即对于给定的输入信号和输出响应求系统。本书主要涉及系统分析，这也是系统理论的主要内容和基础。在系统理论的研究中当然也要涉及对信号本身特征的研究。

很明显，信号与系统理论是从事实际信号传输和处理工作的基础。21 世纪是信息时代，各部门各学科对信号处理的需求越来越多，系统理论已经从电子通信类专业的基础课变成了包括自动化专业在内的很多专业的共同的基础课。

1.2.2 系统的数学模型

从其他课程早已熟知，对于例 1 这样的元件特性已知的系统，通常可用下述线性常系数常微分方程描述其输入输出特性：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(t)+\cdots+a_0y(t)=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t)+\cdots+b_0r(t) \tag{1-1}$$

如果初始条件为零，即

$$y(t_0)=y^{(1)}(t_0)=\cdots=y^{(n-1)}(t_0)=0 \tag{1-2}$$

和 $r(t)$ 已知，则根据微分方程理论，$y(t)$ 即被唯一地确定。由系统的定义，这种初始条件下的微分方程式（1-1）就是系统 $y(t)=T[r(t)]$ 的一种具体的数学描述，称为系统的一种数学模型。从其他课程早已熟知，这也是最基础的数学模型之一。

其实，系统 $y(t)=T[r(t)]$ 还可以有其他各种数学描述形式，包括解析的、数值的、图表的，只要符合系统的定义，就都是其数学模型。

系统理论是在系统数学模型的基础上开展研究的。

1.2.3 系统的分类

可以从不同的角度对系统进行分类。

1．时不变系统与时变系统 设激励 $r(t)$ 在 $t=t_0$ 前为零，方程式（1-1）在零初始条件式（1-2）下的解为 $y=y_1(t)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y_1(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y_1(t)+\cdots+a_0y_1(t)=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t)+\cdots+b_0r(t)$$

把上式中的 t 代换成 $t-\tau$（τ 是常数）：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y_1(t-\tau)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y_1(t-\tau)+\cdots+a_0y_1(t-\tau)$$

$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t-\tau)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t-\tau)+\cdots+b_0r(t-\tau)$$

上式表示，在零初始条件下，输入 $r(t-\tau)$ 的响应是 $y_1(t-\tau)$，即如果激励延迟一段时间 τ，则响应也延迟 τ。这可以用图 1-9 来表示。这样的系统称为时不变系统或定常系统。

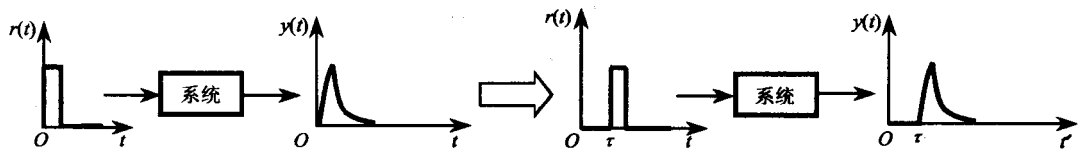


图 1-9　时不变系统

一般地，对于定常系统 $y(t) = T[r(t)]$，如果有

$$y(t) = T[r(t)]$$

则对任意时间 τ，有

$$y(t-\tau) = T[r(t-\tau)] \tag{1-3}$$

定常系统的输入输出特性不因时间的推移而变化。大部分实际系统都可以看作是定常系统。

如果式（1-1）中的系数变成时间的函数，则没有上述性质，称为时变系统或非定常系统。时变系统的输入输出特性随时间而变化。也有不少实际系统是时变系统，例如，飞行中的导弹（质量不断减少）、负载变化的机器人、负荷变化的电力系统、生长中的生物等就都是时变系统。

2. 线性系统与非线性系统　如果输入增大 α（α 为任意常数）倍时其响应也增大 α 倍，即

$$T[\alpha r(t)] = \alpha T[r(t)]$$

则称该系统对输入 $r(t)$ 是齐次的或均匀的。如果有两个输入 r_1 和 r_2 同时影响到输出，且

$$T[r_1(t) + r_2(t)] = T[r_1(t)] + T[r_2(t)]$$

则称该系统对输入 r_1 和 r_2 是可叠加（可加）的。对所有输入同时具有齐次性和可加性的系统称为线性系统。由上易得，对有两个输入信号的线性系统，有

$$T[\alpha_1 r_1(t) + \alpha_2 r_2(t)] = \alpha_1 T[r_1(t)] + \alpha_2 T[r_2(t)]$$

这个式子有时被称为叠加原理。

根据上述定义，零初始条件下的式（1-1）所描述的系统是线性系统。

大部分实际系统都可以看作或在一定范围内近似成线性系统（例如弹簧的伸长与受力成正比）。以后，如果不特别申明，我们所讨论的系统均为线性定常系统。而在第 10 章专门讨论非线性系统。

3. 连续时间系统与离散时间系统　输入输出信号为连续信号的系统称为连续时间系统，简称连续系统，以上所述均为连续系统。输入输出信号为离散时间信号的系统称为离散时间系统，简称离散系统。离散系统可表示为映射 $y(n) = T[r(n)]$（$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$）。离散系统也可分为定常与时变、线性与非线性等类别，概念与连续系统的完全相同，这里不再赘述。我们主要讨论连续系统，而在第 6 章和第 7 章专门讨论离散系统。

4. 一维信号系统与多维信号系统　输入输出信号是时间的一维函数的系统称为一维信号系统，在某些应用领域也称为集总参数或集中参数系统。一维信号系统可用常微分方程描述。输入输出信号是时间和空间的多维函数的系统称为多维信号系统，在某些应用领域也称

为分布参数系统。多维信号系统可用偏微分方程描述。我们主要讨论一维信号系统，而在第11章简单介绍多维信号系统。

5. 确定性系统与随机信号系统 输入输出信号是确定性信号的系统称为确定性系统，是随机性信号的系统称为随机信号系统。本书不讨论随机信号系统。

勿庸置言，系统类别不同，其数学模型的形式也就不同。今后，我们将随着不同类别系统的介绍，分别介绍相应形式的数学模型。

1.2.4 非线性特性的小偏差线性化

非线性系统的分析方法与线性系统截然不同，而大多数实际系统都可看作是线性系统。但有时也会遇见明显的非线性，这时，如果能把非线性特性化为线性，则可以用线性系统的方法去分析。

例 4 晶闸管的输入量是控制角 α，输出是整流电压 U，其关系为

$$U(\alpha) = P\cos\alpha$$

其中 P 是常数。这是一个非线性关系（见图 1-10）。如果该元件是工作在图中的 A 点附近一个足够小的范围内，则显然可以把这一小段输入输出关系近似成线性关系。这就是把非线性函数 $U(\alpha)$ 在 α_0 点附近作泰勒展开并仅取其线性项：

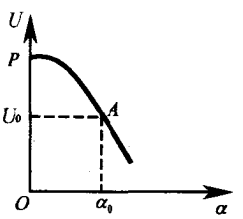


图 1-10 非线性特性的线性化

$$U(\alpha) \approx U_0 + \left.\frac{dU}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}(\alpha - \alpha_0)$$

记

$$K_S = \left.\frac{dU}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}, \Delta U = U - U_0, \Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$$

则

$$\Delta U \approx K_S \Delta\alpha$$

这样，原来变量间的非线性关系在小偏差的条件下就近似成了变量增量间的线性关系。

1.3 自动控制工程与自动控制理论

1.3.1 自动控制工程

例 1 在机械加工工业中，各种机床的运行是由电动机带动的，而对电动机的转速都有较严格的要求。例如，对于龙门刨床的主拖动电动机，要求不管负载轻重和电源电压如何，都必须保持准确的恒速运转。为了达到预定的精度，需要构造如图 1-11 所示的速度控制系统。图中的 SM 是主拖动电动机，它是电枢控制的直流电动机，其转速由电枢电压 u_a、励磁电流和负载力矩共同决定。由于负载和电源的波动性，如果取消图中点划线以外的部分，仅用触发电压 u_k 来控制转速，是达不到预定精度的。为此，采用与 SM 同轴相连的测速发电机 TG，其输出 u_f、电位器 RP 的输出电压 u_r 与放大器（放大倍数为 $-K$）的输入电压 Δu 有如下关系：

$$\Delta u = u_r - u_f$$

运行原理是：当转速过慢，则 Δu 变大，最终导致电动机 SM 的转速变快；反之亦然。也可

需要全本请访问 www.ertongbook.com

以用图 1-12所示的原理框图来表示这个系统。图中的每一个箭头都表示一个物理量，称为信号线；每一个矩形框表示一个部件。而其中“比较电路”的功能是完成减法运算，是通过两个电压反向连结而实现的，它可以更明确地表示为图 1-13，其中表示加减法运算的符号称为相加点或综合点（见图 1-13，如果是相加，通常不写“ + ”号）。

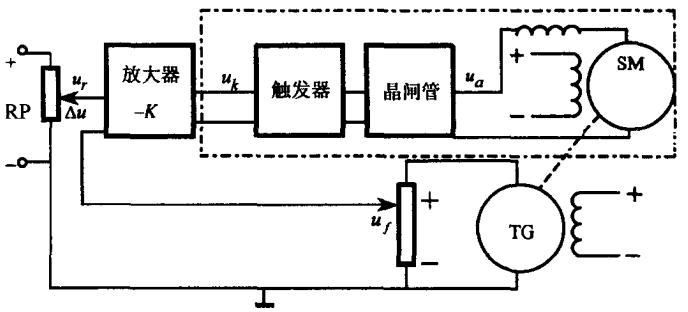


图 1-11　龙门刨床速度控制系统原理图

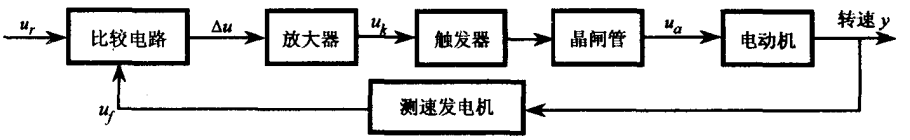


图 1-12　龙门刨床速度控制系统原理框图之一

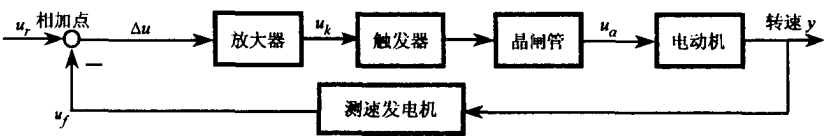


图 1-13　龙门刨床速度控制系统原理框图之二

例 2　在石油、化工、电力、冶金、轻工、纺织等工业部门，在连续生产过程的各种设施中，温度、压力、流量、液位（或物位）、成分、物性等物理或化学量必须保持所要求的值。例如，热交换器出口的被加热料液的温度必须保持恒定。为此，需要构造如图 1-14 所示的料液温度控制系统。图中，料液在热交换器中被蒸气加热。如果取消图中点划线以外的部分，由于料液流量的不稳定，其温度的精度不能满足要求。为此，用热电偶测量该温度，其输出电压 u_f、电位器的输出电压 u_r 和放大器的输入电压 Δu 有如下关系：

$$\Delta u = u_r - u_f$$

控制原理是：当温度符合要求，则 Δu 为零，电动机和阀静止；当温度过低，则 Δu 变大，电动机使阀向上开启，使通人的蒸气流量增大，从而使温度回升。该系统的原理框图如图 1-15 所示。

例 3　在数控机床中，除了主轴电动机的转速需要恒定以外，某些部件还需要精确地控制在要求的位置上，通常，这个所要求的位置是随时间而变化的。在航空、航天、航海、机器人、军事工业中，为了使各种飞机、火箭、船只、机器人按预定轨道运动，为了使雷达、

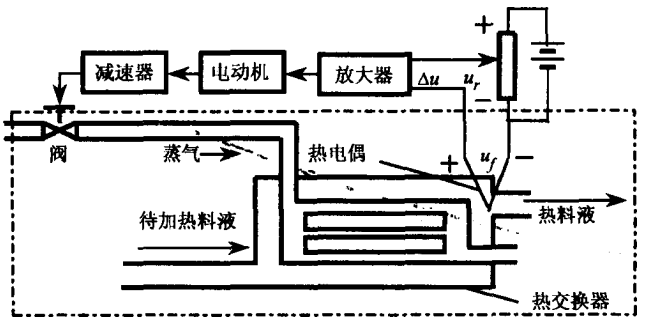


图 1-14　热交换器温度控制系统

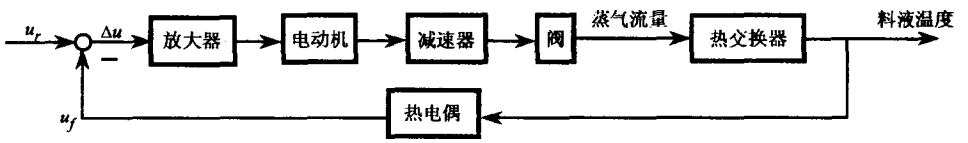


图 1-15　热交换器温度控制系统原理框图

精确制导导弹或火炮的炮口随时指向要求的目标，需要构造各种姿态控制系统。这个所要求的姿态是随时间而变化的。在上述各种情况下，都需要一种被称为伺服系统的控制系统，其任务是使某一物理量按给定的时间函数变化。例如，高射炮的炮口转动系统中，两个坐标子系统之一如图 1-16所示。其中 θ_r 的转轴由瞄准员摇动。系统的功能是使炮口角度 θ_y 随时与瞄准员给出的角度 θ_r 相一致。原理是：当 θ_y 和 θ_r 相等时，Δu 为零，炮口不动；当 θ_y 和 θ_r 不相等时，则 Δu 不为零，伺服电动机驱动炮口转动，使 θ_y 和 θ_r 相等。系统的原理框图见图 1-17。

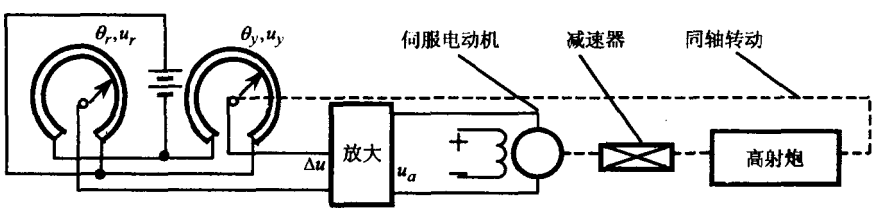


图 1-16　高射炮炮口转动随动系统

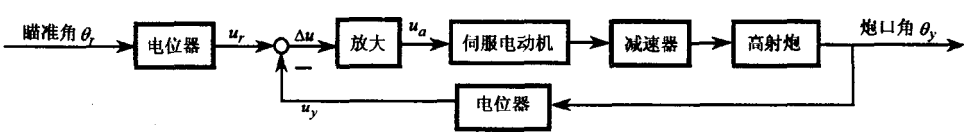


图 1-17　高射炮炮口转动随动系统的原理框图

尽管上述三个例子各属不同的应用领域，但从对某个物理量的控制这个角度来看，它们显然具有相似的功能、结构、原理和规律。使某些物理量（或化学量）自动地按指定的时间

函数变化的系统称为自动控制系统。自动控制系统的建造工程称为自动控制工程。自动控制工程已广泛渗透到国民经济的各个领域。

1.3.2 自动控制理论

诚然，随着应用领域的不同，自动控制系统可以相差很大，任何一个控制工程师都不可能掌握所有领域的自动控制系统。但是在数学上，不同领域的控制系统却具有相同的控制规律。自动控制理论就是在数学模型的基础上，讨论工程自动控制系统共同规律的工程基础科学，它适用于一切自动控制系统。作为工程性科学，我们以后要继续涉及一些工程概念，但作为自动控制理论，我们今后所说的“控制系统”更多地是指数学系统，即 1.2 节所定义的“系统”的一类子系统。这类子系统既遵守一般系统的共同规律，又具有其特殊规律。本书拟在叙述一般系统共同规律的同时，也叙述控制系统的特殊规律（凡涉及其特殊规律的时候都将明确指出）；还经常把控制系统作为叙述一般系统普遍规律的例子。

控制理论学科包含着广泛的内容，我们只学习其中最基础也是最实用的部分。

1.3.3 反馈控制系统及其组成

例 1～例 3 有一个共同规律：都是先用某一装置（称为测量元件）把被控制的物理量（称为被控制量、输出量）检测出来，然后与它希望的时间函数（称为给定输入量）相减（实施相减的元件称为比较元件）得到偏差量，最后利用偏差量去不断修正被控制量。这种控制方式称为按偏差调节的闭环控制，也称为反馈控制（必是负反馈）。反馈控制的特点是：偏差量越小越好（在例 2 和例 3 中，偏差量在零附近波动；在例 1 中，偏差量是略大于零的正数）。

控制系统中还有一类输入量，对控制任务的完成起着不利作用，例如例 1 中负载的变化、例 2 中料液流量的变化，这类输入量称为干扰输入量（扰动输入量）。容易理解，引入反馈控制的目的和优点是：在扰动量未知时也能实施较好的控制；系统的元部件性能的差异（但测量元件除外）对控制效果影响较小。

显然，如果需要改变被控制量的希望值，只需改变给定输入量即可。

具有反馈机制是控制系统有别于一般系统的最大特点。也有很多其他系统具有反馈机制，例如某些晶体管放大器、电子振荡器、社会经济系统、人体系统等就都是这样的系统。反馈控制理论原则上也能运用于这些系统。

控制系统之所以能完成控制任务，是由于它拥有控制手段即能影响被控制量的大小。系统所能确切给定的、直接影响被控制量大小的物理量称为控制量。例 1 中的 u_a、例 2 中的蒸气流量（确切地说，应该是阀门开度，因为蒸气流量还受到其他因素的制约）、例 3 中的 u_a 都是控制量。直接产生控制量的元部件称为执行元件。例 1 中的触发器－晶闸管、例 2 中的电动机－减速器－阀、例 3 中的放大器都是执行元件。

被控制量的宿主、直接接受控制量的部件称为被控对象。例 1 中的电动机、例 2 中的热交换器、例 3 中的伺服电动机－减速器－高射炮都是被控对象。被控对象的性质如何对控制效果的好坏具有很大的影响。这里的称呼并不是绝对的，例如，经常把系统中的电动机称为执行元件，而把它所带动的物体称为被控对象。

有时，把系统仅分为两部分：被控对象（或广义被控对象）和控制装置（控制器）。

上述三个例子中，都只有一个闭环。如果同一个系统中还有其他的闭环，则由被控制量形成的反馈称为主反馈，它所产生的偏差称为主偏差。

1.3.4 开环控制

反馈控制是最主要的一类控制方式，但在扰动和元件性能的影响都可以克服的场合，也可以不用反馈控制。

例 4 在一类数控机床上，加工平台的运动是由步进电动机带动的。步进电动机的运动受外加脉冲的控制，精度并不受其他因素影响。在这个场合，扰动并不起作用，元件精度也满足要求，可以构成图 1-18 所示的控制系统。

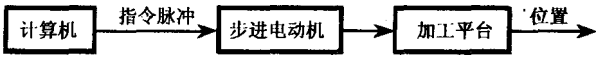


图 1-18 步进电机驱动的加工平台位置控制系统

这种输出量对控制作用并无反馈的控制方式称为开环控制。也有一些控制系统是开环系统，例如自动售货机、通常的交通信号灯控制、通常的机床或生产线上各种机械的逻辑动作控制（称为顺序控制）等。至于非控制系统，开环的结构就更多了。

开环控制具有比反馈控制简单得多的规律。但其使用场合也比反馈控制有限得多。我们主要讨论反馈控制。

1.3.5 复合控制

例 5 例 2 中，料液流量的变化是扰动量之一。流量变大时，温度下降。虽然通过反馈，最终能恒定温度，但由于有惯性，温度的变慢有一个过程，这就使调节作用不那么及时。为此，构造了图 1-19 所示的改进型系统。改进部分的原理是：当料液流量变大，则 Δu 变大，阀位上抬，从而使蒸气流量变大，达到更及时调节温度的目的。其原理框图见图 1-20。

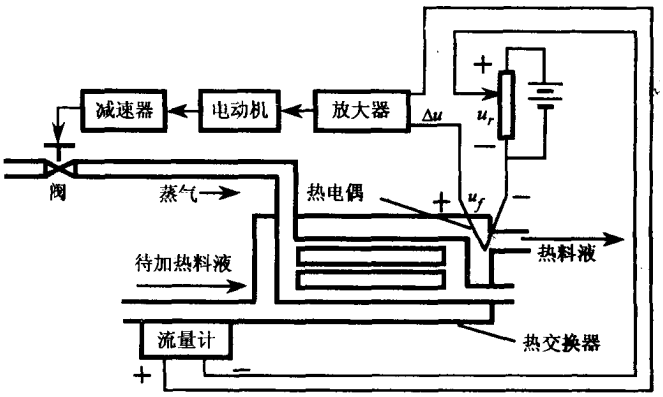


图 1-19 热交换器温度复合控制系统

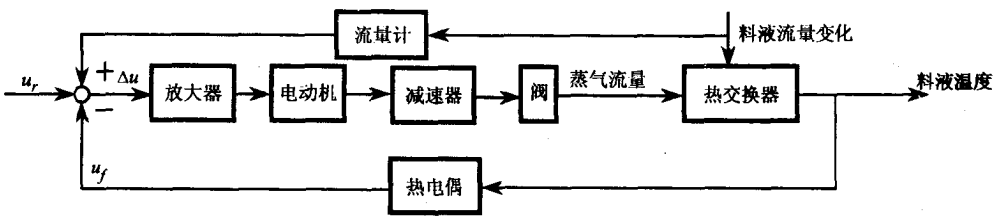


图 1-20 热交换器温度复合控制系统原理框图

改进的部分称为按扰动的前馈补偿或前馈控制（顺馈补偿或顺馈控制），与反馈控制合称为复合控制。前馈补偿是开环控制，只能起反馈控制的协助作用，而且仅对可测扰动有效。

1.3.6 恒值系统与随动系统

像例 1 和例 2 那样，要求被控制量为恒值的系统称为恒值系统。其经常工作状态就是保

持输出为某一恒值。因此，对恒值系统而言，最重要的是如何使输出在各种扰动的干扰下尽可能保持恒定，这称为抗扰性能。

像例 3 那样，要求被控制量按给定的时间函数变化的系统称为随动系统。当被控制量是机械量时，则称为伺服系统。对随动系统而言，最重要的是如何使输出能随时跟随给定输入而变化，这称为跟随性能。

当然，无论是抗扰性能还是跟随性能，都要求输出与给定输入尽可能一致，要求主偏差尽可能小，这是两种系统的共性；但由于应用场合的不同，这两种性能还是有区别的。

1.3.7 电力传动系统、过程控制系统与液压控制系统

像例 1 和例 3 那样，执行元件是电动机及其驱动电源的系统称为电力传动系统。像例 2 那样，以自动化仪表、装置与计算机为主要部件，对连续生产过程参数进行控制的系统称为过程控制系统。执行元件是液压装置的系统称为液压控制系统。

习 题 1

1. 函数记录仪是一种通用的自动记录仪，它可以在走纸上画出待记录的输入电压 $r(t)$ 对时间的函数关系。其简化的原理图见图 1-21。其中电位器的活动端与记录笔、绳轮机械地连接在一起，被电动机所带动。试简述系统工作原理，画出原理框图，并指出被控对象、控制量、给定输入量等控制要素，说明它可归于哪类系统。

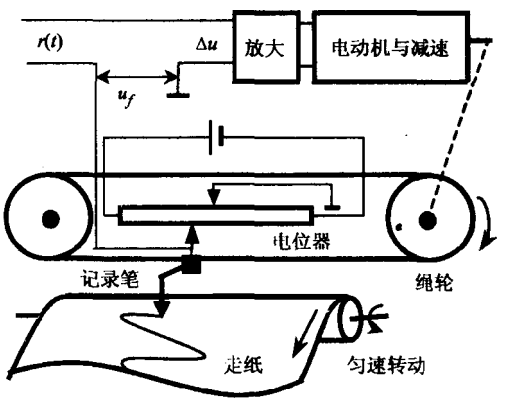


图 1-21 函数记录仪

2. 水箱液位控制系统的三种方案见图 1-22，控制的目的是保持液面不变（其中图 c 中的杠杆与用水阀同步动作）。试分别简述三个系统的工作原理，画出原理框图，并指出被控对象、控制量、给定输入量、扰动输入量等控制要素，说明它们各归于哪类系统。如果希望提高液面高度，应采取什么措施？

3. 图 1-23 表示一个电加热炉温度控制系统。试画出原理框图并指出各控制要素。

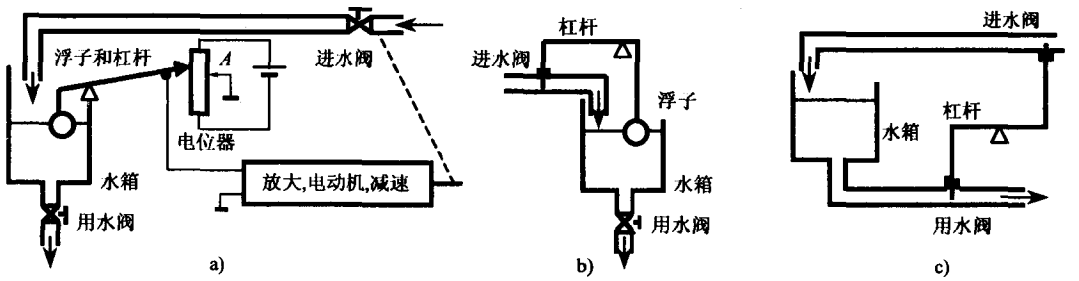


图 1-22 水位控制系统

4. 小麦在磨粉前，需要加入一定的水，以利于磨粉作业。图 1-24 是湿度控制系统。试画出原理框图并指出各控制要素。

5. 图 1-25表示轮船或飞机的自动驾驶系统，其功能是使航向保持在给定的航向上。试指出各控制要素，并说明这是一个什么系统。

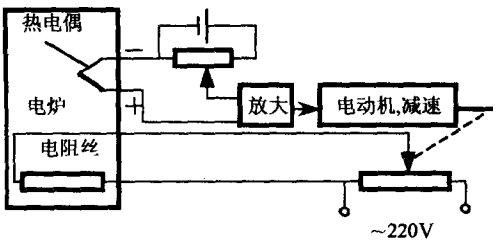


图 1-23　电加热炉

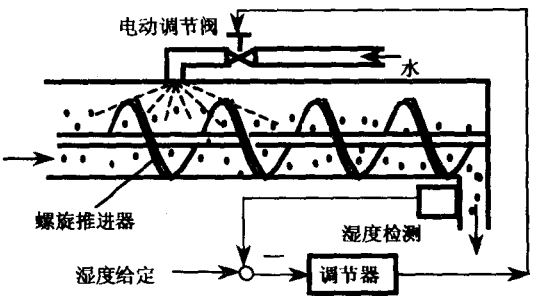


图 1-24　湿度控制系统

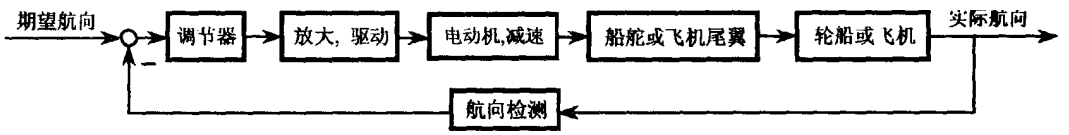


图 1-25　自动驾驶系统

6．图 1-26是造纸过程中的线速度和张力控制系统，其功能是使在卷纸过程中纸的线速度和张力保持一定，以免纸的撕裂或堆积。试画出原理框图并指出各控制要素。

7．图 1-27是面包烘烤控制系统，其功能是使面包烘烤恰到好处。试画出原理框图并指出各控制要素。

8．激光制导导弹或炸弹的原理为：飞机飞到目标上空后在发射导弹的同时用激光束射向目标，导弹上的激光检测装置即按目标所反射的激光自动飞向目标。试画出原理框图并指出各控制要素。

9．在液体管道中，流过阀门的流量与阀门前后压差的平方根成正比：

$$q = k\sqrt{p}$$

如果流量与压差分别都在某一个值附近微小波动，试写出线性化的流量－压差关系。

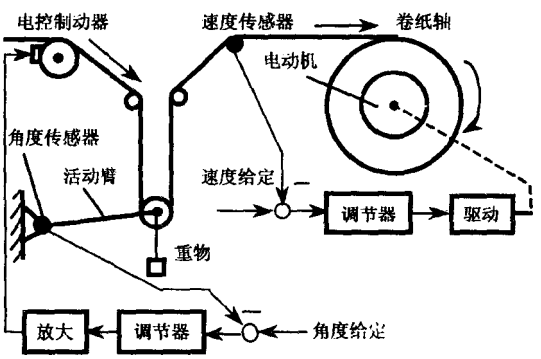


图 1-26　卷纸的线速度和张力控制系统

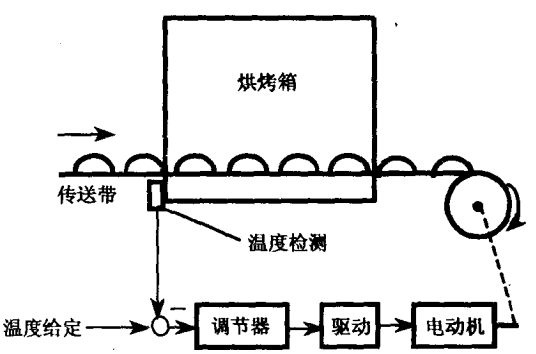


图 1-27　面包烘烤控制系统

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第 2 章　线性连续系统的时域分析

2.1　线性常系数常微分方程和它的解

2.1.1　线性常系数常微分方程的经典解

很多线性定常系统的输入－输出关系可以用下面的线性实系数常微分方程来描述：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(t)+\cdots+a_0y(t)=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t)+\cdots+b_0r(t) \tag{2-1}$$

$$y(t_0)=y_{0,0},y^{(1)}(t_0)=y_{0,1},\cdots,y^{(n-1)}(t_0)=y_{0,n-1} \tag{2-2}$$

其中输入 $r(t)$已知，$y(t)$为输出。由高等数学已经知道，式（2-2）称为微分方程的初始条件，在已知式（2-2）的条件下求解式（2-1）的问题称为线性常系数常微分方程的初值问题。方程式（2-1）有解为

$$y(t)=\text{齐次方程的通解}+\text{非齐次方程的特解}$$

其中齐次方程通解部分包括 n 个任意常数。把初始条件式（2-2）代入上式，可确定其中的任意常数，从而求出该初值问题的唯一解。

需要特别注意的是：式（2-1）中的$y(t)$和 $r(t)$通常是连续函数，否则微商本身在间断点没有定义。

下面举例进行必要的复习。

例 1　图 2-1 中，设 $t=0^-$ 时 $y(0^-)=1(t=0^-$ 表示 $t=0$ 以前无限趋于零的时刻），求 $r(t)=v\cdot1(t)$下的响应 $y(t)$。这里的 $1(t)$是单位阶跃函数：

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq0\end{cases}$$

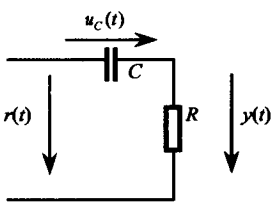


图 2-1　*RC* 电路

解　（1）由电路理论，有

$$y(t)=RC\dot{u}_C(t)\overset{\text{def}}{=}T\dot{u}_C(t) \tag{2-3}$$

$$u_C(t)=r(t)-y(t) \tag{2-4}$$

这两个式子对任意时刻都成立。当 $t>0$ 时式(2-4)对时间 t 求导：

$$u_C(t)=\dot{r}(t)-\dot{y}(t)$$

把式(2-3)代入上式：

$$T\dot{y}(t)+y(t)=T\dot{r}(t) \tag{2-5}$$

这就是描述输入输出关系的微分方程。$t=0$ 是 $r(t)$的间断点。我们把式（2-5）定义在 $t>0$ 上，这时$r(t)=v$，方程式(2-5）化简为

$$T\dot{y}(t)+y(t)=0,t\in(0^+,\infty) \tag{2-6}$$

由电路理论知，当 $r(t)$有界时，电容的端电压$u_C(t)$总是连续的（但其导数不一定连续），故由式(2-4）知，在 $t=0$时 $y(t)$与 $r(t)$有同幅度的跃变。故初始条件为

$$y(0^+) = y(0^-) + v = 1 + v \tag{2-7}$$

(2) 式(2-6)的特征方程为

$$Ts + 1 = 0, s = -1/T$$

齐次方程通解为

$$y(t) = Ae^{-t/T}$$

这也是方程的全解。把初始条件式(2-7)代入上式，得

$$A = 1 + v$$

最后，

$$y(t) = (1 + v)e^{-t/T}, t \in (0^+, \infty) \tag{2-8}$$

见图 2-2。

2.1.2 把函数的定义域扩大到$t \in (0^-, +\infty)$时的初值问题

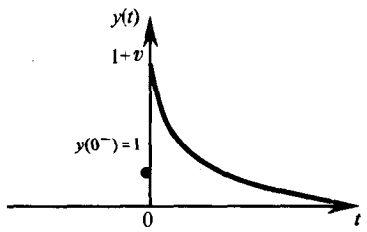


图 2-2 例 1的解

正如例 1所表明的，实际工作中经常需要考虑函数在 $t=0$ 时不连续的情况，下面继续讨论这种情况下微分方程的解法。

例 2 仍是例 1。在间断点 $t=0$，输入函数 $r(t) = v \cdot 1(t)$及其导数是有定义的。由式（2-4）知，在 $t=0$ 时 $y(t)$与 $r(t)$有同幅度的跃变，所以 $y(t)$及其导数在 $t=0$时可以有与 $r(t)$同样的定义，即可以定义为阶跃函数及其导数。在 $t=0$这样定义了 $y(t)$及其导数后，由于式（2-3）和式（2-4）对任意时刻都成立，故可以认为间断点处微分方程继续成立。则初值问题变为

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = T\dot{r}(t), r(t) = v \cdot 1(t), t \in (0^-, \infty) \\ y(0^-) = 1 \end{cases} \tag{2-9}$$

即各函数的定义域扩大为$t \in (0^-, +\infty)$。

下面来解初值问题式（2-9）。齐次方程通解与例 1完全相同：

$$y_h(t) = Ae^{-t/T}$$

由式（2-9）的非齐次项，特解中必有因子$1(t)$，故设特解形如：

$$y_c(t) = 1(t)f(t)$$

其中 $f(t)$为待定函数。上式代入式（2-9）得

$$T[\delta(t)f(t) + 1(t)\dot{f}(t)] + 1(t)f(t) = Tv\delta(t) \tag{2-10}$$

上面的运算用到了： $1(t)$的导数等于单位脉冲函数 $\delta(t)$，$\delta(t)$函数的定义是

$$\begin{cases} \delta(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} 1 \end{cases}$$

要想使式（2-10）中两项$\delta(t)$函数相抵消，需

$$f(t) = ve^{-\alpha t}\left(\text{这时}\int_{\infty} \delta(t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = 1, \text{故 } T\delta(t)f(t) = Tve^{-\alpha t}\delta(t) = Tv\delta(t)\right)$$

上式代入到式（2-10）得

$$-Tv\alpha e^{-\alpha t} + ve^{-\alpha t} = 0$$

$$\alpha = 1/T$$

得特解

$$y_c(t) = 1(t)ve^{-t/T}$$

故全解为

$$y(t) = Ae^{-t/T} + 1(t)ve^{-t/T}$$

把式（2-9）中的初始条件代入上式，得

$$A = 1$$

最后得

$$y(t) = e^{-t/T} + 1(t)ve^{-t/T}, t \in (0^- \ , \infty)$$

与例 1 的结果一致。

我们体会到，虽然在引入了阶跃函数这一类奇异函数以后，不必推算 $y(0^+)$ 而使求解可以实现，但在求非齐次方程特解时较困难，而且容易出错。

2.1.3 用拉氏变换法解微分方程的初值问题

数学中学过，如果积分

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad （s 是复变量）$$

在 s 的某一区域内收敛，则该积分称为 $f(t)$ 的拉普拉斯（P.S.Laplace，1749－1825）变换。

数学中也学过，当初始时刻 $t_0 = 0$ 时，拉氏变换可用来解微分方程的初值问题，过程要比经典解法简单。

例 3 用拉氏变换法重解例 2。初值问题仍是式（2-9），即

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = T\dot{r}(t), r(t) = v \cdot 1(t), t \in (0^-, \infty) \\ y(0^-) = 1 \end{cases}$$

解

$$T[sY(s) - y(0^-)] + Y(s) = T[sR(s) - r(0^-)] = Tv$$

$$Y(s) = \frac{T(v+1)}{Ts+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{T(v+1)}{Ts+1}\right] = (v+1)e^{-t/T}, t \in (0^+, \infty) \tag{2-11}$$

结果与前面的相一致。我们体会到，用拉氏变换法解 $t \in (0^-, +\infty)$ 区间的初值问题比前面的方法都简单，因为不必考虑特解的问题。但所得结果仅对 $t \in (0^+, +\infty)$ 有效而不包括 $t = 0$ 的值，这是由拉氏变换的微分性质所决定的。

为了方便读者，书末的附录 A 列出了拉氏变换表。

2.1.4 零输入响应与零状态响应

在实际问题中，输入总认为是 $t = 0$ 以后才加入的，即认为在 $t = 0$ 以前恒为零。如果不特别申明，以后所说的输入都具有这种性质。而在 $t = 0$ 之前一瞬间的初始条件在系统理论中称为初始状态。输入始终为零时由初始状态引起的响应称为零输入响应。

例 4 求例 3 的零输入响应。

解 输入为零时的微分方程和初始条件为

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = 0 \\ y(0^-) = 1 \end{cases}$$

$$T[sY(s) - y(0^-)] + Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{Ty(0^-)}{Ts+1} = \frac{T}{Ts+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{T}{Ts+1}\right] = e^{-t/T} \tag{2-12}$$

这就是零输入响应。

$t=0$ 前状态为零(即 $y(0^-) = y^{(1)}(0^-) = \cdots = y^{(n-1)}(0^-) = 0$)，单纯由输入所引起的响应称为零状态响应。

例 5 求例 3 的零状态响应。

解 这时的微分方程和初始条件为

$$\begin{cases} T\dot{y}(t) + y(t) = T\dot{r}(t), r(t) = v \cdot 1(t), t \in (0^-, \infty) \\ y(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{Ts[R(s) - r(0^-)]}{Ts+1} = \frac{Tv}{Ts+1}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{Tv}{Ts+1}\right] = ve^{-t/T} \tag{2-13}$$

这就是零状态响应。

我们看到，例 3 的全响应式（2-11）等于零输入响应式（2-12）和零状态响应式（2-13）的叠加。

下面看看一般的规律。设 $t \in (0^-, +\infty)$区间的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m\dfrac{d^m}{dt^m}r(t) + b_{m-1}\dfrac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t) + \cdots + b_0 r(t) \\ y(0^-), y^{(1)}(0^-), \cdots, y^{(n-1)}(0^-) \text{ 给定} \end{cases} \tag{2-14}$$

这里 $n \geq m$。对式（2-14）进行拉氏变换，并注意到其初始条件，有

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \quad + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \quad + b_0)R(s) + M_0(s)$$

其中 $Y(s)$、$R(s)$ 分别为输出与输入的拉氏变换式，$M_0(s)$ 为初始条件所产生的多项式。则得

$$Y(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)R(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} + \frac{M_0(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{2-15}$$

设齐次方程的特征多项式 $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ 具有 n 个互异的根 $s_i (i = 1,2,\cdots,n)$，$R(s)$ 具有 $l>1$ 个（通常的信号均如此）互异的极点（使复变函数的分母为零的 s 值称为其极点）s_{rj} $(j = 1,2,\cdots,l)$(s_i 和 s_{rj}都可能是复数），则上式可分解为

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^{l}\frac{B_j}{s - s_{rj}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s - s_i}$$

前两项由式（2-15）的第 1 项分解而来，后一项由式（2-15）的第 2项分解而来。上式拉氏反变换：

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t} + \sum_{j=1}^{l}B_j e^{s_{rj}t} + \sum_{i=1}^{n}C_i e^{s_i t} \tag{2-16}$$

这里由于 s_i 和 s_{rj} 都可能是复数，所以上式中各项既有可能是指数项，也有可能两两合并为指数振荡项（请读者自行复习微分方程理论）。由上面的过程可以看出：当输入为零时，式(2-16）仅剩下第 3项，它就是零输入响应；当初始状态为零时，式（2-16）剩下第 1项和第 2项，它就是零状态响应。

式 (2-16) 表明，全响应等于零输入响应与零状态响应的叠加。如果 S_i 和 S_{rj} 中有相重的值，则式（2-16）的相应项前有 t^p（p 为正整数）因子，但上述结论不变。

为简单计，以后也把 0^- 记为 0。

2.1.5 线性系统定义的修正

当输入 $r(t)$ 增大 k 倍时，式（2-16）的前两项（零状态响应）也增大 k 倍，但第 3项的零输入响应并不受影响，即全响应并不是也增大 k 倍。这就是说，式（2-14）并不符合线性系统齐次性的条件。实际上，式（2-16）是零输入响应和零状态响应的叠加，即系统对初始状态和输入呈现可加性。

而且，由式（2-15）中 $M_0(s)$ 的产生过程可以知道，如果各初始条件 $y(0^-), y^{(1)}(0^-), \cdots, y^{(n-1)}(0^-)$ 同增大 k 倍，则 $M_0(s)$ 也增大 k 倍，这导致式（2-16）中的零输入响应也增大 k 倍。这就是说，系统对初始状态满足齐次性。

当式（2-15）出现重极点时，上述这些结论都不变。综上，只需把初始状态也看作是一种“输入”，式（2-14）就是线性系统。为此，我们把线性系统的定义修正为：对初始状态和所有输入都具有齐次性和可加性的系统称为线性系统。

2.2 线性定常系统的脉冲响应函数及卷积

2.2.1 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的复习

单位脉冲函数（单位冲激函数） $\delta(t)$ 属于奇异函数，其定义上节已给出：

$$\begin{cases} \delta(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} 1 \end{cases}$$

容易证明，图 2-3所示的面积为 1 的矩形脉冲当其宽度趋于零时就是 $\delta(t)$ 函数：

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}\left[\frac{1}{\tau}1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{\tau}1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

容易证明 $\delta(t)$ 函数的下述性质：

1) 如果 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续，则

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

2) 如果 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0) \qquad (2\text{-}17)$$

3) $\delta(t)$ 是偶函数。

4) $\delta(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}1(t)$ 或 $1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t$

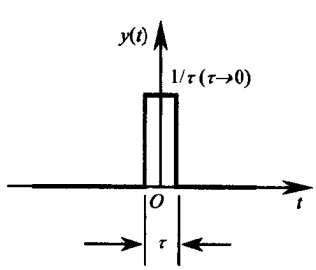


图 2-3 $\delta(t)$ 函数的定义

5) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

2.2.2 单位脉冲偶函数$\delta'(t)$

$\delta(t)$的导数定义为图 2-3 所示的矩形脉冲的导数当该脉冲宽度 τ 趋于零时的极限：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\tau}\left(1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right)-\frac{1}{\tau}\left(1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\right] = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

它是一对强度（即曲线下面积）为无穷大的正负 δ 函数，记作 $\delta'(t)$，称为单位脉冲偶函数。

$\delta'(t)$ 函数的性质：

1)如果 $f'(t)$在 $t=t_0$ 处连续，则

$$\int_{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

证 $\int_{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = \delta(t-t_0)f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$

2) 由定义知，$\delta'(t)$是奇函数。

2.2.3 线性定常系统的脉冲响应函数及卷积

设零初始状态下的线性定常系统$y(t)=T[r(t)]$对 $\delta(t)$的响应为

$$T[\delta(t)] \overset{\text{def}}{=} g(t)$$

由定常系统 $y(t)=T[r(t)]$的性质式（1-3）即

$$y(t-\tau) = T[r(t-\tau)]$$

有

$$T[\delta(t-\tau)] = g(t-\tau) \tag{2-18}$$

又由式(2-17) 知，任意输入可写为

$$r(t) = \int_{\infty}\delta(\tau-t)r(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{\infty}r(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}[r(\tau_i)\Delta\tau\delta(t-\tau_i)]$$

这是一串 $\delta(t)$函数叠加的极限。由于是线性系统，零状态下的输出也为这一串 $\delta(t)$函数引起的响应的叠加，即

$$y_f(t) = T[r(t)] = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\{T[r(\tau_i)\Delta\tau\delta(t-\tau_i)]\} = \int_{\infty}r(\tau)T[\delta(t-\tau)]\mathrm{d}\tau$$

式（2-18）代入上式：

$$y_f(t) = \int_{\infty}r(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = r(t)*g(t) \tag{2-19}$$

这说明，零状态响应可被函数$g(t)$唯一地确定，且等于 $g(t)$与输入的卷积（褶积）。换句话说，$g(t)$完全地表征了零状态下的线性定常系统。所以，$g(t)$与微分方程一样，也可作为线性定常系统的数学模型，称为脉冲响应函数（冲激响应函数）。

在大部分场合，求出零状态响应就足够了。如果要求全响应，由线性系统的可加性性质，把零状态响应加上零输入响应$y_f(t)$即可。

例 1 求上节例 2系统

$$\begin{cases} T\dot{y}(t)+y(t) = T\dot{r}(t), r(t) = v\cdot 1(t), t\in(0^-,\infty) \\ y(0^-) = 0 \end{cases} \tag{2-20}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com