绪　　论

第一章

本章大纲

常用通信术语
通信系统的组成和分类，通信方式
数字通信系统的主要特点
离散信源的信息量，平均信息量（熵）
码元速率，信息速率，频带利用率，误码率

1.1　基本概念与复习要点

1.1.1　常用术语

通信：克服距离上的障碍，交换和传递消息。

消息：有待于传输的文字、符号、数据和语音、活动图片等。前者称为离散消息（指消息状态是可数的或离散的），后者称为连续消息（指消息状态连续变化）。

信号：与消息一一对应的电量。它是消息的物质载体，即消息是寄托在电信号的某参量上，若该参量是离散取值的，这样的信号则称为数字信号。若电信号的该参量连续取值，则称为模拟信号。

通信系统：传递信息所需的一切技术设备的总和。按照信道中传输的是模拟信号还是

数字信号，相应地把通信系统分为模拟通信系统和数字通信系统。

1.1.2 通信系统的组成

1. 通信系统的一般模型

通信系统的一般模型如图 1-1 所示。

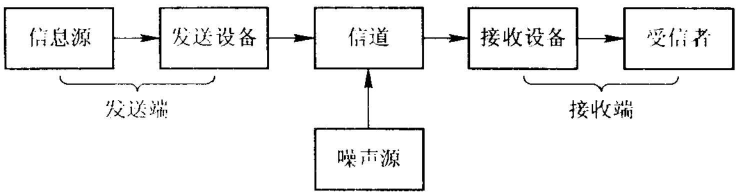

图 1-1 通信系统的一般模型

) 信源和收信者（信宿）

信源是发出信息的源，其作用是把消息转换成原始电信号。信源可分为模拟信源和数字信源。模拟信源（如电话机、电视摄像机）输出连续幅度的模拟信号；数字信源（如电传机、计算机 等各种数字终端设备）输出离散的数字信号。信宿是传输信息的归宿点，其作用是将复原的原始信号转换成相应的消息。

2) 发送设备

发送设备的基本功能是将信源和信道匹配起来，即将信源产生的消息信号变换成适合在信息 中传输的信号。变换方式是多种多样的，在需要频谱搬移的场合，调制是最常见的变换方式。对数字通信系统来说，发送设备常常又可分为信源编码与信道编码。

3) 信道

信道是指传输信号的通道，可以是有线的，也可以是无线的，有线和无线均有多种传输媒质。信道既给信号以通路，也对信号产生各种干扰和噪声。传输媒质的固有特性和干扰直接关系到通信的质量。

4) 接收设备

接收设备的基本功能是完成发送设备的反变换，即进行解调、译码、解码等等。它的任务是从带有干扰的接收信号中正确恢复出相应的原始信号来。对于多路复用信号，接收设备还具有解除多路复用和实现正确分路的功能。

2. 数字通信系统的模型

数字通信系统就是利用数字信号来传递信息的通信系统，如图 1-2 所示。数字通信、涉及的技术问题很多．其中有信源编码、信道编码、保密编码、数字调制、数字复接、同步

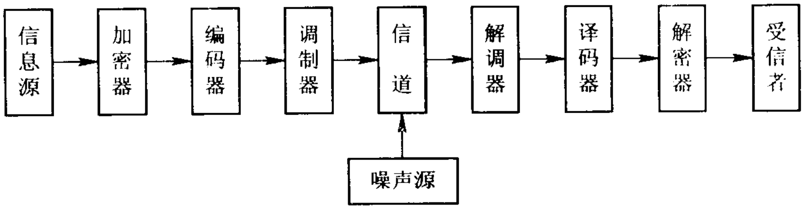

图 1-2　数字通信系统模型

问题等等。

1) 信源编码与译码

信源编码的作用有两个，一是将模拟信号转换成数字信号，即通常所说的模／数转换；二是设法降低数字信号的数码率，即通常所说的数据压缩。编码比特率在通信中直接影响传输所占的带宽，而传输所占的带宽又直接反应了通信的有效性。信源译码是信源编码的逆过程。

2) 信道编码与译码

数字信号在信道传输时，由于噪声、衰落以及干扰等因素，将会引起差错。信道编码的目的就是提高通信系统抗干扰能力，尽可能地控制差错，实现可靠通信。

3) 加密与解密

为了保证数字信号与所传信息的安全，将输入的明文信号人为扰乱，即加上密码，这种处理过程叫加密。在接收端对收到的信号进行解密，恢复明文。

4) 调制与解调

数字调制的任务是把各种数字信息脉冲（基带信号）转换成适于信道传输的数字调制信号（已调信号或频带信号）。数字解调是数字调制的逆过程。

在某些有线信道中，若传输距离不太远且通信容量不太大时，数字基带信号可以直接传送，我们称之为数字信号的基带传输。而在另外一些信道，特别是无线信道和光信道中，数字基带信号则必须经过调制，将信号频谱搬移到高频处才能在信道中传输，我们把这种传输称为数字信号的调制传输（或频带传输，或载波传输）。

5) 同步与数字复接

同步是使收发两端的信号在时间上保持步调一致，按照同步的作用不同，分为载波同步、位同步、群同步和网同步。同步是保证数字通信系统有序、准确、可靠工作的前提条件。数字复接就是依据时分复用基本原理把若干个低速数字信号合并成一个高速的数字信号，以扩大传输容量和提高传输效率

3. 数字通信的主要特点

数字通信相对于模拟通信具有如下一些优点：

（1）抗干扰能力强，可消除噪声积累；

（2）差错可控，传输性能好；

（3）便于与各种数字终端接口，用现代计算技术对信号进行处理、加工、变换、存储，形成智能网；

（4）便于集成化，从而使通信设备微型化；

（5）便于加密处理，且保密强度高。

事物总是一分为二的，一般来说，数字通信的许多优点都是用比模拟通信占据更宽的系统频带为代价而换取的。以电话为例，一路模拟电话通常只占据 4 kHz 带宽，但一路接近同样话音质量的数字电话可能要占据 20～60 kHz 的带宽，因此数字通信的频带利用率不高。数字通信的另一个缺点是对同步要求高，系统设备比较复杂。

1.1.3 通信系统的分类

1. 按通信的业务和用途分类

根据通信的业务和用途可将通信系统分为常规通信和控制通信等。其中，常规通信又分为话务通信和非话务通信，话务通信业务主要是电话信息服务业务、语音信箱业务和电话智能网业务。非话务通信主要是分组数据业务、计算机通信、数据库检索、电子信箱、电子数据交换、传真存储转发、可视图文及会议电视、图像通信等。由于电话通信最为发达，因而其它通信常常借助于公共的电话通信系统进行。未来的综合业务数字通信网中各种用途的消息都能在一个统一的通信网中传输、交换和处理。控制通信则包括遥测、遥控、遥信和遥调通信等，如雷达数据通信和遥测、遥控指令通信等。

2. 按调制方式分类

根据是否采用调制，可将通信系统分为基带传输和调制传输。基带传输是将未经调制的信号直接传送。调制传输是对各种信号变换方式后传输的总称。调制的目的有如下几个方面：

（1）便于信息的传输；

（2）实现信道复用；

（3）改变信号占据的带宽；

（4）改善系统性能。

各种调制方式正是为了达到这些目的而发展起来的。

3. 按传输信号的特征分类

按照信道中所传输的是模拟信号还是数字信号，可以相应地把通信系统分成两类，即

模拟通信系统和数字通信系统。

4. 按传输信号的复用方式分类

传输多路信号有三种复用方式，即频分复用、时分复用、码分复用。频分复用是用频谱搬移的方法使不同信号占据不同的频率范围；时分复用是用脉冲调制的方法使不同信号占据不同的时间区间；码分复用是用正交的脉冲序列分别携带不同信号。传统的模拟通信中都采用频分复用；随着数字通信的发展，时分复用通信系统的应用愈来愈广泛；码分复用主要用于空间通信的扩频通信中。

5. 按传输媒介分类

按传输媒介可将通信系统分为有线（包括光纤）和无线通信两大类。有线信道如明线、电缆、光缆信道，无线信道如短波电离层传播、微波视距传播、卫星中继信道。

6. 按通信方式分类

按消息传递的方向与时间关系，通信方式可分为单工、半双工及全双工通信三种。

单工通信是指消息只能单方向传输的工作方式。例如，遥测、遥控就是单工通信方式。

半双工通信是指通信双方都能收发消息，但不能同时进行收发的工作方式。例如，使用同一载频工作的无线电对讲机，就是按这种通信方式工作的。

全双工通信是指通信双方可同时进行收发消息的工作方式。例如，普通电话就是一种最常见的全双工通信方式。

1.1.4 信息及其度量

通信的目的在于传递信息，每一消息信号必定包含有接收者所需要知道的信息，消息以具体信号形式表现出来，而信息则是抽象的、本质的内容。只有消息中不确定的内容才构成信息，所以信息就是对这种不确定性的定量描述。

1. 离散消息的信息量

直观经验告诉我们：消息出现的可能性（概率）越小，则消息中包含的信息量就越大；当消息出现的概率为 1 时，则它传递的信息量为 0；若干独立消息之和的信息量是每个消息所含信息量的线性叠加，即信息具有相加性。

综上所述，某离散消息 x 所携带的信息量为

$$I = \log_a = \frac{1}{p(x)} = -\log_a p(x) \qquad (1-1)$$

式中，$p(x)$ 为该消息发生的概率。当对数底 a 取 2 时，信息量的单位为比特(bit)；当 a 取 e 时，信息量的单位为奈特(nit)。目前广泛使用的单位为 bit。

【例 1】 已知二进制离散信源(0,1)，每一符号波形等概独立发送，求传送二进制波

形之一的信息量。

解　由于每一波形出现的概率为 $p(x)=1/2$，故其信息量为

$$I=\log_2=\frac{1}{p(x)}=\log_2 2=1\ \text{bit}$$

可见，发送等概的二进制波形之一的信息量为 1 bit。

【例 2】已知四进制离散信源(0，1，2，3)，独立等概发送．求传送每一波形的信息量。

解　由于每一波形出现的概率为 $p(x)=1/4$，故其信息量为

$$I=\log_2=\frac{1}{p(x)}=\log_2 4=2\ \text{bit}$$

可见，四进制的每一波形所含的信息量，恰好是二进制每一波形所含信息量的 2 倍。这是由于每一个四进制波形需要用 2 个二进制波形表示。

推广　$M(M=2^K)$ 进制的每一波形所含的信息量，恰好是二进制每一波形包含信息量的 K 倍。

【例 3】已知二进制离散信源(0，1)，若'0'出现概率为 1/3，求出现'1'的信息量。

解　由于全概率为 1，因此出现"1'的概率为 2/3，故其信息量为

$$I=\log_2\frac{3}{2}=0.585\ \text{bit}$$

以上是单一符号出现时的信息量。对于由一串符号构成的消息，则可根据信息相加性概念计算整个消息的信息量，但当消息很长时，则可用平均信息量的概念来计算。

2. 离散信源的平均信息量

所谓平均信息量是指信源中每个符号所含信息量的统计平均值。统计独立的 M 个符号的离散信息源的平均信息量为

$$H=-\sum_{i=1}^{M}p(x_i)\log_2 p(x_i)\ \text{bit/符号} \tag{1-2}$$

由于 H 同热力学中的熵形式一样，故通常又称它为信息源的熵，其单位为 bit/符号。

可以证明，信息源的最大熵发生在信源中每个符号等概独立出现时，此时最大熵为

$$H=-\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M}\log_2\frac{1}{M}=\log_2 M\quad \text{bit/符号} \tag{1-3}$$

[例 4] 某离散信源由 0，1，2，3 四个符号组成，它们出现的概率分别为 3/8，1/4，1/4，1/8，且每个符号的出现都是独立的。求消息

201020130213001203210100321010023102002010312032100120210

的信息量。

解　用信息相加性概念来计算，此消息中，0 出现 23 次，1 出现 14 次，2 出现 13 次，3

出现 7 次，共有 57 个符号，故该消息的信息量为

$$I = -\sum_{i=1}^{4} n_i \log_2 p(x_i) = -23\log_2\frac{3}{8} - 14\log_2\frac{1}{4} - 13\log_2\frac{1}{4} - 7\log_2\frac{1}{8}$$

$$= 33 + 28 + 26 + 21 = 108\ \text{bit}$$

式中，n 为第 i 个符号出现的次数，$p(x_i)$为第 i 个符号出现的概率

若用熵的概念来计算，由式(1－2)得

$$H = -\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}$$

$$= 1.906\ \text{bit/符号}$$

则该消息的信息量为

$$I = 57 \times 1.906 = 108.64\ \text{bit}$$

讨论 一条由 m 个符号构成的消息，其总信息量 $I = mH$。可见，当消息很长时，用熵的概念来计算比较方便。而且随着消息序列长度的增加，两种计算误差将趋于零

1.1.5 通信系统的主要性能指标

通信的任务是能快速、准确地传递信息，因此传输信息的有效性和可靠性是通信系统最主要的性能指标。有效性是指在给定信道内所传输的信息内容的多少，而可靠性是指接收信息的准确程度。这两者是相互矛盾而又相互联系的，通常也是可以互换的

模拟通信系统的有效性可用有效传输频带来度量。同样的消息用不同的调制方式，则需要不同的频带宽度。可靠性用接收端最终输出信噪比来度量。不同调制方式在同样信道信噪比下所得到的最终解调后的信噪比是不同的。例如，调频信号抗干扰性能比调幅好，但调频信号所需要传输频带却宽于调幅。

衡量数字通信系统的有效性的主要性能指标是传输速率、频带利用率。可靠性指标主要是差错率。

1. 传输速率

1) 码元传输速率(R_B)

码元传输速率简称传码率，又称码元速率或符号速率。它被定义为单位时间(每秒)内传输码元的数目，单位为波特，可记为 Baud 或 B。码元速率与所传的码元进制无关，即码元可以是多进制的，也可以是二进制的。通常，M 进制的一个码元可以用 $\log_2 M$ 个二进制码元去表示。

码元速率又叫调制速率。它表示信号调制过程中，一秒钟内调制信号波（即码元）的变换次数。如果一个单位调制信号波的时间长度为 T 秒，则调制速率为

$$R_B = \frac{1}{T}\ \text{Baud} \tag{1-4}$$

【例 5】二进制调频波，一个“1”或“0”符号的持续时间为 $T=833\times10^{-6}$ s,则调制速率为

$$R_B=\frac{1}{T}=\frac{1}{833\times10^{-6}}=1200\ \text{Baud}$$

2）信息传输速率(R_b)

信息传输速率简称传信率，又称信息速率。它被定义为单位时间（每秒）内传递的信息量(比特数),单位是比特／秒,可记为 bit/s 或 b/s 或 bps。

若信源的码元速率为 R_B，熵为 H，则该信源的平均信息速率为

$$R_b=R_B\cdot H\ \text{b/s} \tag{1-5}$$

等概时，则有

$$R_b=R_B\log_2 M\ \text{b/s} \tag{1-6}$$

或

$$R_B=\frac{R_b}{\log_2 M}\ \text{Baud} \tag{1-7}$$

其中，M 为符号的进制数。如果码元速率为 600 Baud，那么在二进制时的信息速率为 600 b/s ,在四进制时为 1200 b/s，在八进制时为 1800 b/s。

2. 频带利用率

在比较不同通信系统的效率时，单看它们的传输速率是不够的，还应看在这样传输速率下所占的信道的频带宽度。通信系统占用的频带愈宽，传输信息的能力应该愈大。所以，真正用来衡量数字通信系统传输效率（有效性）的指标应该是单位频带内的传输速率，即

$$\eta=\frac{R_B}{B}\ \text{Baud/Hz} \tag{1-8}$$

对二进制传输可表示为

$$\eta=\frac{R_b}{B}\ \text{b/s}\cdot\text{Hz} \tag{1-9}$$

3. 可靠性指标

衡量数字通信系统可靠性的指标是差错率，常用误码率和误信率表示。误码率（也称误符号率)可表示为

$$P_e=\frac{\text{错误码元数}}{\text{传输总码元数}} \tag{1-10}$$

误信率（也称误比特率）可表示为

$$P_b=\frac{\text{错误比特数}}{\text{传输总比特数}} \tag{1-11}$$

显然，在二进制中有

$$P_b=P_e \tag{1-12}$$

1.2　典型例题分析

【例 6】 一个由字母 A、B、C、D 组成的字，对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码，00 代替 A，01 代替 B，10 代替 C，11 代替 D,每个脉冲宽度为 5 ms。

(1) 不同的字母等可能出现时，试计算传输的平均信息速率；

(2) 若每个字母出现的可能性分别为

$$P_A = \frac{1}{5},\quad P_B = \frac{1}{4},\quad P_C = \frac{1}{4},\quad P_D = \frac{3}{10}$$

试计算传输的平均信息速率。

解　(1) 因一个字母对应二个二进制脉冲，属于四进制符号，故一个字母的持续时间为 2×5 ms。传送字母的符号速率为

$$R_{B_4} = \frac{1}{2\times 5\times 10^{-3}} = 100 \text{ Baud}$$

等概时，平均信息速率为

$$R_b = R_{B_4}\log_2 4 = 200 \text{ b/s}$$

(2) 每个符号的平均信息量为

$$H = \frac{1}{5}\log_2 5 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{3}{10}\log_2\frac{10}{3}$$
$$= 1.985 \text{ bit/符号}$$

则

$$R_b = R_{B_4}\cdot H = 100\times 1.985 = 198.5 \text{ b/s}$$

可见，等概时才能获得最大可能信息速率。

【例 7】 国际摩尔斯电码用点和划的序列发送英文字母，划用持续 3 单位的电流脉冲表示，点用持续 1 个单位的电流脉冲表示；且划出现的概率是点出现概率的 1/3。

(1) 计算点和划的信息量；

(2) 计算点和划的平均信息量。

解　(1) 设点与划出现的概率分别为 $P_.$ 和 P_-，已知 $P_- = 1/3P_.$，且 $P_- + P_. = 1$，故得 $P_- = 1/4$，$P_. = 3/4$，则点的信息量为

$$I_. = \log_2\frac{1}{P_.} = \log_2\frac{4}{3} = 0.415 \text{ bit}$$

划的信息量为

$$I_- = \log_2\frac{1}{P_-} = \log_2 4 = 2 \text{ bit}$$

（2）平均信息量为

$$H=\frac{3}{4}\times I_{\cdot}+\frac{1}{4}\times I_{-}=0.81\ \text{bit/符号}$$

【例 8】设一信息源的输出由 128 个不同的符号组成。其中 16 个出现的概率为 1/32，其余 112 个出现概率为 1/224。信息源每秒发出 1000 个符号，且每个符号彼此独立。试计算该信息源的平均信息速率。

解　每个符号的平均信息量为

$$H=16\times\frac{1}{32}\log_2 32+112\times\frac{1}{224}\log_2 224=6.404\ \text{bit/符号}$$

已知符号速率 $R_B=1000(\text{Baud})$，故平均信息速率为

$$R_b=R_B\cdot H=6.404\times10^3\ \ \text{b/s}$$

【例 9】 设一数字传输系统传送二进制码元的速率为 1200 Baud，试求该系统的信息速率；若该系统改为传送十六进制信号码元，码元速率为 2400 Baud ，则这时的系统信息速率为多少？

解　(1) $R_b=R_B=1200\ \text{b/s}$

(2) $R_b=R_B\log_2 16=2400\times4=9600\ \text{b/s}$

【例 10】 某信息源的符号集由 A、B、C、D 和 E 组成，设每一符号独立出现，其出现概率分别为 1/4，1/8，1/8，3/16 和 5/16；信息源以 1000 Baud 速率传送信息。

(1) 求传送 1 小时的信息量；

(2) 求传送 1 小时可能达到的最大信息量。

解　(1) 先求信息源的熵，由式(1－2)得

$$\begin{aligned}H&=-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}-\frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16}-\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16}\\&=2.23\ \text{bit/符号}\end{aligned}$$

则平均信息速率为

$$R_b=R_B\cdot H=1000\times2.23=2.23\times10^3\ \text{b/s}$$

故传送 1 小时的信息量为

$$I=T\times R_b=3600\times2.23\times10^3=8.028\times10^6\ \text{bit}$$

(2) 等概时有最大信息熵，由式(1－3)得

$$H_{\max}=\log_2 5=2.23\ \text{bit/符号}$$

此时平均信息速率最大，故有最大信息量为

$$\begin{aligned}I_{\max}&=T\cdot R_B\cdot H_{\max}=3600\times1000\times2.23\\&=8.352\times10^6\ \ \text{bit}\end{aligned}$$

1.3 练 习 题

1. 模拟信号与数字信号之间的区别是什么？

2. 试述数字通信的优点有哪些？为什么？

3. 在数字通信系统中，其可靠性和有效性指的是什么？各有哪些重要的指标？

4. 设英文字母中 c，e，o，x 出现的概率各为 0.023，0.105，0.001，0.002,试分别求出它们的信息量。

5. 设有四个消息符号，其前三个符号出现概率分别是 1/4，1/8，1/8。各消息符号出现是相对独立的。求该符号集的平均信息量。

6. 一个离散信息源每毫秒发出四种符号中的一个，各相互独立符号出现的概率分别为 0.4，0.3，0.2，0.1。求该信号源的平均信息量与信息速率。

7. 已知八进制数字信号的传输速率为 1600 Baud，试问变换为二进制数字信号时的传输速率为多少 b/s ?

8. 已知二进制数字信号的传输速率为 2400 b/s ，试问变换成四进制数字信号时的传输速率为多少 Baud?

9. 设在 125 μs 内传输 256 个二进制码元，计算信息传输速率是多少？若该信码在 2 s 内有三个码元产生误码，试问其误码率是多少？

随 机 过 程

第二章

本章大纲

随机过程的基本概念
平稳随机过程的定义、各态历经性、相关函数与功率谱密度
高斯过程的定义、性质、一维概率密度函数和分布函数
窄带随机过程的表达式和统计特性
正弦波加窄带高斯过程的统计特性
白噪声和带限白噪声
随机过程通过线性系统

2.1 基本概念与复习要点

2.1.1 随机过程的基本概念

1. 随机过程的定义

当事物变化的过程不能用一个或几个时间的确定函数来描述时，则称这个过程为随机过程。更严格地说，无穷多个样本函数（实现或记录）的集合构成一个随机过程，记为 $\xi(t)$。随机过程有两个基本属性：

（1）$\xi(t)$是一个时间函数；

(2) 给定任意一个时刻 t_1，$\xi(t_1)$是一个不含 t 变化的随机变量。

2. 分布函数和概率密度

随机过程 $\xi(t)$在任意一个时刻 t_1 的取值是随机变量 $\xi(t_1)$，则随机变量 $\xi(t_1)$小于或等于某一数值 x_1 的概率

$$F_1(x_1,t_1) = P[\xi(t_1) \leqslant x_1] \tag{2-1}$$

叫做随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数。如果存在

$$\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,t_1)$$

则称 $f_1(x_1, t_1)$为 $\xi(t)$的一维概率密度。

显然，随机过程的一维分布函数和一维概率密度仅仅描述了随机过程在各个孤立时刻的统计特性，而没有反映随机过程在各个时刻取值之间的内在联系，通常还需要在足够多的时刻上考虑随机过程的多维分布函数。 $\xi(t)$的 n 维分布函数被定义为

$$\begin{aligned} &F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n) \\ &= P[\xi(t_1) \leqslant x_1,\ \xi(t_2) \leqslant x_2,\ \cdots,\ \xi(t_n) \leqslant x_n] \end{aligned} \tag{2-2}$$

如果存在

$$\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

则称其为 $\xi(t)$的 n 维概率密度函数。显然，n越大，对随机过程统计特性的描述就越充分。

3. 随机过程的数字特征

分布函数或概率密度族能够完善地刻画随机过程的统计特性。但在实际工作中，有时不易或不需求出分布函数和概率密度，而用随机过程的数字特征，如均值、方差及相关函数等来描述随机过程的统计特性将更简单方便。

(1) 均值(数学期望或统计平均)：

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{2-3}$$

并记为 $E[\xi(t)]=a(t)$。均值表示随机过程的摆动中心。

(2)方 差：

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = E[\xi(t)]^2 - [a(t)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x,t)\,\mathrm{d}x - [a(t)]^2 \end{aligned} \tag{2-4}$$

$D[\xi(t)]$常记为 $\sigma^2(t)$。可见方差等于均方值与数学期望平方之差。 它表示随机过程在某时刻对于其均值的偏离程度。当均值 $a(t)=0$ 时，方差为

$$\sigma^2(t) = E[\xi(t)]^2 \tag{2-5}$$

均值和方差是刻画随机过程在各个孤立时刻统计特性的重要数字特征，为了描述随机过程在两个不同时刻状态之间的联系，还需利用二维概率密度引入新的数字特征。

(3) 相关函数：在衡量随机过程任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度时，常用协方差函数 $B(t_1,t_2)$和相关函数 $R(t_1,t_2)$来表示。其定义分别为

$$
\begin{aligned}
B(t_1,t_2) &= E\{[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2)-a(t_2)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \qquad (2-6)
\end{aligned}
$$

式中，t_1 与 t_2 是任取的两个时刻； $a(t_1)$与 $a(t_2)$为在 t_1 及 t_2 时刻得到的数学期望； $f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$ 为二维概率密度函数。

$$
\begin{aligned}
R(t_1,t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \qquad (2-7)
\end{aligned}
$$

二者关系：

$$
B(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - E[\xi(t_1)]\cdot E[\xi(t_2)] \qquad (2-8)
$$

若 $E[\xi(t_1)]=0$ 或 $E[\xi(t_2)]=0$，则 $B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)$。若 $t_2>t_1$，令 $t_2=t_1+\tau$，则 $R(t_1,t_2)$可表示为 $R(t_1,t_1+\tau)$。这说明，相关函数依赖于起始时刻 t_1 和 t_2 与 t_1 之间的时间间隔 τ，即相关函数是 t_1 和 τ 的函数。

由于 $B(t_1,t_2)$和 $R(t_1,t_2)$ 是衡量同一过程的相关程度的，因此，它们又常分别称为自协方差函数和自相关函数。对于两个或更多个随机过程，可引入互相关函数。

2.1.2 平稳随机过程

平稳随机过程是一种特殊而又广泛应用的随机过程。

1. 定义

(1) 狭义平稳：指随机过程 $\xi(t)$的 n 维分布函数或 n 维概率密度函数与时间起点无关，即对于任何 n 和 τ, $\xi(t)$的 n 维概率密度函数满足

$$
\begin{aligned}
& f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n) \\
&= f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1+\tau,\ t_2+\tau,\ \cdots,\ t_n+\tau) \qquad (2-9)
\end{aligned}
$$

则称 $\xi(t)$是平稳随机过程。由(2-9)式可见，平稳随机过程的统计特性将不随时间的推移而不同。它的一维概率密度函数与时间无关，即

$$
f_1(x,t) = f_1(x) \qquad (2-10)
$$

而二维概率密度函数只与时间间隔有关，即

$$
f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2) = f_2(x_1,x_2;\ \tau) \qquad (2-11)
$$

(2) 广义平稳：若随机过程 $\xi(t)$ 的数学期望及方差与时间无关，而其相关函数仅与时

间间隔 τ 有关，即

$$\left.\begin{aligned} &a(t)=a \\ &\sigma^2(t)=\sigma^2 \\ &R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

则称 $\xi(t)$是广义平稳随机过程。通信系统中所遇到的信号及噪声大多数可视为平稳的随机过程。以后讨论的随机过程除特殊说明外，均假定是平稳的，且均指广义平稳随机过程。

2．性质

1）各态历经性(遍历性)

设 $x(t)$是平稳随机过程 $\xi(t)$的任意一个实现，若 $\xi(t)$ 的数字特征(统计平均)可由 $x(t)$ 的时间平均替代，即

$$\left.\begin{aligned} &a=\bar{a}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,\mathrm{d}t \\ &\sigma^2=\overline{\sigma^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/3}[x(t)-\bar{a}]^2\,\mathrm{d}t \\ &R(\tau)=\overline{R(\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{2-13}$$

则称平稳随机过程 $\xi(t)$具有各态历经性。“各态历经”的含义 随机过程中的任一实现(样本函数）都经历了随机过程的所有可能状态。因此，可用一个实现的统计特性来了解整个过程的统计特性，从而使“统计平均”化为“时间平均”，使实际测量和计算的问题大为简化。

注意　　只有平稳随机过程才可能具有各态历经性，但在通信系统中所遇到的随机信号和噪声，一般均能满足历经条件。

2）自相关函数的性质

设 $\xi(t)$为平稳随机过程，则它的自相关函数 $R(\tau)=E[(\xi(t)\xi(t+\tau)]$具有如下主要性质：

(1) $R(0)=E[\xi^2(t)]=S$　　($\xi(t)$的平均功率)　　(2-14)

(2) $R(\tau)=R(-\tau)$　　($R(\tau)$ 是偶函数)　　(2-15)

(3) $|R(\tau)|\leqslant R(0)$　　($R(\tau)$ 的上界)　　(2-16)

(4) $R(\infty)=E^2[\xi(t)]$　　($\xi(t)$的直流功率)　　(2-17)

(5) $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$　　(方差，$\xi(t)$ 的交流功率)　　(2-18)

综上，用相关函数可表述 $\xi(t)$ 的几乎所有数字特征，因而以上性质有明显的实用意义。

3）频谱特性

随机过程的频谱特性是用它的功率谱密度来表述的。可以证明：平稳随机过程 $\xi(t)$的功率谱密度 $P_\xi(\omega)$与其自相关函数 $R(\tau)$是一对傅里叶变换关系，即

$$\left.\begin{aligned} P_\xi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \end{aligned}\right\} \tag{2-19}$$

当 $\tau=0$ 时，有

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{2-20}$$

它表示随机过程的总平均功率 S。

关系式(2 - 19)在平稳随机过程的理论和应用中是一个非常重要的工具。它是联系频域和时域两种分析方法的基本关系式。

2.1.3 高斯随机过程

1. 定义

任意 n 维分布都服从正态分布的随机过程称为高斯过程。

2. 重要性质

(1) 若高斯过程是广义平稳的，则也是狭义平稳的；

(2) 若高斯过程中的随机变量之间互不相关，则它们也是统计独立的；

(3) 若干个高斯过程之和的过程仍是高斯型；

(4) 高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯型。

3. 一维概率密度和分布函数

1) 概率密度函数

高斯过程在给定任一时刻上，则是一高斯随机变量，其概率密度函数可表示为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2-21}$$

式中，a 及 σ 两个常量(均值和方差)，$f(x)$曲线如图 2 - 1 所示。

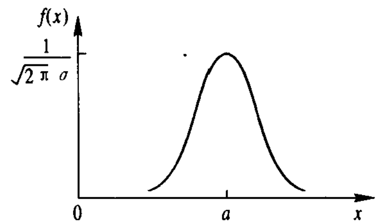

图 2 - 1　正态分布的密度函数

由式(2 - 21)和图 2 - 1 可知 $f(x)$具有如下特性：

(1) $f(x)$对称于 $x=a$ 这条直线；

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{2-22}$$

且有

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tag{2-23}$$

(3) a 表示分布中心，σ 表示集中程度，$f(x)$ 图形将随着 σ 的减小而变高和变窄。当 $a=0$，$\sigma=1$ 时，称 $f(x)$ 为标准正态分布的密度函数。

2）正态分布函数

正态分布函数是概率密度函数的积分，即

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}z \tag{2-24}$$

这个积分不易计算，常引入误差函数来表述。所谓误差函数的定义式为

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{2-25}$$

并称 $1-\mathrm{erf}x$ 为互补误差函数，记为 $\mathrm{erfc}(x)$，即

$$\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{2-26}$$

则

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{erf}\,\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma}, & x\geqslant a\\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\,\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma}, & x\leqslant a\end{cases}$$

用误差函数表示 $F(x)$ 的好处是，它简明的特性有助于分析通信系统的抗噪声性能。

3）误差函数和互补误差函数性质

误差函数是自变量的递增函数，它的性质如下：

(1) $\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}(x)$

(2) $\mathrm{erf}(\infty)=1$

互补误差函数是自变量的递减函数，它的性质如下：

(1) $\mathrm{erfc}(-x)=1-\mathrm{erfc}(x)$

(2) $\mathrm{erfc}(\infty)=0$

(3) $\mathrm{erfc}(x)\approx\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$，　$x\gg1$

2.1.4 窄带随机过程

1. 定义与表达式

窄带随机过程是指其频带宽度 Δf 远远小于其中心频率 f_c 的过程，如图 2-2 所示。大多数通信系统都是窄带带通型的，通过该系统的过程必是窄带过程。如用示波器观察其波形，它是一个频率近似为 f_c，包络和相位随机缓变的正弦波。