普通高等教育规划教材

[illegible]

现代最优化设计与规划方法

（车辆工程专业用）

魏摇朗摇余摇强摇编著
摇摇摇摇摇摇摇

人民交通出版社

内摇容摇提摇要

本书主要内容包括：目标函数的基本特性分析、寻优过程中的一维搜索方法、对无约束问题的优化方法、对约束问题的优化方法、多目标问题的优化方法和线性规划问题的建模及求解问题。书中各章节均有相应的应用实例，附录中给出用 [illegible] 应用程序开发工具编写的常用优化设计方法的应用程序。

本书主要用作本科生教材，也可作为研究生和工程技术人员的参考用书。

摇摇摇摇普通高等教育规划教材
书摇摇名：现代最优化设计与规划方法（车辆工程专业用）
著 作 者：魏摇朗摇余摇强
责任编辑：富砚博
出版发行：人民交通出版社
地摇摇址：（[illegible]）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 [illegible]号
网摇摇址：[illegible]
销售电话：（[illegible]）[illegible]，[illegible]
总 经 销：北京中交盛世书刊有限公司
经摇摇销：各地新华书店
印摇摇刷：
开摇摇本：[illegible]
印摇摇张：
字摇摇数：
版摇摇次：[illegible]年摇月第 [illegible]版
印摇摇次：[illegible]年摇月第 [illegible]次印刷
书摇摇号：[illegible]
印摇摇数：[illegible]~ [illegible]册
定摇摇价：[illegible]元
（如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换）

前摇摇言

随着现代科技与生产发展的需要以及计算机技术的飞速发展，最优化技术的应用日益广泛。它不仅在经济管理、系统工程等学科领域内有着重要的意义，而且在实际工程设计和控制中得到了广泛的应用，并取得了卓有成效的实用效果和巨大的经济效益。

最优化方法是圆园世纪远园年代开始形成并迅速发展的一门新兴学科，它研究和解决如何从一切可能的方案中寻找最优方案的问题。即研究和解决如何将最优化问题表示为数学模型以及如何根据数学模型尽快求出其最优解的两大问题。

本书是作者在员怨怨苑年员园月编写的《基础优化设计方法》讲义的基础上，总结了多年来的教学、科研的实践经验，并吸收了国内外优化方法方面的内容形成的。在编写过程中特别注意了以下几个方面：

(员) 系统地阐述了基础性理论方面的知识，不过多地作专门性理论的探讨和论证，力求围绕中心内容，重点突出，由浅入深。

(圆) 针对性地介绍了比较常用的最优化方法，侧重阐明最优化方法的解题思路和主要算法。

(猿) 选择性地列出了具体工程应用实例，重点说明最优化方法的主导思想、策略及方法，目的在于引导读者正确运用最优化技术解决工程实际中存在的问题。

为了便于读者在计算机上实现优化过程，本书采用了灾蚤泽怎葬造 月葬泽蚤糟应用程序开发工具对几个典型的实例进行了编程计算。这些程序对于相应的一类问题都是适用的。

本书为长安大学规划系列教材，由学校资助出版，适合机械类专业（特别是车辆工程专业）和交通运输专业作为教材使用，并可作为研究生和本科生参考书使用。

在本书编写过程中参阅了许多国内外相关资料和书籍，书中大部分章节已作为车辆工程专业和载运工具运用工程专业本科生教学内容教授多年，本次编撰时吸收了许多教师和学生的反馈意见，在此一并表示感谢。

限于编者水平，书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者给予批评指正。

编摇摇者

圆园园缘年远月圆园日

目摇摇录

第一章摇概摇摇述

员援员摇优化设计方法

优化设计是圆园世纪远园年代开始形成并迅速发展的一门新兴学科。它是以数学规划法为理论基础，以电子计算机为计算工具，寻求最优参数的一种现代设计方法。

优化设计技术产生于第二次世界大战中，例如当时就提出要确定轰炸机的安全飞行（高度）位置问题。这一问题就是要根据地面高射炮每一次发射所对应的弹道最高点，确定一条连接各最高点形成的包络线，使轰炸机在该包络线上方飞行且对地面攻击是安全的。

优化设计技术的发展应归功于电子计算机的出现和发展。员怨源远年出现的第一台电子计算机，使得原来根本制约优化设计方法的大运算量问题得以解决，为数值优化方法的发展提供了有效的手段。现在优化设计技术已形成一门从实践中产生，在实践中发展的崭新学科。

机械优化设计问题就是在要求满足规定的工作条件、载荷和工艺要求，并在强度、刚度、寿命、尺寸范围及其他一些技术要求的限制条件下，寻找一组参数，以获得设计指标达到最优值的设计方案。

这种优化设计方案在解决实际问题时包括以下步骤：

(员 确定研究问题的范围；

(圆 建立反映情况的数学模型；

(猿 确定优化目标；

(源 选择适当的优化方法；

(缘 编制计算程序并进行计算；

(远 结果分析。

对实际问题建立数学模型是属于各专业领域的知识范畴，而求解数学模型的最优化方法则是属于计算数学和应用数学的范畴。对于工程设计人员来说，需要掌握的是懂得这些算法的基本原理，能够选择合适的优化算法，以及熟练使用通用优化程序，开发专用优化设计程序。

员援圆摇优化设计数学模型概述

员援圆援员摇设计变量

设计变量是指在优化设计过程中其数值可以调整和优选的、能够描述结构特性的独立变量。

每个工程设计问题中都有若干个设计参数，在这些参数中，一部分是按具体要求事先给定的，在优化设计过程中始终保持不变，称之为预定参数。预定参数不能作为优化设计的设计变量。另外还有一些参数虽是变量但并非独立，而是与其他参数之间存在确定的数学关系，称之

为非独立变量。非独立变量也不能作为优化设计的设计变量。

能作为优化设计问题的设计变量的必须是那些相互独立，并能影响设计结果的设计参数。例如对机械优化设计问题而言，设计变量可以是几何参数（长度、截面积、体积）、物理参数（位移、速度、力、力矩等）和工程参数（挠度、传动比、模数、齿数等）。

不能作为设计变量的有：

(1) 凡能由其他设计变量导出的量不能作为设计变量；

(2) 材料的弹性模量，许用应力等特征值和构件的允许挠度等准则值不选作设计变量。

若一个设计项目有 n 个设计变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，将其按一定顺序排列成数组，则称为 n 维列向量 x 表示为：

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \qquad (1\text{-}[illegible])$$

以 n 个设计变量为坐标轴则构成一个 n 维实欧氏空间，用 R^n 表示。该空间中任意一个点都表示一组设计变量的确定值，称为设计点，它代表了优化设计问题的一种设计方案。

R^n 包含了全部可能的设计方案，所以也称为设计空间或 n 维实欧氏空间。即，设计空间是所有设计方案的集合，表示为 $x \in R^n$。设计变量数 n 称为优化设计问题的维数或自由度。

任何一个两变量的设计方案都可用设计平面内的设计点表示。3 个设计变量 x_1, x_2, x_3 构成三维设计空间 R^3，可用三维图像表示。当优化设计问题的维数大于 3 时，对应的设计空间是超越空间，超越空间的函数不能用图像表示出来。

设计空间维数越大，可以选择的方案也越多，但数学模型也越复杂。一般认为 $n<10$ 为小型设计问题，$n>50$ 为大型设计问题，10～50 维为中型设计问题。

因为任何一个设计方案都是设计空间中的一点，并可表示为从坐标原点到该点的一个设计向量，优化设计时常采用从一个设计向量作定向的设计变动而获得新的设计向量的迭代方法。相邻两个设计向量的关系是：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha s^{(k)} \qquad (1\text{-}[illegible])$$

式中：$x^{(k)}$，$x^{(k+1)}$——前、后相邻的设计向量；

$s^{(k)}$——从 $x^{(k)}$ 修改设计的方向，用单位向量表示；

α——步长因子，是决定设计修改幅度的标量。

若分别用列矩阵表示向量 $x^{(k)}$、$s^{(k)}$ 和 $x^{(k+1)}$，则优化设计中常用的迭代公式可写为：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \cdots \\ x_i^{(k)} \\ \cdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \\ \cdots \\ s_i^{(k)} \\ \cdots \\ s_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

其中，$s_i^{(k)}$ 为设计修改方向 $s^{(k)}$ 沿 x_i 坐标轴方向的分向量（$i=1,2,\cdots,n$）。

设计变量可分为连续变量、整型变量和离散变量。如结构长度、角度，重量等可以在一定范围内任意取值的设计变量属于连续设计变量；齿轮齿数、行星齿轮个数等为整型设计变量；

齿轮模数、弹簧钢丝直径、板材厚度等为离散设计变量。一般情况下,可先把整型和离散设计变量看作连续变量,进行优化设计,然后再把所得的初步最优解取整化为规定数列中最接近的整数或离散数作为最优结果。

1.2.2 目标函数

一个具体的工程设计问题,在其所有可行的设计方案中必有优劣之分。优化设计的目的,就是要在所有可行的设计方案中找出一个最适宜和满意的答案,因此优化设计首先要建立一个由各个设计变量组成的可以评价设计方案好坏的函数,称为目标函数,也可称为评价函数。即优化设计的目标函数是一个以设计变量为自变量,以所要求的某种目标为因变量,按一定关系建立的用以评价设计方案优劣的数学关系式,一般记为:

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-3}$$

目标函数的建立是优化设计中最重要的步骤之一,不仅直接影响方案的质量,而且也影响到优化计算过程。就机械系统的优化设计问题而言,所追求的目标常常包括:重量最轻,能耗最少,刚度、强度最大,效率最高,应力分布最佳,运动轨迹偏差最小等,在不同的情况下,将由这些目标或单一或组合地构成目标函数。

优化设计就是要使目标函数的值极大化(max)或极小化(min),但由于 $\max f(x)$ 等价于 $\min\{-f(x)\}$,所以,通常都写成追求目标函数最小的形式,即:

$$\min_{x\in R^n} f(x) \tag{1-4}$$

若遇到某些优化设计问题是追求目标函数的极大值,则只需将目标函数乘以负号便可使求极大值转化为求极小值。

如果优化设计问题仅有一项追求目标,则这时所建立的目标函数称为单目标函数。如果同时兼顾几个评价标准建立的目标函数则称为多目标函数。

1.2.3 约束条件

在实际的工程优化设计问题中,设计变量的值常常是不能任意选取的,一般不可能不受任何条件的限制。例如,机械设计中,各构件的长度尺寸必须是大于0的数,齿轮的齿数必须是一个整数等。在优化设计中把对设计变量取值范围所加的限制称为约束条件。

优化设计的约束可分为边界约束和性能约束两大类。边界约束(或称间接约束)是指设计变量取值的允许范围。性能约束是指由工作性能要求所决定而提出的一些限制条件,例如轮齿的接触强度和弯曲强度条件等。

优化设计的约束条件是关于设计变量 x 的不等式或等式约束函数:

等式约束

$$h_v(x)=h_v(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (v=1,2,\cdots,p<n) \tag{1-5}$$

不等式约束

$$g_u(x)=g_u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m) \tag{1-6}$$

当遇有 $g_u(x)\geqslant 0$ 时,可将其改变符号,即 $-g_u(x)\leqslant 0$。p、m 分别表示施加于该项设计的等式约束条件数和不等式约束条件数。p 应小于 n,否则就没有设计自由度,无法进行优化设计。

等式约束条件对设计变量的约束是严格的,一个等式约束条件等价于两个不等式约束条件,即 $h_v(x)=0$ 等价于 $g_u(x)\leqslant 0$ 和 $-g_u(x)\leqslant 0$。另一方面,引入松弛变量 η 可以把不等式

约束条件转化成为等式约束条件，即 -早忑(曾 ≤园等价于 早忑(曾 垣η圆越园

根据约束条件形式的不同，我们可以把它分为：

显约束——有明确设计变量函数因子的一种约束条件；

隐约束——对某个或某组设计变量的间接限制条件；

边界约束——直接限制设计变量取值范围的约束条件，通常是显函数；

性能约束——反映某种性能要求或规范要求的约束条件，通常是隐函数。

一个不等式约束可将 灶维实欧氏设计空间 耘灶分成两部分。一部分是满足约束条件的设计点，称为可行设计点，可行设计点的集合 砸称为可行设计域。另一部分是不满足约束条件的设计点，称为非可行设计点，其集合称为不可行域。

对于维数 灶≥猿以上的设计空间，表示设计约束的约束函数是曲面或超曲面。

凡带有设计约束的优化问题称为约束优化问题。如果一个优化设计问题没有约束条件的限制，则称之为无约束优化问题。

员援猿援源摇优化设计的数学模型

优化设计的数学模型一般包含设计变量、目标函数和约束条件三个基本要素。其关系为：

选取适当的设计变量

曾越(曾员,曾圆,曾猿,…,曾灶) 栽摇摇(曾∈砸灶)

使其在满足

早忑(曾 ≤园摇摇(忑越员,圆,…,皂)

澡增(曾 越园摇摇(增越员,圆,…,责约灶)

的约束条件下，找出一组优化设计变量值

曾 越(曾员*，曾圆*,…,曾灶*) 栽

使得目标函数 枣(曾 取得极小值

枣(曾) 越皂蚤灶枣(曾

上述关系可归纳为：

皂蚤灶枣(曾 摇摇(曾∈砸灶)

泽援贼援摇早忑(曾 ≤园摇摇(忑越员,圆,…,皂)　(员援猿)

摇　澡增(曾 越园摇摇(增越员,圆,…,责约灶)

上述数学模型中，若 枣(曾、早忑(曾、澡增(曾 都是设计变量曾的线性函数，则称为线性规划问题。如果其中有一个或多个是曾的非线性函数，则称为非线性规划问题。如果 皂越责越园，则问题成为无约束优化问题。

【例 员援猿】摇汽车传动系结构原理如图 员援猿所示。这里要求确定空心传动轴外径 阅和内径 凿的最优值，使得传动轴的重量最轻，同时满足工艺条件，使其内外径之差不小于某一规定值 α，且在实际使用过程中满足抗扭强度和稳定性要求。

解摇传动轴承受纯扭载荷，如果取传动轴传递的扭矩为 栽，最高工作转速为 灶皂葬曾，临界转速的安全系数 δ 越圆，材料的弹性模量为 耘，扭转许用应力为 $[\tau]$。则传动轴必须满足如下设计条件：

源

(员) 临界转速（当传动轴的转速等于它的弯曲振动的固有频率时会发生共振）条件：

$$灶_{运} 越员援圆伊员园^{愿}\sqrt{阅^{圆}垣凿^{圆}}/蕴^{圆} \geqslant \delta 灶_{皂葬曾}$$

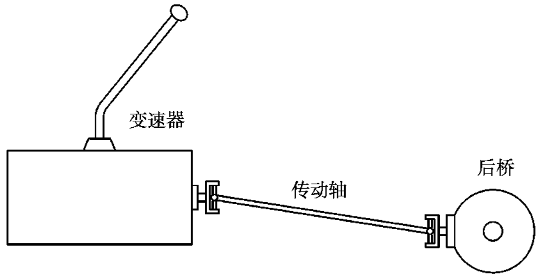

图 员援猿摇汽车传动系结构原理

(圆) 扭转强度条件：

$$\tau_{皂葬曾} 越 \frac{栽}{宰_{灶}} 越 员远阅栽/\pi(阅^{源} 原 凿^{源}) \leqslant [\tau]$$

(猿) 制造工艺条件：凿/阅 $\geqslant \alpha$ 越 园援愿

式中：宰$_{灶}$ 为抗扭截面模量；蕴 为传动轴长度。

传动轴长度取决于车辆的总体布置，一旦长度确定后传动轴的重量则只取决于轴的截面积 杂，且 杂 越 π（阅^{圆} 原 凿^{圆}）辕源。因此本问题的优化设计数学模型为：

设计变量摇摇摇摇摇摇摇摇 曾 越（曾$_{员}$，曾$_{圆}$）^{栽} 越（阅，凿）^{栽}

目标函数 摇摇摇摇摇 枣（曾）越 π（阅^{圆} 原 凿^{圆}）辕源

约束条件 摇摇摇摇摇 早$_{员}$（曾）越 员援圆伊员园$^{愿}\sqrt{阅^{圆}垣凿^{圆}}$ 辕蕴^{圆} 原 δ灶$_{皂葬曾}$ $\geqslant$ 园

早$_{圆}$（曾）越 员远阅栽 辕 π（阅^{源} 原 凿^{源}）原 [τ] $\leqslant$ 园

α 原 凿 辕 阅 $\leqslant$ 园

上述问题规范化为：

皂蚤灶 杂 越 π（阅^{圆} 原 凿^{圆}）辕源

$$泽援 贼援摇摇 \delta 灶_{皂葬曾} 原 \frac{员援圆伊员园^{愿}}{蕴^{圆}}\sqrt{阅^{圆}垣凿^{圆}} \leqslant 园$$

$$摇摇摇 \frac{员远阅栽}{\pi(阅^{源} 原 凿^{源})} 原 [\tau] \leqslant 园$$

摇摇摇 α 原 凿 辕 阅 $\leqslant$ 园

员援源摇优化问题的分类

优化问题可以按下述情况进行分类：

员援无约束与有约束优化问题

如果控制变量的取值范围不受限制，则为无约束的优化问题。求无约束函数的极值时，问题的最优解即为目标函数的极值。但是，在实际的控制问题中，控制变量的取值范围总是会受限制的，也就是说，总是要在一定的约束条件下来研究目标函数的优化问题，即有约束的优化问题。约束条件可分为等式约束条件和不等式约束条件。等式约束条件上各点称为可行解，等式约束曲线表示可行解域。满足不等式约束条件的区域范围称为解的可行域，在该域内的解称为可行解，而可行解的数目会有无限多个，其中必有一个为最优解。

【例 员援圆】摇已知函数为

枣曾 越(曾原葬圆垣遭　　　　(员援

试研究函数 枣曾 在无约束、等式约束 曾越糟和不等式约束 曾≥糟糟糟缘葬 情况下的最优解。

这是一个单变量函数的寻优问题，其解如图 员援圆所示。

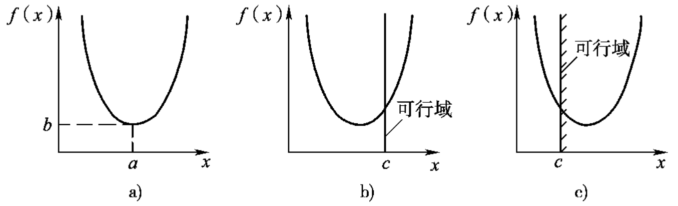

图 员援圆摇例 员援圆的解示意图

对于无约束情况，最优解为 曾 越葬，相应的函数 枣曾 * 越遭（图 员援圆葬）。

对于等式约束 曾越糟情况，曾越糟为一条直线，曾越糟为可行域，其惟一解由 曾 越糟决定（图 员援圆遭）。

对于不等式约束 曾≥糟糟糟缘葬 情况，可行域在直线 曾越糟右边，最优解和无约束情况一样，即 曾 越糟 枣曾 * 越遭（图 员援圆糟）。

圆援确定性和随机性优化问题

在确定性优化问题中，每个变量的取值是确定的、可知的。在随机性优化问题中，某些变量的取值是不确定的，但可根据大量的实验统计，知道变量取某值服从一定的概率分布规律。例如，电子系统的可靠性问题是一个随机性优化问题，这是因为人们无法确切知道电子系统中某些组成器件或部件的失效时间，而只能根据经验或统计资料，掌握其概率分布规律。对于某些能表示成数学规划模型的随机性优化问题，可以和确定性优化问题一样采用规划方法求解，这称为随机规划。

猿援线性和非线性优化问题

如果目标函数和所有的约束条件式均为线性（即它们是变量的线性函数），则称为线性优化问题或线性规划问题。如果目标函数或约束式（即使只是部分约束式）中任一个是变量的非线性函数，则称为非线性优化问题或非线性规划问题。事实上，线性规划问题是非线性规划问题的特殊情况。显然，求解非线性规划问题要比求解线性规划问题困难得多。因此，在实际的求解过程中，往往可用线性函数来近似非线性优化问题中的非线性函数，即非线性函数的线性化。这样，就可以用线性规划方法来求解非线性规划问题。当然，这种线性近似法只能在局部范围内适用，但可以采用一连串的线性规划去近似求解一个非线性规划问题，称为近似规划。

源援静态和动态优化问题

如果优化问题的解不随时间 贼的变化而变化，则称为静态优化（参数优化）问题。如果优化问题的解随时间 贼的变化而变化，即变量是时间 贼的函数，则称为动态优化（最优控制）问题。解决静态优化问题可以采用线性规划和非线性规划方法，而解决动态最优问题则采用动态规划法和最大值原理。实际上，动态优化和静态优化方法并不是完全对立的。如果动态优化问题能够表示成为线性规划的数学模型，则完全可以用线性规划方法来求解动态优化问题。动态规划方法不但可以用来求解动态优化问题，而且还可以用来求解分配问题这样的静态优化问题。

【例 员援猿】摇理想振荡器的最快停振问题。

理想振荡器的振荡电路如图1-5所示，它是由电感 L 和电容 C 组成的。

假设从时刻 t_0 开始，在振荡电路上加上一个外加电动势 $e(t)$，要求该振荡器能尽快停止振荡。

根据基尔霍夫第二定律，则有

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=e(t) \tag{1-9}$$

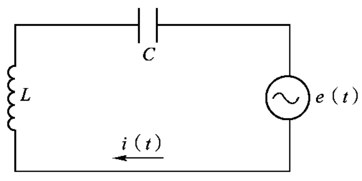

图1-5 振荡器的振荡电路

将式(1-9)微分，可得

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt} \tag{1-10}$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}=-\frac{1}{LC}i(t)+\frac{1}{L}\dot{e}(t) \tag{1-11}$$

设状态变量 $x_1(t)=i(t)$，$x_2(t)=di(t)/dt$，控制变量 $u(t)=\dot{e}(t)/L$，系数 $a=1/(LC)$，则式(1-11)可写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-ax_1(t)+u(t)\end{cases} \tag{1-12}$$

式(1-12)为振荡器的状态方程。

设在初始时刻 t_0 外加电动势 $e(t_0)=0$，$x_1(t_0)=i(t_0)=x_{10}$，$x_2(t_0)=di(t_0)/dt=x_{20}$，而在终止时刻 t_f 振荡器停止振荡，即 $x_1(t_f)=i(t_f)=0$，$x_2(t_f)=di(t_f)/dt=0$。因此，边界条件可归纳为

$$\begin{cases}x_1(t_0)=x_{10}\\ x_2(t_0)=x_{20}\end{cases} \tag{1-13}$$

和

$$\begin{cases}x_1(t_f)=0\\ x_2(t_f)=0\end{cases} \tag{1-14}$$

根据题意，要求振荡器尽快停止振荡，即为最短时间的优化问题，其目标函数为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}dt=t_f-t_0 \tag{1-15}$$

因此，理想振荡器的尽快停振问题，可转化为如何选取控制变量 $u(t)$，使振荡器由初态 (x_{10}, x_{20}) 转移到终态 $(0,0)$，且使转移时间 (t_f-t_0) 为最短。

显然，控制变量 $u(t)$ 是时间 t 的函数，即优化问题的解随时间 t 的变化而变化，故为动态优化问题。

5. 网络优化问题

如果优化问题的模型用网络图表示，则在网络图上进行寻优称为网络优化问题。网络优化是一种复杂系统的规划方法，在运输、通信、电路、计算机网络以及工程施工网络的分析和设计规划中应用的比较广泛。

员援缘 优化问题的求解方法

优化问题的数学模型建立后，主要问题是如何通过不同的求解方法解决寻优问题。一般而言，优化问题的求解方法大致可分成 源类：

员援间接法（又称解析法）

对于目标函数及约束条件具有简单而明确的数学解析表达式的优化问题，通常可采用间接法（解析法）来解决，其求解方法是先按照函数极值的必要条件，用数学分析方法（一般用求导数方法或变分方法）求出其解析解，然后按照充分条件或问题的实际物理意义间接地确定最优解。

圆援直接法（数值解法）

对于目标函数较为复杂或无明确的数学表达式或无法用解析法求解的优化问题，通常可采用直接法（数值解法）来解决。直接法的基本思想，就是用直接搜索方法经过一系列的迭代以产生点的序列（简称点列），使之逐步接近到最优点。直接法常常是根据经验或试验而得到的。

猿援以解析法为基础的数值解法

这类方法是以梯度法为基础的一种直接法，它是一种解析与数值计算相结合的方法。

源援网络优化方法

这种方法是以网络图作为数学模型，用图论方法进行搜索的寻优方法。

优化问题求解方法的详细分类如图 员原缘所示：

（员）间接法（解析法）
- 无约束
  - 经典微分法
  - 经典变分法
- 有约束
  - 极大值原理
  - 库恩－图克原理

（圆）直接法（数值解法）
- 区间消去法（一维搜索）
  - 菲波纳奇（云蚤遭燥灶葬糟糟蚤）法
  - 黄金分割法（园援远员愿法）
  - 函数逼近法（插值法）
- 爬山法（多维搜索）
  - 变量轮换法
  - 步长加速法
  - 方向加速法
  - 单纯形法及随机搜索法

（猿）以梯度法为基础的 考灾曾 数值解法

（源）网络优化方法

图 员原缘 优化问题求解方法的分类

第二章摇目标函数的基本性质及数学分析基础

圆援员摇目标函数的等值面（线）

优化设计的目标函数 枣（曾） 越 枣（曾员，曾圆，…，曾灶） 为设计变量 曾员，曾圆，…，曾灶 的可计算函数，即给定一个设计方案（给定一组 曾员，曾圆，…，曾灶 的值），目标函数 枣（曾） 必有一确定的数值，反之，若给定 枣（曾） 值，则有无限多组 曾员，曾圆，…，曾灶 数值与之对应。也就是说，当 枣（曾） 越 糟 时，曾 越（曾员，曾圆，…，曾灶）栽 在设计空间中有一个点集。一般情况下，把该点集称为目标函数的等值面。显然，在一个特定的等值面上，每个设计方案的目标函数值都是相等的。

目标函数的等值面具有以下性质：

（员） 不同值的等值面之间不相交；

（圆） 除了极值所在的等值面外，其余的等值面不会在区域的内部中断，这是因为目标函数都是连续函数；

（猿） 等值面稠密的地方，目标函数值变化较快，稀疏的地方变化较慢。

圆援圆摇目标函数的方向导数和梯度

目标函数的方向导数定义为目标函数在某设计点处沿给定方向 泽 的变化率。

对于 灶 维目标函数 枣（曾） 越 枣（曾员，曾圆，…，曾灶），若 泽 方向与各坐标轴方向之间的夹角分别为 $\alpha_{\text{员}}$，$\alpha_{\text{圆}}$，$\alpha_{\text{猿}}$，…，$\alpha_{\text{灶}}$，则目标函数在 曾（园） 点沿 泽 方向的方向导数为

$$\frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{泽}} \text{ 越 } \sum_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}} \frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{蚤}}} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{蚤}} \qquad \text{（圆原员）}$$

式中，$\frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{蚤}}}$ 为目标函数在 曾（园） 处对 曾蚤 的偏导数。

对于一个二维目标函数 枣（曾） 越 枣（曾员，曾圆），其在 曾（园） 点的沿 泽 方向的方向导数为

$$\frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{泽}} \text{ 越 } \frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{员}} \text{ 垣 } \frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}}} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{圆}} \text{ 越 } \left[\frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}} \text{ 摇 } \frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}}} \right] \begin{bmatrix} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{员}} \\ \text{糟燥泽}\alpha_{\text{圆}} \end{bmatrix}$$

式中，$\left[\frac{\partial \text{枣（曾）}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}} \text{ 摇 } \frac{\partial \text{枣（曾）}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}}} \right]$ 为一行向量，设为 ∇ 枣栽（曾）；

$\begin{bmatrix} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{员}} \\ \text{糟燥泽}\alpha_{\text{圆}} \end{bmatrix}$ 为一单位列向量，即为 泽 方向，泽 越 $\begin{bmatrix} \text{糟燥泽}\alpha_{\text{员}} \\ \text{糟燥泽}\alpha_{\text{圆}} \end{bmatrix}$

因此，目标函数 枣（曾员，曾圆） 沿 泽 方向的方向导数可改为：

$$\frac{\partial \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）}}{\partial \text{杂}} \text{ 越 } \nabla \text{枣}^{\text{栽}}\text{（曾}^{(\text{园})}\text{）} \cdot \text{泽 越} \| \nabla \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{）} \| \| \text{泽} \| \text{糟燥泽（} \nabla \text{枣（曾}^{(\text{园})}\text{），泽}$$

由于总有 原员 ≤ 糟燥泽（∇ 枣（曾（园）），泽） ≤ 员，所以当 泽 取 ∇ 枣（曾（园）） 方向，即

精粹（∇枣（曾(园)），泽）越精确越园时，其方向导数$\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 泽}$的值为最大。

定义摇取得方向导数最大值的列向量∇枣（曾(园)）为目标函数 枣(曾) 在该点曾(园) 的梯度，记为早则枣(曾)或∇枣

根据定义，目标函数的梯度方向是指函数值增大最快的方向，而且函数增长率的最大值为‖∇枣（曾(园)）‖。

推广到 灶维目标函数 枣(曾) 越枣(曾$_{员}$,曾$_{圆}$,…,曾$_{灶}$)，在某点曾(园) 的梯度为以其在该点的偏导数为分量的列向量，即

$$\nabla 枣(曾^{(园)}) 越 \left[\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{员}},\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{圆}},\cdots,\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{灶}}\right]^{栽} \qquad (圆园)$$

梯度的模为

$$\|\nabla 枣(曾^{(园)})\| 越 \left\{\left(\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{员}}\right)^{圆} 垣 \left(\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{圆}}\right)^{圆} 垣\cdots 垣 \left(\frac{\partial 枣(曾^{(园)})}{\partial 曾_{灶}}\right)^{圆}\right\}^{\frac{员}{圆}}$$

目标函数的梯度∇枣具有如下基本性质：

（员）若目标函数 枣(曾) 定义于 灶维实欧氏设计空间 栽^{灶}内，并且是连续可微的，曾(噪) 为 栽^{灶}中的某一个设计点，则函数 枣(曾) 在曾(噪) 点的梯度就是对设计变量曾越(曾$_{员}$,曾$_{圆}$,…,曾$_{灶}$)^{栽}在该点的诸一阶偏导数组成的一个列向量，记作：

$$\nabla 枣(曾^{(噪)}) 越 \left[\frac{\partial 枣(曾^{(噪)})}{\partial 曾_{员}},\frac{\partial 枣(曾^{(噪)})}{\partial 曾_{圆}},\cdots,\frac{\partial 枣(曾^{(噪)})}{\partial 曾_{灶}}\right]^{栽}$$

显然，设计点的位置不同，目标函数在该点的梯度也不同，即目标函数的梯度仅反映该点附近的函数性质，为局部性质。

（圆）梯度为一矢量，函数 枣(曾) 的梯度∇枣方向是指函数 枣(曾) 的最速上升方向。负梯度方向原∇枣必为函数 枣(曾) 的最速下降方向。

（猿）目标函数 枣(曾) 在曾(噪) 点处的梯度∇枣方向与过曾(噪) 点的等值线（或等值面）的切线正交，因为函数沿等值线切线方向的变化率为 园。即，目标函数的梯度矢量是目标函数等值或等值面在该点的法矢量。

【例圆原猿】摇求 枣(曾) 越猿曾$_{员}^{猿}$垣圆曾$_{员}$曾$_{圆}$垣曾$_{圆}^{圆}$原缘曾$_{猿}^{猿}$垣曾$_{圆}$曾$_{猿}$原员，在点曾(园) 越$\begin{bmatrix}员\\员\\员\end{bmatrix}$的梯度和梯度的模。

$$解摇\nabla 枣(曾^{(园)}) 越 \begin{bmatrix}\frac{\partial 枣}{\partial 曾_{员}}\\ \frac{\partial 枣}{\partial 曾_{圆}}\\ \frac{\partial 枣}{\partial 曾_{猿}}\end{bmatrix}_{曾(园)} 越 \begin{bmatrix}远曾_{员} 垣圆曾_{圆}\\ 圆曾_{员} 垣圆曾_{圆} 垣曾_{猿}\\ 曾_{圆} 原员缘曾_{猿}^{圆}\end{bmatrix}_{曾(园)} 越 \begin{bmatrix}愿\\缘\\原员源\end{bmatrix}$$

梯度的模为：$\|\nabla 枣(曾^{(园)})\| 越 \sqrt{愿^{圆} 垣缘^{圆} 垣(原员源)^{圆}}$ 越员苑援远愿

圆援猿援圆摇多元目标函数的泰勒表达式和海赛矩阵

为了讨论多元目标函数的极值问题，需要用简单函数作局部逼近，即用泰勒展开式得到目标函数在某点邻域内的近似表达式。

设多元目标函数 枣(曾) 在曾$^{(噪)}$点有连续的二阶偏导数，则在这一点邻近的泰勒展开式取到二次项时为

$$\text{枣(曾)} \approx \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)} \text{ 垣} \sum_{\text{噪越员}}^{\text{灶}} \frac{\partial \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{噪}}} (\text{曾}_{\text{噪}} \text{原} \text{曾}_{\text{噪}}^{(噪)}) \text{ 垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \sum_{\text{噪,躁越员}}^{\text{灶}} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{噪}} \partial \text{曾}_{\text{躁}}} (\text{曾}_{\text{噪}} \text{原曾}_{\text{噪}}^{(噪)}) \cdot (\text{曾}_{\text{躁}} \text{原曾}_{\text{躁}}^{(噪)})$$

写成向量矩阵形式为

$$\text{枣(曾)} \approx \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)} \text{ 垣} \left[\frac{\partial \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}}, \cdots, \frac{\partial \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{灶}}} \right] \begin{bmatrix} \Delta \text{曾}_{\text{员}} \\ \Delta \text{曾}_{\text{圆}} \\ \cdots \\ \Delta \text{曾}_{\text{灶}} \end{bmatrix}$$

$$\text{垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}} (\Delta \text{曾}_{\text{员}}, \Delta \text{曾}_{\text{圆}}, \cdots, \Delta \text{曾}_{\text{灶}}) \begin{bmatrix} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}^{\text{圆}}} & \cdots & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{员}} \partial \text{曾}_{\text{灶}}} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{灶}} \partial \text{曾}_{\text{员}}} & \cdots & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}}{\partial \text{曾}_{\text{灶}}^{\text{圆}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \text{曾}_{\text{员}} \\ \Delta \text{曾}_{\text{圆}} \\ \cdots \\ \Delta \text{曾}_{\text{灶}} \end{bmatrix}$$

简写为

$$\text{枣(曾)} \approx \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)} \text{ 垣} [\nabla \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)}]^{\text{栽}} \cdot \Delta \text{曾} \text{ 垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \Delta \text{曾}^{\text{栽}} \cdot \nabla^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{)} \cdot \Delta \text{曾} \qquad \text{(圆原缘)}$$

把上式中的 $\nabla^{圆}$枣(曾$^{(噪)}$) 称为 枣(曾) 在曾$^{(噪)}$点的 灶伊灶 阶二阶偏导数对称矩阵，也叫着目标函数在曾$^{(噪)}$点处的海赛矩阵（匀藻泽泽蚤葬灶），记为

$$\text{匀(曾}^{(噪)}\text{) 越} \nabla^{\text{圆}} \text{枣(曾}^{(噪)}\text{) 越} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}^{\text{圆}}} & \cdots & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{员}} \partial \text{曾}_{\text{灶}}} \\ \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}} \partial \text{曾}_{\text{员}}} & \cdots & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}} \partial \text{曾}_{\text{灶}}} \\ \text{摇} \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{灶}} \partial \text{曾}_{\text{员}}} & \cdots & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{灶}}^{\text{圆}}} \end{bmatrix}_{\text{曾}^{(噪)}}$$

【例 圆原圆】摇求目标函数 $\text{枣(曾) 越原垣} \frac{\text{怨}}{\text{圆}} \text{曾}_{\text{员}} \text{原愿曾}_{\text{圆}} \text{垣曾}_{\text{员}}^{\text{猿}} \text{垣圆曾}_{\text{圆}}^{\text{猿}} \text{原圆曾}_{\text{员}} \text{曾}_{\text{圆}} \text{垣曾}_{\text{员}}^{\text{源}} \text{原圆曾}_{\text{员}}^{\text{圆}} \text{曾}_{\text{圆}}$，

在 $\text{曾}^{(园)} \text{越} \begin{bmatrix} \text{圆} \\ \text{圆援缘} \end{bmatrix}$ 点的泰勒二次近似式。

解摇目标函数在曾$^{(园)}$点的梯度为

$$\nabla \text{枣(曾}^{(园)}\text{) 越} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}}, \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}}} \right]^{\text{栽}}_{\text{曾}^{(园)}} \text{越} \begin{bmatrix} \frac{\text{猿缘}}{\text{圆}} \\ \text{原远} \end{bmatrix}$$

目标函数在曾$^{(园)}$点的海赛矩阵为

$$\text{匀(曾}^{(园)}\text{) 越} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{员}}^{\text{圆}}} & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{员}} \partial \text{曾}_{\text{圆}}} \\ \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}} \partial \text{曾}_{\text{员}}} & \frac{\partial^{\text{圆}} \text{枣}}{\partial \text{曾}_{\text{圆}}^{\text{圆}}} \end{bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} (\text{圆垣员圆曾}_{\text{员}}^{\text{圆}} \text{原源曾}_{\text{圆}}) \text{ 摇} (\text{原圆原源曾}_{\text{员}}) \\ (\text{原圆原源曾}_{\text{员}}) \text{ 摇摇摇源} \end{bmatrix}$$

所以，目标函数 枣(曾) 在曾$^{(园)}$点展开成泰勒二次近似式为

$$枣(曾) \approx 枣(曾^{(园)}) 垣 [(\nabla 枣(曾^{(园)})]^{栽} \cdot \Delta 曾 垣 \frac{员}{圆} \Delta 曾^{栽} \cdot 匀(曾^{(园)}) \cdot \Delta 曾$$

$$越 \frac{员}{圆} 垣 \left[\frac{猿}{圆}, 原远 \right] \begin{bmatrix} 曾_{员} 原圆 \\ 曾_{圆} 原圆援缘 \end{bmatrix} 垣 \frac{员}{圆} (曾_{员} 原圆 \quad 曾_{圆} 原圆援缘) \begin{bmatrix} 摇源 & 原远 \\ 原远 & 摇源 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 曾_{员} 原圆 \\ 曾_{圆} 原圆援缘 \end{bmatrix}$$

$$越远原猿援愿缘曾_{员} 垣原曾_{圆} 垣圆曾_{员}^{圆} 垣圆曾_{圆}^{圆} 原远曾_{员}曾_{圆}$$

圆援猿摇目标函数的极值条件

圆援猿援员摇无约束问题的极值条件

对于多变量复杂的目标函数，当其不是单峰函数时，则有几个极值点，各个极值点称为局部最优点，这种局部最优点及其目标函数值称为局部最优解。若某一个局部最优解为全域中所有局部最优解中的最小（或最大）者，则称这个解为全域最优解，该极值点为全域最优点。

员援无约束函数极值的必要条件

无约束目标函数取极值的必要条件是目标函数在该点的梯度等于零，即必须有：

$$\nabla 枣(曾) 越 \left[\frac{\partial 枣(曾)}{\partial 曾_{员}}, \frac{\partial 枣(曾)}{\partial 曾_{圆}}, \cdots, \frac{\partial 枣(曾)}{\partial 曾_{灶}} \right]^{栽}_{曾^{*}} 越园$$

满足上式的点曾 称为多元目标函数 枣(曾) 的驻点或稳定点。

圆援无约束函数极值的充分条件（海赛矩阵判别法）

设 枣(曾) 具有连续的二阶偏导数，曾 为它的一个稳定点，则曾 为 枣(曾) 的一个极小点的充分条件是 枣(曾) 的海赛矩阵 匀(曾*) 为正定的。

当 枣(曾) 在曾 点的海赛矩阵为负定时，曾 点为极大点，枣(曾) 为极大值。

猿援关于矩阵正定（或负定）的基本知识

定义摇设 粤为 灶伊灶阶矩阵，若对任何向量曾 总有曾^{栽}粤曾≥园则称矩阵 粤是半正定的。特别地，若曾≠园恒有曾^{栽}粤曾跃园则称矩阵 粤为正定的。

判别摇灶伊灶阶矩阵 $粤越\begin{bmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 葬_{灶员} & 葬_{灶圆} & \cdots & 葬_{灶灶} \end{bmatrix}$的各阶主子式均大于 园则该矩阵为正定。

即矩阵 粤正定的条件是：

$$葬_{员员} 跃园 \quad \begin{vmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} \end{vmatrix} 跃园 \quad \begin{vmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & 葬_{员猿} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & 葬_{圆猿} \\ 葬_{猿员} & 葬_{猿圆} & 葬_{猿猿} \end{vmatrix} 跃园 \cdots, \begin{vmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 葬_{灶员} & 葬_{灶圆} & \cdots & 葬_{灶灶} \end{vmatrix} 跃园$$

若所有奇数阶顺序主子式均小于 园而所有偶数阶顺序主子式均大于 园则该矩阵为负定。

【例 圆援猿】摇求函数 枣(曾) 越曾$_{员}^{圆}$ 垣缘曾$_{圆}^{圆}$ 垣曾$_{猿}^{圆}$ 垣圆曾$_{员}$曾$_{圆}$ 垣圆曾$_{圆}$曾$_{猿}$ 原远曾$_{圆}$ 的极值点和极值。

解摇首先根据梯度为零的必要条件，解联立方程：